

01;03

## О капиллярных колебаниях и устойчивости заряженного пузырька в диэлектрической жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 7 декабря 2000 г.)

Исследованы капиллярные колебания и устойчивость заряженного пузырька в вязкой несжимаемой диэлектрической жидкости по отношению к бесконечно малым искажениям объема и формы. Определены области физических параметров, при которых наблюдается неустойчивость центрально-симметричных радиальных и осесимметричных поверхностных движений пузырька. Получены аналитические асимптотические выражения для декрементов затухания осесимметричных капиллярных колебаний пузырька в приближениях малой и большой вязкости.

### Введение

Исследование капиллярных колебаний и устойчивости заряженных пузырьков в жидкости представляет интерес как в связи с академическими, так и с техническими и технологическими приложениями [1]. Так, с заряженными пузырьками приходится сталкиваться при исследованиях акустической и гидродинамической кавитаций; электроразряда в жидкости [2,3]: флотации и электрофлотации [4]; фильтрации [5]; оптического пробоя жидкостей [6]; барботажа [7] и теплообмена [8], а также при обсуждении возможности выделения солей тяжелых металлов из водных растворов с помощью электроразряда [9] и использования кавитации для поддержания реакций синтеза легких ядер [10,11].

Микропузырьки, появляющиеся в упомянутых приложениях, часто имеют избыточный электрический заряд. Появление этого заряда может быть связано с различными механизмами. В случае электроразряда образуется полость, заполненная плазмой. Если характерное время диффузии носителей зарядов разных знаков в плазме различно и меньше характерного времени рекомбинации, то часть заряда оседает на стенках полости, что и приведет к ее зарядению. Для пузырька, образовавшегося в рабочей камере электрогидродинамического насоса, более вероятным механизмом приобретения избыточного заряда является возможность оседания электроотрицательных молекул примеси, за счет которых происходит преобразование электрической энергии в механическую [12]. Таким образом, естественно выделяются два основных механизма появления на пузырьке избыточного заряда: оседание ионов на стенках из внутренней области и поступление на стенки пузырька ионов окружающей жидкости или ионов примеси. Причем если в первом случае величина заряда на пузырьке в основном определяется соотношением времен рекомбинации и диффузии носителей заряда в плазме, то во втором — способностью границы раздела сред к адсорбции ионов жидкости или примеси. В любом случае величина заряда на пузырьке

может составить значительную величину и существенно повлиять на устойчивость пузырька.

1. Примем, что в жидкости плотности  $\rho$ , вязкости  $\nu$ , диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  виртуально образовался пузырек радиуса  $R_0$ , несущий заряд  $Q$ , приобретенный одним из вышеупомянутых способов. В пузырьке находится совершенный газ давления  $P_{g0}$ , подчиняющийся политропическому закону с показателем политропы  $\gamma$  и насыщенный пар с давлением  $P_V$ . Давление жидкости в окрестности неподвижного пузырька обозначим  $P_\infty$ , а коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость–газ  $\sigma$ .

В общем случае такой пузырек является неравновесным, поэтому его стенка будет двигаться под действием результирующего давления [13]

$$P(R) = P_V + P_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon R^4} - \frac{2\sigma}{R} - P_\infty, \quad (1)$$

где  $R$  — текущий радиус пузырька, совершающего центральносимметричные колебания; если  $P(R) > 0$ , то пузырек расширяется, если  $P(R) < 0$ , то сжимается, если же  $P(R) = 0$ , то он находится в равновесном состоянии.

Будем решать краевую задачу о произвольных движениях границы заряженного пузырька в жидкости. Естественно считать, что движение границы пузырька приводит к движениям как жидкости, так и газопаровой смеси в пузырьке. Однако учет реальных величин плотностей жидкости и газа показывает, что в первом порядке малости по величине скорости среды движением газа в пузырьке можно пренебречь. На самом деле, следуя интегралу Коши–Лагранжа, находим, что движение среды приводит к изменению давления на величину  $\delta P \sim \rho d\varphi/dt$ , пропорциональную плотности. Поскольку в большинстве случаев плотность жидкости на три порядка больше плотности газа, то в уравнении баланса давлений на границе раздела сред вкладом от изменения давления в газе можно пренебречь по сравнению с изменением давления в жидкости. Поэтому в первом приближении будем рассматривать только движения

жидкости в окрестности пузырька. Газ, заполняющий пузырек, будем считать неподвижным.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи представлена уравнением неразрывности жидкости [14]

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

и уравнением Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (3)$$

На границе раздела сред, описываемой уравнением

$$F(\mathbf{r}, t) = r - R(t) - \xi(\vartheta, \varphi, t), \quad (4)$$

должны выполняться граничные условия

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla F = 0, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$P + P_\sigma + 2\rho\nu\mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} - P_V - P_g - P_q = 0, \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  — соответственно касательный и нормальный векторы к поверхности пузырька,  $P_\sigma$  — давление сил поверхностного натяжения,  $P_g$  — давление газа в пузырьке,  $P_q$  — электрическое давление.

К системе уравнений (2)–(7) необходимо добавить уравнение состояния газовой-паровой смеси в пузырьке

$$P(V) = P_V + P_g, \quad (8)$$

условие постоянства объема пузырька при колебаниях его формы, не сопровождающихся изменением объема,

$$\int_V dV = \frac{4\pi}{3} R^3(t) \quad (9)$$

и условие неподвижности центра масс

$$\int_V \mathbf{r} dV = 0, \quad (10)$$

где интегрирование ведется по всему объему пузырька.

