

Преобразование плоской волны периодически нестационарной диэлектрической средой

© Н.И. Слипченко, Л.Н. Шульга, О.Н. Рыбин

Харьковский технический университет радиоэлектроники,
61726 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 30 октября 2000 г.)

Рассмотрено точное решение задачи преобразования плоской монохроматической волны конечной во времени последовательностью прямоугольных периодических импульсов диэлектрической и магнитной проницаемостей. Решение рассматриваемой задачи осуществляется методом интегральных уравнений. Получены выражения для преобразованной компоненты электрического поля для любой точки пространственно-временной области. Проведен анализ полученных выражений.

Введение

Большое практическое значение в теории волновых процессов занимает изучение параметрической модуляции сред. В частности, особый интерес представляет изучение преобразования электромагнитных волн периодической модуляцией во времени параметров сред. Данному вопросу в специальной научной литературе посвящен целый ряд работ [1–3]. Изменение, например, электрических и магнитных свойств среды, обусловленное изменением ее диэлектрической и магнитной проницаемостями, в определенной спектральной области [4] можно считать скачкообразным. Это обуславливает определенный теоретический интерес к вопросам исследования преобразования электромагнитных волн модуляцией во времени среды периодическими последовательностями прямоугольных импульсов диэлектрической и магнитной проницаемостями.

Необходимо отметить, что анализ этих [1–3] и других работ показывает, что аналитическое исследование преобразований волн периодически нестационарными средами, как правило, проводятся приближенно при некоторых предположениях. Например, в работе [5] проведено приближенное аналитическое исследование преобразования плоской волны гармоническим изменением во времени проводимости полуограниченной области. Анализ в данной работе проведен в приближении теории возмущений, что ограничивает исследуемый диапазон глубины модуляции малыми величинами. Кроме того, в данной задаче модуляция параметров среды осуществлялась на бесконечном временном интервале, что, безусловно, является идеализацией. Поэтому представляет интерес рассмотрение преобразования волн такими средами, материальные параметры которых изменяются периодически на конечном временном интервале.

В представленной работе получено точное решение задачи преобразования монохроматической электромагнитной волны в безграничной среде модуляцией во времени диэлектрической и магнитной проницаемостей ограниченным набором прямоугольных периодических импульсов. Набор импульсов имеет произвольные вели-

чины периода, амплитуд импульсов и их длительности. Предполагается, что длительность импульсов проницаемостей равны.

В работе получены точные выражения для преобразованной компоненты электрического поля, которые позволяют вычислить ее величину в любой момент времени, в любой точке пространства. Проведен анализ полученных выражений.

Электрическое поле в ступенчато-периодической нестационарной среде

Пусть, начиная с момента времени $t_0 = 0$, параметры безграничной среды начинают меняться во времени по произвольному закону. Тогда, согласно [6], эволюция электромагнитного поля в этой среде будет описываться интегральным уравнением Вольтерра второго рода

$$E(t, x) = F(t, x) + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(t, t', x, x') E(t', x'), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $E(x, t)$ — электрическая компонента поля; $K(t, t', x, x')$ — ядро интегрального уравнения; $F(t, x)$ — свободный член интегрального уравнения.

Интегральное уравнение (1) может быть решено методом резольвенты [7]

$$E(t, x) = F(t, x) + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' R(t, t', x, x') F(t', x'), \quad t > 0, \quad (2)$$

где $R(t, t', x, x')$ — резольвента уравнения (1).

Если проницаемости в момент времени $t_0 = 0$ изменяются скачком, то ядро и резольвента уравнения (1) имеют разностный вид

$$K(t, t', x, x') = [1 - m^2] \delta(t - t') \delta(x - x') - \frac{1 - a^2 m^2}{2a^2 m^2} \frac{\partial}{\partial t} \delta(v_0(t - t') - |x - x'|),$$

$$R(t, t', x, x') = \left[1 - \frac{1}{m^2} \right] \delta(t - t') \delta(x - x') - \frac{1 - a^2 m^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta(v_1(t - t') - |x - x'|), \quad (3)$$