Еще раз напомним, что предполагается рассмотреть как радиальные осцилляции пузырька, сопровождающиеся изменением его объема, так и колебания, связанные с отклонением формы поверхности пузырька от сферической, реализующиеся при постоянном объеме, для которых и выписывается условие (9).

2. Выписанная система уравнений (2)–(10) полностью описывает движения жидкости в окрестности газовой-парового пузырька, и, следовательно, ее решение дает полный спектр возможных колебаний неподвижного пузырька в жидкости. Поставленная задача является существенно нелинейной, поэтому для ее решения прибегнем к линеаризации по отклонению формы пузырька от сферической  $\xi(\vartheta, \varphi, t)$  и величине поля скоростей в жидкости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , являющихся малыми одного порядка.

Уравнение неразрывности (2) является линейным, поэтому процедура линеаризации его не упрощает. Уравнение же Навье–Стокса приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (11)$$

Линеаризация кинематического граничного условия дает

$$r = R(t) : \frac{dR}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r. \quad (12)$$

Динамическое граничное условие (6) при линеаризации достаточно взять на сферической поверхности пузырька  $r = R(t)$ . При этом для сферической поверхности вектором нормали  $\mathbf{n}$  является радиальный орт  $\mathbf{e}_r$ . В качестве же касательного вектора  $\boldsymbol{\tau}$  нужно взять последовательно полярный орт  $\mathbf{e}_\vartheta$  и азимутальный  $\mathbf{e}_\varphi$ .

Если  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\vartheta$ , то получаем:

$$r = R(t) : \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r} = 0. \quad (13)$$

Если же  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\varphi$ , то

$$r = R(t) : \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} = 0. \quad (14)$$

Динамическое граничное условие после линеаризации запишется в виде

$$r = R(t) + \xi : P + P_\sigma - 2\rho\nu \frac{\partial u_r}{\partial r} - P_V - P_g - P_q = 0. \quad (15)$$

Условие постоянства объема пузырька при рассмотрении колебаний, связанных с отклонением его формы от сферической, дает

$$\int_\Omega \xi d\Omega = 0, \quad (16)$$

а условие неподвижности центра масс пузырька

$$\int_\Omega \xi \mathbf{e}_r d\Omega = 0, \quad (17)$$

где  $\Omega$  — телесный угол.

3. Для скаляризации линеаризованной системы (2), (11)–(17) представим векторное поле скоростей в виде трех ортогональных составляющих: потенциальной, полойдальной и тороидальной [15]

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_1 \psi_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_2 \psi_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_3 \psi_3(\mathbf{r}, t), \quad (18)$$

где операторы-проекторы  $\mathbf{N}_i$  и эрмитово сопряженные им  $\mathbf{N}_i^+$  выбираем следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \nabla, & \mathbf{N}_2 &= \nabla \times \mathbf{r}, & \mathbf{N}_3 &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}), \\ \mathbf{N}_1^+ &= -\nabla, & \mathbf{N}_2^+ &= \mathbf{r} \times \nabla, & \mathbf{N}_3^+ &= (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla. \end{aligned} \quad (19)$$

Это позволит записать условие ортогональности данных операторов в виде:

$$\mathbf{N}_j^+ \mathbf{N}_i = 0 \quad \text{при } j \neq i. \quad (20)$$

Учитывая выражение для операторов (19) уравнение неразрывности (2) запишем в виде

$$\mathbf{N}_1^+ \mathbf{u} = 0. \quad (21)$$

Подставляя (18) в (21), учитывая условие ортогональности операторов (20), а также тот факт, что  $\mathbf{N}_1^+ \mathbf{N}_1 = -\Delta$ , получаем уравнение для потенциальной функции

$$\Delta \psi_1 = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения (22) в жидкости (при  $r > R$ ) легко выписывается в виде ряда по сферическим функциям

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{C_{nm}^1(t)}{r^{n+1}} Y_{nm}(\vartheta, \varphi). \quad (23)$$

В выражении (23) разделим слагаемые, соответствующие нулевой моде  $n = 0$ , отвечающие радиальным осцилляциям стенки пузырька и колебаниям его формы в окрестности сферы, происходящие без изменения объема,

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{C_{00}^1(t)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{C_{nm}^1(t)}{r^{n+1}} Y_{nm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \psi_1^{(r)} + \psi_1^{(s)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\psi_1^{(r)}$  описывает радиальные движения,  $\psi_1^{(s)}$  — капиллярные колебания формы при постоянном объеме.

С учетом (24) перепишем (18) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}_1 \psi_1^{(r)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_1 \psi_1^{(s)}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \mathbf{N}_2 \psi_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_3 \psi_3(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (25)$$

который и будем использовать в дальнейшем. Прежде чем переходить к скаляризации уравнения Навье–Стокса, давление в жидкости, по аналогии с потенциальной составляющей скорости, описываемой  $\psi_1$ , представим в виде двух слагаемых, отвечающих за радиальные колебания (с индексом  $(r)$ ) и за колебания формы (с индексом  $(s)$ ),

$$P = P^{(r)} + P^{(s)}. \quad (26)$$

Введем функцию  $H$  согласно выражению

$$\nabla H = \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (27)$$

Считая, что изменение давления не приводит к изменению плотности жидкости из (27), с учетом (26) находим

$$\begin{aligned} H &= \frac{P - P_{\infty}}{\rho} = \frac{P^{(r)} + P^{(s)} - P_{\infty}}{\rho} \\ &= \frac{P^{(r)} - P_{\infty}}{\rho} + \frac{P^{(s)}}{\rho} \equiv H^{(r)} + H^{(s)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (25) в уравнение Навье–Стокса (11) и используя (20), (27), получаем три уравнения на скалярные функции

$$H = -\frac{\partial \psi_1^{(r)}}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial t}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = \nu \Delta \psi_j; \quad j = 2, 3. \quad (30)$$