где $m = \sqrt{\mu_0/\mu_1}$; $a = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1}$; $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$; ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости невозмущенной среды ($t < 0$); ε_1 и μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемости возмущенной среды ($t > 0$); c — скорость света в вакууме; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Пусть диэлектрическая, магнитная проницаемости среды изменяются во времени по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sum_{k=1}^N \{ \Theta(t - (k-1)T) - \Theta(t - \tau_1 - (k-1)T) \}, \\ \mu(t) &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \sum_{k=1}^N \{ \Theta(t - (k-1)T) - \Theta(t - \tau_1 - (k-1)T) \}, \end{aligned} \quad (4)$$

где τ_1 — длительность импульсов, τ_2 — их скважность, $T = \tau_1 + \tau_2$ — период возмущения параметров среды.

Можно показать, что электрическое поле на любом интервале 0 постоянства параметров среды определяется формулами

$$\begin{aligned} E_n(t, x) &= F_n(t, x) + \int_{t_{n-1}}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' R_n(t, t', x, x') F_n(t', x'), \\ F_n(t, x) &= E_0(t, x) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' K_i(t, t', x, x') E_i(t', x'), \end{aligned} \quad (5)$$

где $E_0(t, x)$ — функция первичного поля; $R_n(t, t', x, x')$ и $K_n(t, t', x, x')$ — резольвента и ядро интегрального уравнения (1), структура которых не меняется с изменением номера скачка n параметров среды.

Из последнего утверждения и из структуры формул (3) нетрудно получить выражения для ядра и резольвенты произвольного интервала постоянства параметров среды. Так, на интервалах времени, где диэлектрическая и магнитная проницаемости принимают новые значения ($(n-1)T < t < \tau_1 + nT$, $n = 1, \dots, N$), выражения для ядра и резольвенты будут определяться формулами (4), а на интервалах времени, где значения параметров среды равны их первоначальным значениям (здесь и далее эти интервалы постоянства параметров среды будут называться интервалами покоя), выражения для ядра и резольвенты будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tau_1 + (n-1)T < t < nT, \quad n = 1, \dots, N; \\ K_n(t, t', x, x') = 0 = R_n(t, t', x, x'). \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразование плоской волны импульсно-периодической нестационарностью безграничной среды

Пусть $E_0(t, x)$ — плоская монохроматическая волна единичной амплитуды $E_0(t, x) = e^{i(\omega t - kx)}$, $k = \omega/v_0$. Подставляя $E_0(t, x)$ в формулы (5), получим выражения для преобразованного электрического поля на первом периоде изменения параметров среды

$$E(t, x) = C_1^+ e^{i(am\omega t - kx)} + C_1^- e^{-i(am\omega t + kx)}, \quad 0 < t < \tau_1, \quad (7)$$

где

$$C_1^\pm = \mp \frac{1 - am}{2} am; \quad E(t, x) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{-i(\omega t + kx)}, \quad \tau_1 < t < T, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1 - a^2 m^2}{4am} e^{-i\omega\tau_1} \left\{ \frac{1 + am}{1 - am} e^{iam\omega\tau_1} - \frac{1 - am}{1 + am} e^{-iam\omega\tau_1} \right\}, \\ B_1 &= -\frac{1 - a^2 m^2}{2iam} e^{i\omega\tau_1} \sin(am\omega\tau_1). \end{aligned}$$

Подставляя выражения (4), (6)–(8) в формулы (5) и используя метод математической индукции, получим рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию электрического поля на произвольном периоде изменения параметров среды, начиная со второго ($n = 2, \dots, N$)

$$E(t, x) = (C_n^+ + D_n^+) e^{i(am\omega t - kx)} + (C_n^- + D_n^-) e^{-i(am\omega t + kx)}, \quad (n-1)T < t < \tau_1 + (n-1)T, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} C_n^\pm &= \frac{1 \mp am}{2} am B_{n-1} e^{\pm i(n-1)(1 \mp am)\omega T}, \\ D_n^\pm &= \frac{1 \mp am}{2} am B_{n-1} e^{\pm (n-1)i(1 \pm am)\omega T}, \\ E(t, x) &= A_n e^{i(\omega t - kx)} + B_n e^{-i(\omega t + kx)}, \\ \tau_1 + (n-1)T &< t < nT, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1 - a^2 m^2}{4am} e^{i\omega\tau_1} \left\{ A_{n-1} \times \left(\frac{1 + am}{1 - am} e^{iam\omega\tau_1} - \frac{1 - am}{1 + am} e^{-iam\omega\tau_1} \right) + 2iB_{n-1} e^{-2i\omega(n-1)T} \sin(am\omega\tau_1) \right\}, \\ B_n &= -\frac{1 - a^2 m^2}{4am} e^{i\omega\tau_1} \left\{ B_{n-1} \times \left(\frac{1 - am}{1 + am} e^{iam\omega\tau_1} - \frac{1 + am}{1 - am} e^{-iam\omega\tau_1} \right) + 2iA_{n-1} e^{-2i\omega(n-1)T} \sin(am\omega\tau_1) \right\}. \end{aligned}$$

Как видно из формул (7)–(10), модуляция параметров безграничной области приводит к расщеплению первичной монохроматической волны на прямую и обратную монохроматические волны. Абсолютные значения волновых чисел новых волн совпадают с абсолютным значением волнового числа первичной волны, а амплитуды и частоты этих волн являются кусочно-постоянными функциями времени.

Рассмотрим теперь состояние поля в конце модулирующего пакета из N импульсов как функцию количества импульсов n . Для этого необходимо провести анализ коэффициентов A_n и B_n . Перепишем выражения для этих коэффициентов в виде системы двух рекуррентных соотношений

$$A_{n+1} = e^{-int_2} (fA_n - e^{-2int_2} h^* B_n),$$

$$B_{n+1} = e^{int_2} (-he^{2int_2} A_n + f^* B_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (11)$$

где введены параметры, не зависящие от номера периода,

$$f = \frac{e^{-i(t_1-t_2)}}{2am} \{2q \cos(amt_1) + i(1 + a^2 m^2) \sin(amt_1)\},$$

$$h = \frac{1 - a^2 m^2}{2iam} e^{i(t_1-t_2)} \sin(amt_1).$$

Вводя новые обозначения для амплитуд $a_n = A_n e^{int_2}$, $b_n = B_n e^{-int_2}$, выражения (7)–(10) переписем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad a_1 = f, \quad b_1 = -h, \quad (12)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} f & -h^* \\ -h & f^* \end{pmatrix}.$$

Используя метод математической индукции, переписем рекуррентное матричное соотношение (12) в виде

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = R^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Возведение матрицы в степень n дает [8], что

$$R^n = U_{n-1}(\operatorname{Re}(f))R - U_{n-2}(\operatorname{Re}(f))I,$$

где $U_n(x)$ — многочлен Чебышева второго рода порядка n ; I — единичная матрица.

Раскрывая матричное соотношение (13), получим выражения для амплитуд прямой и обратной волн на $(n+1)$ -м периоде изменения параметров среды

$$A_{n+1} = e^{-(n+1)/it_2} \{ (f^2 + |h|^2) U_{n-1}(\operatorname{Re}(f)) - U_{n-2}(\operatorname{Re}(f))f \},$$

$$B_{n+1} = -he^{-(n+1)/it_2} \{ (f + f^*) U_{n-1}(\operatorname{Re}(f)) - U_{n-2}(\operatorname{Re}(f)) \}. \quad (14)$$

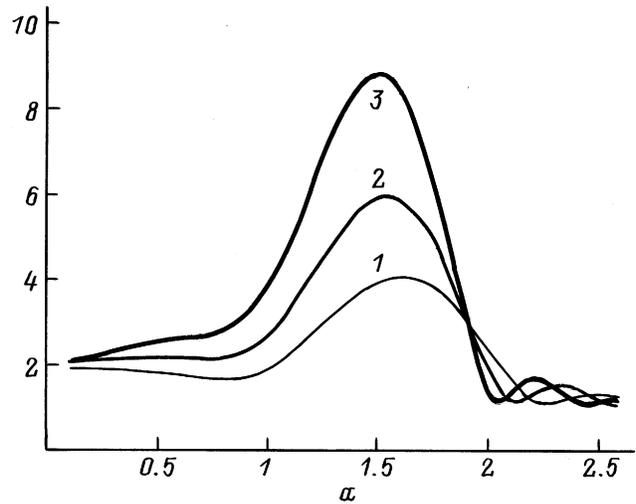


Рис. 1. Зависимость модуля амплитуды прямой волны A_n от относительного изменения диэлектрической проницаемости a для разных количеств возмущающих импульсов параметров среды при $m = 1.1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$; $n = 3$ (1), 4 (2), 5 (3).