Подставляя (28) в (29) и учитывая ортогональность сферических функций (приравнивая члены, пропорциональные различным сферическим функциям), получим два уравнения

$$P^{(r)} = P_{\infty} - \rho \frac{\partial \psi_1^{(r)}}{\partial t}, \quad (31)$$

$$P^{(s)} = -\rho \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial t}, \quad (32)$$

первое из которых соответствует радиальным колебаниям, а второе — колебаниям формы при неизменном объеме.

Решение уравнения (30), ограниченное при  $r \rightarrow \infty$ , имеет вид [16]

$$\psi_j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} C_{nm}^j k_n \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) Y_{nm} e^{St}; \quad j = 2, 3, \quad (33)$$

где  $k_n(z)$  — модифицированная сферическая функция Бесселя 3-го рода;  $S$  — собственное число, имеющее размерность частоты.

Для скаляризации граничных условий воспользуемся следующими выражениями для компонент поля скоростей в сферической системе координат [15]:

$$u_r = \frac{\partial \psi_1^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial t} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \psi_3,$$

$$u_{\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial \vartheta} \right),$$

$$u_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right), \quad (34)$$

где  $\Delta_{\Omega}$  — угловая часть оператора Лапласа.

Скаляризованное кинематическое граничное условие (12) после подстановки в него (34) запишется в виде

$$r = R(t): \quad \frac{dR}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial t} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \psi_3. \quad (35)$$

Из уравнения (35), связывающего скалярные функции  $\psi_j$  с возмущением поверхности  $\xi$ , а также соотношений (23), (33), нетрудно заключить, что величину  $\xi$  можно представить в виде бесконечного ряда по сферическим функциям

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} Z_{nm}(t) Y_{nm}. \quad (36)$$

Отметим, что при рассмотрении капиллярных колебаний пузырька при постоянном объеме условие (16) дает  $Z_{00}(t) = 0$ , а условие неподвижности центра масс пузырька (17) —  $Z_{1m}(t) = 0$ . Поэтому суммирование в (36) необходимо проводить с  $n = 2$ . Учитывая связь (35) с (23) и (33), нетрудно заключить, что суммирование в рядах для функций  $\psi_1^{(s)}$  и  $\psi_3$  также необходимо начинать с  $n = 2$ . Таким образом,

$$\xi = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} Z_{nm}(t) Y_{nm}, \quad (37)$$

$$\psi_1^{(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{C_{nm}^1(t)}{r^{n+1}} Y_{nm}(\vartheta, \varphi), \quad (38)$$

$$\psi_3 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} C_{nm}^3 k_n \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) Y_{nm} e^{St}. \quad (39)$$

Принимая во внимание выражения (37)–(39) и ортогональность сферических функций, выражение (35) записываем в виде двух равенств, разделяя капиллярные центрально-симметричные осцилляции пузырька, реализующиеся при изменяющемся объеме, и капиллярные осесимметричные колебания формы пузырька при постоянном объеме,

$$r = R(t) : \quad \frac{dR}{dt} = \frac{\partial \psi_1^{(r)}}{\partial r}, \quad (40)$$

$$r = R(t) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \psi_3. \quad (41)$$

Подстановка (34) в (13) и (14) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi_1^{(s)}}{r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_{\Omega}) \psi_3 \right\} + \frac{r}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi_2}{r} \right) \right\} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi_1^{(s)}}{r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_{\Omega}) \psi_3 \right\} - r \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi_2}{r} \right) \right\} = 0, \quad (43)$$

которые необходимо взять на сферической поверхности пузырька  $r = R(t)$ .

Поддействуем на уравнение (42) оператором  $(1/\sin \vartheta)(\partial \sin \vartheta / \partial \vartheta)$ , а на (43) — оператором  $(1/\sin \vartheta)(\partial / \partial \varphi)$  и сложим их. В результате получим

$$r = R(t) : \quad 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi_1^{(s)}}{r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_{\Omega}) \psi_3 = 0. \quad (44)$$

Действуя на (42) оператором  $(1/\sin \vartheta)(\partial / \partial \varphi)$ , а на (43) — оператором  $(1/\sin \vartheta)(\partial \sin \vartheta / \partial \vartheta)$  и вычитая эти уравнения, получаем

$$r = R(t) : \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi_2}{r} \right) = 0. \quad (45)$$

Лапласовское и электрическое давления, так же как давление в жидкости, представим в виде двух составляющих [17], первое из которых пропорционально сферической функции нулевого порядка, а второе представлено рядом по сферическим функциям, начиная со сферической функции второго порядка,

$$P_{\sigma} = \frac{2\sigma}{R(t)} + \frac{\sigma}{R^2(t)} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} (n-1)(n+2) \times Z_{nm}(t) Y_{nm} \equiv P_{\sigma}^{(r)} + P_{\sigma}^{(s)}, \quad (46)$$

$$P_q = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon R^4(t)} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon R^5(t)} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} (n-1) \times Z_{nm}(t) Y_{nm} \equiv P_q^{(r)} + P_q^{(s)}. \quad (47)$$

Учитывая (34), (46), (47) и ортогональность сферических функций, уравнение (15) представим в виде двух уравнений

$$r = R(t) : \quad P^{(r)} + P_{\sigma}^{(r)} - 2\rho\nu \frac{\partial^2 \psi_1^{(r)}}{\partial r^2} - P_V - P_g - P_q^{(r)} = 0, \quad (48)$$

$$r = R(t) : \quad P^{(s)} + P_{\sigma}^{(s)} - 2\rho\nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \psi_3 \right) - P_q^{(s)} = 0. \quad (49)$$

В итоге, согласно сказанному, решаемая выше задача разбивается на две: задачу определения центрально симметричных радиальных осцилляций пузырька и задачу определения спектра капиллярных волн на поверхности пузырька постоянного объема.

4. а) Рассмотрим первую из них. Подставим выражение для  $\psi_1^{(r)} = C_{00}^1(t)/r$  в кинематическое граничное условие (40), определим константу  $C_{00}^1(t)$  и получим выражение

$$\psi_1^{(r)} = -\frac{R^2(t)}{t} \frac{dR(t)}{dt}. \quad (50)$$

Подставляя (50) в динамическое граничное условие (48) и учитывая (1), (31), (46), (47), получим уравнение, описывающее радиальные движения пузырька,

$$R(t) \frac{d^2 R(t)}{dt^2} + 2 \left( \frac{dR(t)}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} - \frac{1}{\rho} P(R(t)) = 0. \quad (51)$$

Уравнение (51) является обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Оно получено из уравнений линейной гидродинамики и отличается от хорошо известного уравнения Рэлея (выведенного из нелинеаризованного уравнения Навье–Стокса)

только коэффициентом при квадрате первой производной, не оказывающим влияние на линейный анализ устойчивости. Исследование особенностей радиальных движений пузырька в жидкости (см., например, [13]) осуществляется путем линеаризации уравнения (51) в окрестности равновесного состояния (точки покоя), характеризующегося условием  $P(R) = 0$ . При этом радиус пузырька представляется в виде  $R(t) = R + \delta R(t)$ , где  $\delta R(t)$  — величина первого порядка малости, и (51) переписывается в виде

$$R \frac{d^2 \delta R(t)}{dt^2} + \frac{4\nu}{R} \frac{d \delta R(t)}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dP(R)}{dR} \delta R(t) = 0. \quad (52)$$

Характеристическое уравнение обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (52) имеет вид

$$R\lambda^2 + \frac{4\nu}{R} \lambda - \frac{1}{\rho} \frac{dP(R)}{dR} = 0, \quad (53)$$

откуда

$$\lambda = -\frac{2\nu}{R^2} \pm \sqrt{\frac{4\nu^2}{R^4} + \frac{1}{\rho R} \frac{dP(R)}{dR}}. \quad (54)$$

Из (54) видно, что радиальные движения пузырька  $\sim e^{\lambda t}$  могут быть как устойчивы, так и неустойчивы в зависимости от величины и знака производной  $dP(R)/dR$ , которая для различных равновесных состояний пузырька может иметь разные знаки. Подробный анализ устойчивости радиальных осцилляций пузырька дан в [13], поэтому не будем на нем останавливаться более детально.

б) Найдем теперь спектр капиллярных колебаний формы пузырька при постоянном объеме. При этом, предполагая исследование на устойчивость, будем считать, что возмущение поверхности  $\xi$  и потенциальная функция  $\psi_1^{(s)}$  зависят от времени экспоненциально  $e^{St}$ . В связи с этим в (37) и (38) положим  $Z_{nm}(t) = Z_{nm} e^{St}$  и  $C_{nm}^1(t) = C_{nm}^1 e^{St}$ . Учитывая, что в выражении  $R(t) = R + \delta R(t)$  зависящая от времени компонента  $\delta R(t)$  — величина первого порядка малости, граничные условия (41), (44), (49) будем относить к равновесному состоянию  $r = R$ . С учетом вышесказанного, подстановка (37), (38), (39) в (41) дает уравнение

$$SZ_{nm} + \frac{(n+1)}{R^{n+2}} C_{nm}^1 - \frac{n(n+1)}{R} k_n \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} R \right) C_{nm}^3 = 0. \quad (55)$$

Подстановка (38), (39) в (44) с учетом рекуррентных соотношений для модифицированных сферических функций Бесселя третьего рода

$$\frac{dk_n(z)}{dz} = \frac{n}{z} k_n(z) - k_{n+1}(z);$$

$$\frac{d^2 k_n(z)}{dz^2} = \left( 1 + \frac{n(n-1)}{z^2} \right) k_n(z) + \frac{2}{z} k_{n+1}(z) \quad (56)$$

приводит к соотношению

$$-\frac{2(n+2)}{R^{n+3}} C_{nm}^1 + \left\{ \frac{S}{\nu} + \frac{2(n-1)(n+1)}{R^2} \right\} \times k_n \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} R \right) + \frac{2}{R} \sqrt{\frac{S}{\nu}} k_{n+1} \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} R \right) C_{nm}^3 = 0. \quad (57)$$