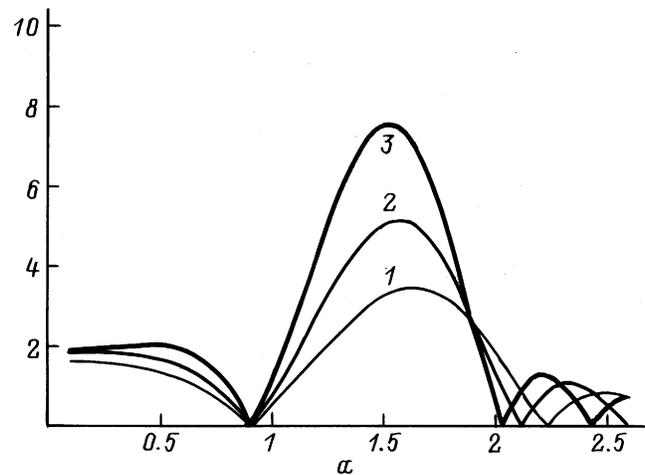


Рис. 2. Зависимость модуля амплитуды обратной волны B_n от относительного изменения диэлектрической проницаемости a для разных количеств возмущающих импульсов параметров среды при $m = 1.1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. 1–3 — то же, что и на рис. 1.

В данной работе была проведена численная оценка амплитуд прямой и обратной волн для значений величин a и m : $\varepsilon \approx 1$, $m \approx 1$. Эти расчеты показали, что импульсно-периодическая модуляция диэлектрической и магнитной проницаемостей среды может приводить к тому, что амплитуды прямой и обратной волн по абсолютной величине становятся больше амплитуды первичной волны. Это превосходство может достигаться как за счет времени изменения диэлектрической (рис. 1, 2), так и магнитной проницаемостей (рис. 3, 4).

Важная особенность поведения амплитуд прямой и обратной волн при переходе от периода к периоду может

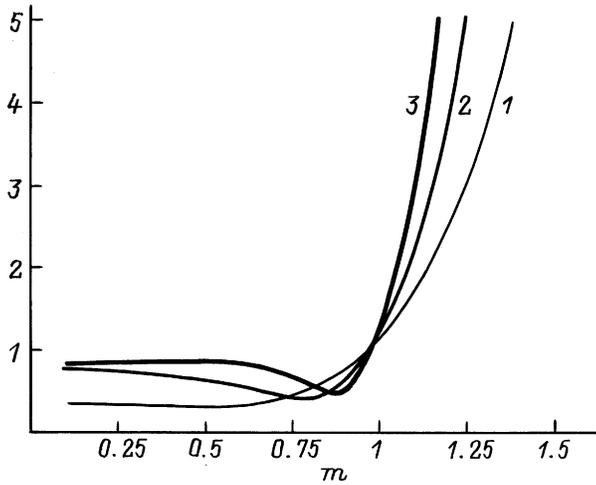


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды прямой волны A_n от относительного изменения магнитной проницаемости m для разных количеств возмущающих импульсов параметров среды при $a = 0.85$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. $n = 3$ (1), 4 (2), 5 (3).

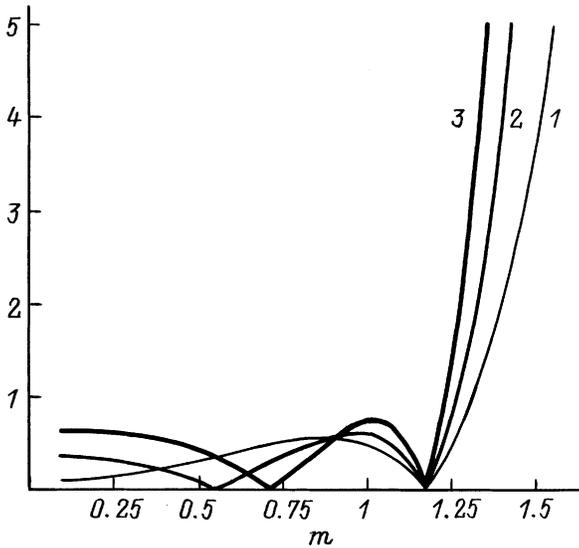


Рис. 4. Зависимость модуля амплитуды обратной волны B_n от относительного изменения магнитной проницаемости m для разных количеств возмущающих импульсов параметров среды при $a = 0.85$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. 1–3 — то же, что и на рис. 3.

быть определена исследованием отношений a_{n+1}/a_n и b_{n+1}/b_n при изменении числа n . Преобразуя матричные выражения (13), для этих отношений имеем равенства

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= f - \frac{h^*}{F_n}, \\ \frac{b_{n+1}}{b_n} &= f^* - hF_n, \end{aligned} \quad (15)$$

где $F_n = a_n/b_n$.

Выполняя в (15) деление верхнего равенства на нижнее, в предположении неравенства нулю амплитуды обрат-

ной волны (т.е. исключая режим запираения обратной волны) приходим к рекуррентному соотношению для F_n

$$F_{n+1} = \frac{-h^* + fF_n}{f^* - hF_n}. \quad (16)$$

Проведем анализ выражения (16). Для отношения на первом периоде имеем

$$F_1 = \frac{a_1}{b_1} = -\frac{f}{h} = \frac{2q \operatorname{ctg}(am\tau_1) + i(1 + a^2m^2)}{i(1 - a^2m^2)} e^{-2i(\tau_1 - T)}.$$

Выражение для квадрата модуля этого отношения имеет вид

$$|F_1|^2 = \frac{4a^2m^2 \operatorname{ctg}^2(am\tau_1) + (1 + a^2m^2)^2}{(1 - a^2m^2)^2}. \quad (17)$$

Поскольку $4a^2m^2 \operatorname{ctg}^2(am\tau_1) > -4a^2m^2$, то $|F_n| > 1$. Как известно из теории конформных отображений [9], дробно-линейная функция (16) переводит внешность круга единичного радиуса во внешность круга единичного радиуса. Отсюда следует, что если $|F_1| > 1$, то $|F_n| > 1$ и подавно. Это означает, что амплитуда прямой волны всегда по модулю превосходит амплитуду обратной волны.

Заключение

В настоящей работе рассмотрено преобразование плоской монохроматической электромагнитной волны конечным во времени импульсно-периодическим изменением диэлектрической и магнитной проницаемостей безграничной области. Показано, что преобразованное поле в любой точке положительной полуоси времени представляет собой сумму прямой и обратной монохроматических волн, абсолютные значения волновых чисел которых совпадают с абсолютным значением волнового числа первичной волны, а амплитуды и частоты являются кусочно-постоянными функциями времени. В интервале покоя параметров среды амплитуда прямой волны при некоторых значениях параметров среды и частоты первичной волны по модулю превосходит амплитуду обратной волны. Численные исследования также показали, что в интервалах покоя параметров среды амплитуды образовавшихся волн по абсолютному значению могут превосходить амплитуду первичной волны.

Список литературы

- [1] Фелсен Л., Маркувин Н. Изучение и рассеяние радиоволн: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. Т. 1. 43 с.
- [2] Аверков С.И., Болдин В.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 9. С. 1060–1066.
- [3] Борисов В.В. Неустановившиеся электромагнитные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 240 с.
- [4] Болотовский Б.М., Давыдов В.А., Рок В.Е. // УФН. 1978. Т. 126. С. 311–321.

- [5] *Harfoush F.A., Taflov A.* // IEEE Trans. on Antennas and Propag. 1991. Vol. 39. N 7. P. 898–906.
- [6] *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО Тест-Радио, 1991. 280 с.
- [7] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
- [8] *Born M., Wolf E.* Principle of Optics. Oxford; London; Edinburgh; New York; Paris; Frankfurt: Pergamon Press, 1964. 856 p.
- [9] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.