И наконец, подстановка (38), (39) в (49) с учетом (32), (46), (47) и (56) дает

$$\frac{(n-1)}{R^2} \left[ \sigma(n+2) - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon R^3} \right] Z_{nm} - \frac{\rho}{R^{n+1}} \left[ S + \frac{2\nu(n+1)(n+2)}{R^2} \right] C_{nm}^1 + \frac{2\rho\nu n(n+1)}{R} \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} k_{n+1} \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} R \right) - \frac{n-1}{R} k_n \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} R \right) \right) C_{nm}^3 = 0. \quad (58)$$

Уравнения (55), (57) и (58) представляют собой однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $Z_{nm}$ ,  $C_{nm}^1$ ,  $C_{nm}^3$ . Данная система будет иметь нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель будет равен нулю, что приводит к дисперсионному уравнению

$$S^3 + \frac{2\nu S(n+1)(2n+1)}{R^2} \left( S + \frac{2\nu(n+2)(n-1)}{R^2} \right) + \frac{(n+1)(n-1)(n+2)\alpha_n}{\rho R^3} \left( S - \frac{2\nu(2n+1)}{R^2} \right) + \frac{2\sqrt{S\nu}}{R} \left( S^2 - \frac{2\nu S(n+1)(n+2)(n-1)}{R^2} \right) + \frac{(n+1)(n-1)(n+2)\alpha_n}{\rho R^3} \frac{k_{n+1}(\sqrt{S\nu^{-1}}R)}{k_n(\sqrt{S\nu^{-1}}R)} = 0, \quad (59)$$

где

$$\alpha_n = \sigma - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon(n+2)R^3}.$$

Уравнение (59) определяет спектр капиллярных движений поверхности пузырька, реализующихся при постоянном объеме. Анализ этого уравнения должен проводиться численно, но в асимптотических ситуациях мало- и сильновязкой жидкости можно получить аналитические зависимости.

5. Рассмотрим случай маловязкой жидкости. Модифицированные сферические функции Бесселя третьего рода целого порядка определяются выражением [16]

$$k_n(z) = \frac{\pi e^{-z}}{2z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} (2z)^{-k}. \quad (60)$$

Если вязкость жидкости настолько мала, что  $\nu \ll R^2 S$ , то аргумент  $z = \sqrt{S\nu}R$  сферической цилиндрической функции  $z \gg 1$  и из (60) нетрудно получить асимптотическое соотношение

$$\frac{k_{n+1}(z)}{k_n(z)} = 1 + \frac{n+1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right). \quad (61)$$

Подставляя (61) в (59) и оставляя члены первого порядка малости по вязкости, получаем дисперсионное уравнение в виде

$$S^3 + \left(\frac{2\sqrt{S\nu}}{R} + \frac{4\nu(n+1)^2}{R^2}\right)S^2 + \left(S + \frac{2\sqrt{S\nu}}{R} - \frac{2\nu n}{R^2}\right) \times \frac{(n+1)(n-1)(n+2)\alpha_n}{\rho R^3} = 0. \quad (62)$$

Переходя в (62) к нулевой вязкости жидкости, нетрудно получить выражение для частоты капиллярных колебаний пузырька в идеальной жидкости

$$S = \pm i \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)(n+2)\alpha_n}{\rho R^3}} \equiv \pm i\omega_0. \quad (63)$$

Из (63) видно, что неустойчивость пузырька по отношению к деформации при постоянном объеме имеет место при условии  $\alpha_n \leq 0$ , которое в принятой модели должно быть выполнено совместно с условием  $P(R) = 0$ , что приводит к системе уравнений вида

$$\alpha_n = \sigma - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon(n+2)R^3} \leq 0,$$

$$P(R) = P_V + P_{g0} \left(\frac{P_0}{R}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon R^4} - \frac{2\sigma}{R} - P_\infty = 0. \quad (64)$$

Из (64) следует, что неустойчивость пузырька наступает когда электрическое давление равно лапласовскому, а давление парогазовой смеси равно давлению в жидкости. Этот вывод физически ясен, поскольку если давление смеси в пузырьке больше давления в жидкости, то любое тепловое искажение формы поверхности сглаживается разностью между высоким внутренним давлением смеси и небольшим давлением в жидкости. Если же давление газопаровой смеси меньше давления в жидкости, то тепловое искажение поверхности будет увеличиваться под действием перепада давлений: высокого давления в жидкости и низкого давления парогазовой смеси в пузырьке.

Учитывая, что неустойчивой становится прежде всего вторая мода из (64) легко определить условие неустойчивости по отношению к изменению формы пузырька

$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon\sigma R_0^3} \geq \sqrt{\frac{P_{g0}}{P_\infty - P_V}}.$$

В вязкой жидкости поверхностные искажения формы пузырька будут затухать за счет вязкой диссипации энергии. Таким образом, частоту поверхностных движений

пузырька в вязкой жидкости можно представить в виде  $S = \pm i\omega_0 + \delta S$ , где  $\delta S$  — величина первого порядка малости относительно вязкости. Подставляя это выражение в (62), получаем добавку к частоте

$$\delta S = -\frac{\nu(n+2)(2n+1)}{R^2}, \quad (65)$$

определяющую декремент затухания поверхностных колебаний пузырька в слабовязкой жидкости, вычисленный еще Лэмбом [18].

6. Для случая сильновязкой жидкости, когда  $\nu \gg R^2 S$ , аргумент сферической функции стремится к нулю. В этом случае от ряда (60) необходимо оставить наивысшие ступени сингулярной части

$$k_n(z) = \frac{\pi e^{-z}}{2z} \left( \frac{(2n)!}{n!(2z)^n} + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(2z)^{n-1}} + \frac{(2n-2)!}{(n-2)!2!(2z)^{n-2}} + o\left(\frac{1}{z^{n-2}}\right) \right), \quad (66)$$

$$k_{n+1}(z) = \frac{\pi e^{-z}}{2z} \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2z)^{n+1}} + \frac{(2n+1)!}{n!(2z)^n} + \frac{(2n)!}{(n-1)!2!(2z)^{n-1}} + o\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right) \right). \quad (67)$$

Используя (66) и (67), находим, что

$$\frac{k_{n+1}(z)}{k_n(z)} = \frac{2n+1}{z} + \frac{z}{2n-1} + o(z). \quad (68)$$

Подставляя (68) в (59), получаем дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний пузырька при постоянном объеме в случае большой вязкости

$$S^2 + \frac{2\nu S}{R^2} \frac{(n+2)(2n^2+1)}{(2n+1)} + \omega_0^2 = 0. \quad (69)$$

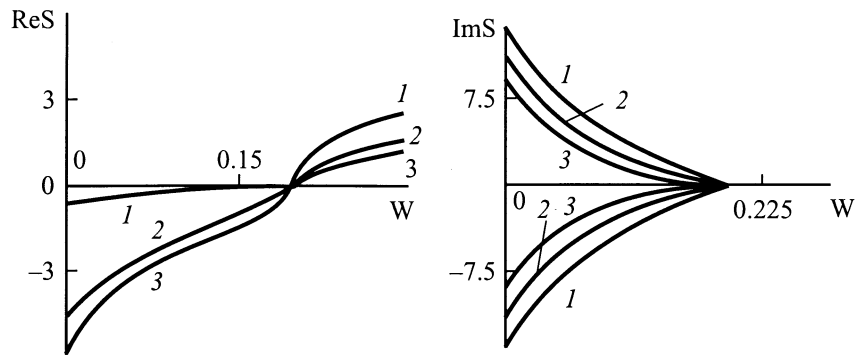
Из этого уравнения при  $\nu R^{-2} \gg \omega_0$  легко найти

$$S_1 = -\frac{\omega_0^2 R^2}{2\nu} \frac{2n+1}{(n+2)(2n^2+1)} + o\left(\frac{1}{\nu^3}\right),$$

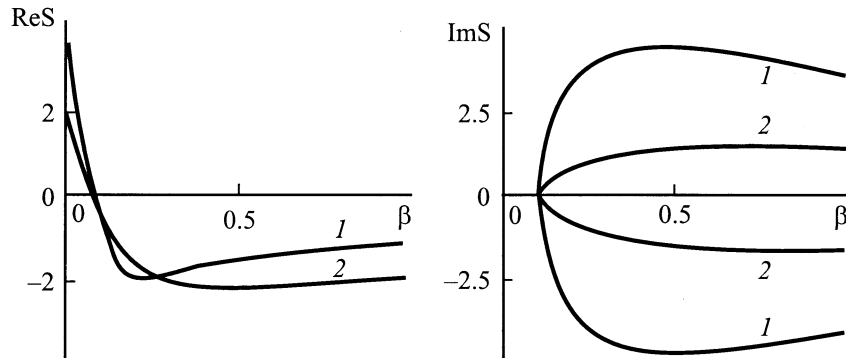
$$S_2 = -\frac{2\nu}{R^2} \frac{(n+2)(2n^2+1)}{2n+1} + o\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (70)$$

Из (70) видно, что неустойчивость пузырька, которая характеризуется условием  $S \geq 0$ , для сильновязкой жидкости, как и для маловязкой, наступает при  $\alpha_n \leq 0$  (при  $\omega_0^2 \leq 0$ ), но величина инкремента неустойчивости будет весьма малой, так как  $\omega_0 \ll \nu R^{-2}$ . Интересно отметить, что величина инкремента неустойчивости заряженного пузырька, как и для заряженной вязкой капли [19], оказывается обратно пропорциональной вязкости.

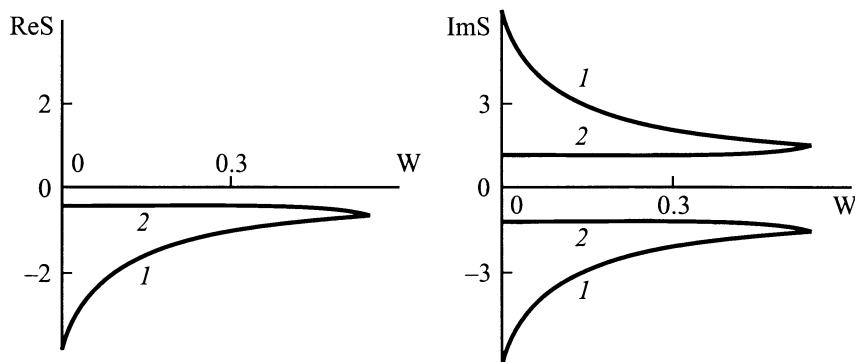
При  $\omega_0^2 > 0$  оба корня (70) отрицательны и определяют декременты затухания капиллярных движений поверхности пузырька. Причем первый из корней много меньше второго, поэтому, как и для случая волн на



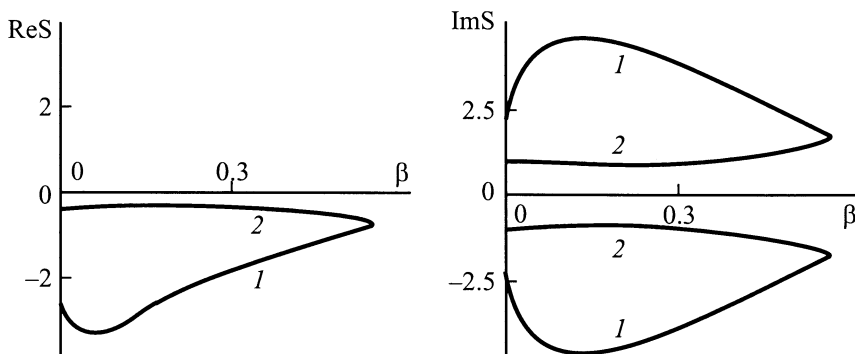
**Рис. 1.** Зависимости комплексной частоты от параметра Рэлея.  $n = 2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\beta_* = 1$ ;  $\nu = 0.005$  (1), 0.06 (2), 0.1 (3).



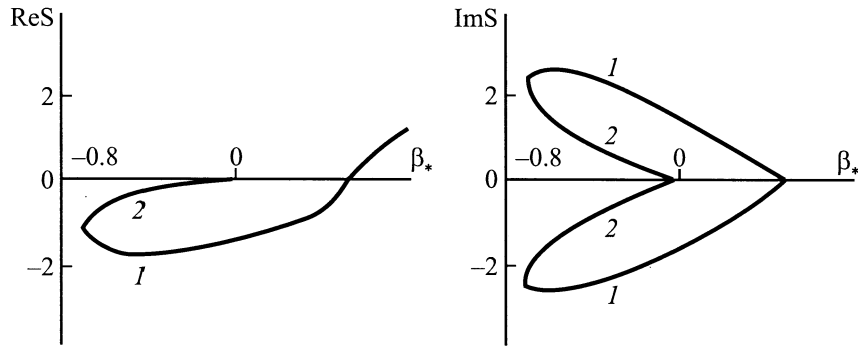
**Рис. 2.** Зависимости комплексной частоты от параметра  $\beta$ , характеризующего давление газа в пузырьке.  $n = 2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $W = 0.1$ ,  $\beta_* = 1$ ;  $\nu = 0.05$  (1), 0.3 (2).



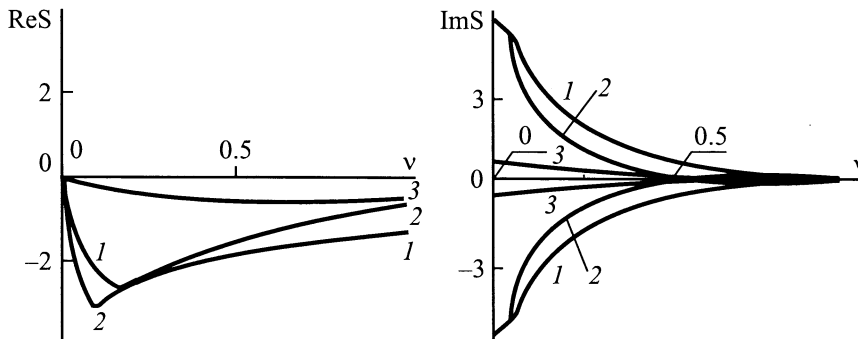
**Рис. 3.** То же, что на рис. 1, но  $\beta_* = -0.5$ ,  $\nu = 0.1$ . 1 — равновесное состояние с меньшим радиусом, 2 — с большим.



**Рис. 4.** То же, что на рис. 2, но  $W = 0.05$ ,  $\beta_* = -0.5$ ,  $\nu = 0.1$ . 1 — равновесное состояние с меньшим радиусом, 2 — с большим.



**Рис. 5.** Зависимости комплексной частоты от параметра  $\beta_*$ , характеризующего давление жидкости при  $n = 2, \gamma = 1, W = 0.2, \beta = 0.1, \nu = 0.1$ . 1 — равновесное состояние с меньшим радиусом, 2 — с большим.



**Рис. 6.** Зависимости комплексной частоты от вязкости  $\nu$  при  $n = 2, \gamma = 1, W = 0.05, \beta_* = 0.6$  (1, 2),  $-0.6$  (3);  $\beta = 0.5$  (1),  $0.1$  (2, 3). 3 — равновесное состояние с большим радиусом.

плоской поверхности вязкой жидкости [20], он представляет наибольший интерес с физической точки зрения, поскольку движения, соответствующие второму корню, быстро затухают.

7. Выводы асимптотического рассмотрения подтверждаются численными расчетами, проведенными по (59) совместно с уравнением  $P(R) = 0$  в безразмерных переменных, в которых  $R_0 = \rho = \sigma = 1$ , а все физические величины выражены в своих характерных масштабах

$$P^* = \frac{\sigma}{R_0}, \quad R^* = R_0, \quad Q^* = \sqrt{R_0^3 \sigma},$$

$$\nu^* = \sqrt{\frac{R_0 \sigma}{\rho}}, \quad S^* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R_0^3}}.$$

В этом базисе задача характеризуется тремя безразмерными числами: параметром Рэлея  $W = Q^2 / (16\pi\varepsilon)$ , параметром, характеризующим давление газа в пузырьке  $\beta = P_{g0} / 2$ , и параметром, характеризующим давление жидкости  $\beta_* = (P_\infty - P_V) / 2$ . В зависимости от величины этих параметров уравнение  $P(R) = 0$ , как видно из (1) и правила знаков Декарта, имеет одно, два или ни одного решения [13]. В области А, где  $\beta_* > 0$ , а оставшиеся два параметра произвольны, имеется одно решение. Для области В, где  $\beta_{*CR} < \beta_* < 0$ , а параметр Рэлея и

газовый параметр меньше своих критических значений, имеются два равновесных состояния. И наконец, в области С, для которой  $\beta_* < \beta_{*CR}, W > W_{CR}$  и  $\beta > \beta_{CR}$ , не имеется ни одного решения.

В области А частоты поверхностных колебаний пузырька и декремент затухания уменьшаются с увеличением числа  $W$  и при достижении критического значения  $W \geq \sqrt{\beta/\beta_*}$  декремент переходит через нуль, обуславливая инкремент неустойчивости (рис. 1). При этом величина инкремента неустойчивости уменьшается с увеличением вязкости. В данной области устойчивость пузырька существенно зависит от начального газового давления. Как видно из зависимостей  $S = S(R(\beta))$ , иллюстрированных рис. 2, при уменьшении газового давления действительная часть комплексной частоты так же, как и при увеличении параметра Рэлея, переходит через нуль, обуславливая появление неустойчивости.

В области В пузырек является абсолютно устойчивым по отношению к возмущениям поверхности. Так, при увеличении параметра Рэлея частоты капиллярных колебаний и декремент затухания для пузырька, находящегося в равновесном состоянии с меньшим радиусом, уменьшаются, а для пузырька с большим радиусом, наоборот, увеличиваются (рис. 3). Это связано с тем, что при увеличении параметра Рэлея два решения уравнения  $P(R) = 0$  сходятся в одной точке, отвечающей границе



областей  $B$  и  $C$ , а затем решения этого уравнения пропадают. Увеличение газового давления также не приводит к потере устойчивости формы пузырька, что можно видеть на рис. 4.

Увеличение давления в жидкости, как и увеличение параметра Рэлея, в области  $B$  не приводит к потере устойчивой формы. В этой области, как видно из рис. 5, увеличение давления в жидкости приводит к уменьшению частот и декремента затухания для пузырька, находящегося в равновесном состоянии как с меньшим, так и с большим радиусом. Но при  $\beta_* = 0$  равновесное состояние с большим радиусом пропадает, а с меньшим переходит в область  $A$ , где вскоре становится неустойчивым.

Зависимость комплексной частоты от вязкости независимо от области и типа равновесного состояния является однообразной. В частности, как видно из рис. 6, частоты капиллярных колебаний уменьшаются с увеличением вязкости, а декремент затухания для малых вязкостей увеличивается пропорционально вязкости, а затем начинает уменьшаться, что хорошо качественно и количественно согласуется с асимптотическими расчетами, проведенными выше.

## Заключение

Неустойчивость пузырька по отношению к изменению формы имеет место только в случае, когда давление в жидкости больше давления насыщенных паров газа в пузырьке. Неустойчивость же пузырька по отношению к изменению объема, напротив, наблюдается только в том случае, если давление жидкости меньше давления насыщенного пара в пузырьке. При этом наличие заряда на пузырьке приводит к существенному снижению критического давления в жидкости, при котором наступает неустойчивость формы. Увеличение вязкости жидкости приводит к уменьшению инкремента неустойчивости. Влияние вязкости на декремент затухания является различным для случаев мало- и сильновязкой жидкости. Так, в маловязкой жидкости декременты затухания поверхностной и радиальной составляющих увеличиваются линейно с увеличением вязкости. А при большой вязкости декремент поверхностной составляющей уменьшается, в то время как радиальной продолжает увеличиваться.

## Список литературы

- [1] Жаров А.Н., Ширяева С.О. // ЭОМ. 1999. № 6. С. 9–22.
- [2] Скорых В.В. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 8. С. 1569–1572.
- [3] Климкин В.Ф. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 4. С. 54–58.
- [4] Дроздонов А.Л. // ЭОМ. 1993. № 4. С. 39–49.
- [5] Хасанов М.М. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. № 2. С. 66–73.
- [6] Бункин Н.Ф., Лобеев А.Ф. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 21. С. 38–43.
- [7] Зеленко В.Л., Мясников В.П. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 3. С. 59–68.
- [8] Болоза М.К., Климов С.М., Чучкалов С.И. // ЭОМ. 1992. № 2. С. 52–57.
- [9] Малинин А.Н., Сабинин В.Е., Сидоров А.Н. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 1. С. 57–61.
- [10] Липсон А.Г., Клоев В.А., Дерягин Б.В. и др. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 19. С. 89–93.
- [11] Липсон А.Г., Ляхов Б.Ф., Дерягин Б.В. и др. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 21. С. 33–37.
- [12] Жакин А.И. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 14–20.
- [13] Григорьев А.И., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 4. С. 8–13.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [15] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э., Григорьев А.И. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН. Ярославль, 1994. № 27. 126 с.
- [16] Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [18] Ламб Г. Гидродинамика. М.: Огиз-Гостехиздат, 1947. 928 с.
- [19] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 9. С. 30–36.
- [20] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 538 с.