01;04

О неустановившихся движениях с однородной деформацией в магнитной гидродинамике

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 23 марта 2001 г.)

Проанализированы условия существования неустановившихся движений с однородной деформацией для прямолинейного и тороидального шнуров эллиптического сечения. Найдены зависимости от времени размеров поперечного сечения указанных плазменных конфигураций.

Введение

Разработка методов построения нестационарных решений уравнений магнитной гидродинамики представляет несомненный интерес. Для достижения этой цели эффективным оказывается использование автомодельного подхода [1], достоинство которого заключается в возможности перехода от решения системы уравнений в частных производных к решению более простой задачи — интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие решения уравнений магнитной гидродинамики были получены ранее для неустановившихся движений плазмы, относящихся к классу движений сплошной среды, для которых скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии [2–6].

Однако в этих работах рассматривалось одномерное движение плазмы. В данной работе автомодельный подход применяется для решения уравнений магнитной гидродинамики в случае двумерных движений с однородной деформацией. Для прямолинейного плазменного шнура эллиптического сечения получено точное, а для тонкого тороидального шнура эллиптического сечения — приближенное решение нестационарной задачи. Эти решения описывают зависимость от времени поперечных размеров шнура при изменении как внешнего магнитного поля, так и электрического тока, протекающего по шнуру.

Основные уравнения

Система уравнений магнитной гидродинамики используется для макроскопического описания плазмы в рамках модели идеальной проводящей жидкости [7]

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{VB}], \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{V} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{B}]. \tag{3}$$

Здесь $\rho, \mathbf{V}, p$ — соответственно плотность, скорость и давление плазмы. Пусть S — некоторая величина, сохраняющаяся при движении плазмы. Если (1) умножить на ∇S, то получающееся уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\nabla S\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla S \operatorname{rot}[\mathbf{VB}] = -\operatorname{div}[\nabla S[\mathbf{VB}]]$$

$$= \mathbf{B}\operatorname{grad}(\mathbf{V}\nabla S) - \mathbf{V}\operatorname{grad}(\mathbf{B}\nabla S) - (\mathbf{B}\nabla S)\operatorname{div}\mathbf{V}.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{V}\nabla S = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

окончательно найдем следующее следствие условия вмороженности силовых линий магнитного поля:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{B}\nabla S}{\rho}\right) = 0, \tag{4}$$

т.е. $\mathbf{B}\nabla S/\rho$ также является величиной, сохраняющейся при движении плазмы.

Полученный результат оказывается весьма полезным для анализа условий существования в плазме движений с однородной деформацией. В частности, для осесимметричного плазменного шнура очевидной сохраняющейся величиной является $S = \varphi$. Так как для движения с однородной деформацией $\rho = \rho_0 a_0^2/a^2$, где a — радиус шнура, то

$$\frac{\mathbf{B}\nabla S}{\rho} = \frac{a^2 B_\varphi}{r\rho_0 a_0^2}. \tag{5}$$

Как нетрудно проверить, r/a является сохраняющейся величиной, поскольку для рассматриваемого класса движений скорость плазмы равна $V_r = \dot{a}r/a$. Поэтому из (4), (5) следует, что aB_φ также является сохраняющейся величиной. Это условие выполняется при $B_\varphi = 2Ir/ca^2$. Таким образом, для цилиндрического плазменного шнура одномерное движение с однородной деформацией возможно в случае однородного распределения плотности тока по сечению шнура.

Прямолинейный шнур эллиптического сечения

Стационарное решение уравнений (1)–(3) для плазменного цилиндра эллиптического сечения с однородным распределением плотности тока j получено в работе [8]

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi j}{c(\lambda^2+1)}\,(-y,\ \lambda^2 x,\ 0), \tag{6}$$

$$p = \frac{1}{2}\rho Q\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{7}$$

Здесь $\lambda = b/a$ (a, b — полуоси сечения шнура), Q — постоянная величина. В этом случае магнитное поле представляет собой суперпозицию удерживающего внешнего магнитного поля квадрупольного типа и магнитного поля, создаваемого плазменным шнуром [9],

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}_0 = k(y,\ x,\ 0), \tag{8}$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{4\pi j}{c(\lambda+1)}\,(-y,\ \lambda x,\ 0). \tag{9}$$

Так как выражения (6), (9) приводят к другой форме представления внешнего поля

$$\mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c}\,\frac{j\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda^2+1)}\,(y,\ x,\ 0), \tag{10}$$

то из сравнения выражений (8), (10) получается следующее соотношение:

$$4\pi j\lambda(\lambda-1) = ck(\lambda+1)(\lambda^2+1). \tag{11}$$

Если соотношение (11) рассматривать как уравнение относительно λ, то это уравнение имеет положительные корни при условии $j \geq j_{\mathrm{cr}} = ck\sqrt{22+10\sqrt{5}}/4\pi$. Таким образом, стационарное состояние плазменного шнура возможно в том случае, когда плотность протекающего по нему тока не меньше критического значения j_{cr}, определяемого градиентом внешнего поля. В противном случае внешнее поле разрывает шнур.

Подставляя (6), (7) в уравнение (3), получим следующее соотношение:

$$a^2 + b^2 = 2h^2, \quad h^2 = \frac{2I^2}{\pi\rho c^2 Q}, \tag{12}$$

где I — сила электрического тока, протекающего по шнуру.

Соотношения (11), (12) позволяют найти размеры поперечного сечения шнура

$$a = h\,\frac{1-\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}, \quad b = a\,\frac{1+\nu}{1-\nu}, \tag{13}$$

где используется обозначение $\nu = kI/\pi\rho cQ$; для определенности считаем $\lambda > 1$.

Автомодельное решение

Для прямолинейного шнура эллиптического сечения плотность плазмы и выражение для ее скорости в случае движения с однородной деформацией зависываются в виде

$$\rho = \rho_0\frac{a_0 b_0}{ab}\,H(1-\xi^2-\eta^2), \quad \mathbf{V} = (\dot{a}\xi,\ \dot{b}\eta,\ 0),$$

где $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ — автомодельные переменные.

Для рассматриваемого класса движений эти переменные являются сохраняющимися величинами $d\xi/dt = d\eta/dt = 0$. Полагая в (4) последовательно $S_1 = \eta$, $S_2 = \xi$, для однородного распределения плотности тока найдем следующие условия:

$$a^2\left[k + \frac{4I}{ac(a+b)}\right] = C_1,$$

$$b^2\left[\frac{4I}{bc(a+b)} - k\right] = C_2, \tag{14}$$

где C_i — постоянные, определяемые из начальных условий.

Из условий (14) следует, что в общем случае движение с однородной деформацией оказывается возможным, если градиент внешнего магнитного поля и сила тока, протекающего по шнуру, зависят от времени

$$k = \frac{1}{a+b}\left(\frac{C_1}{a} = \frac{C_2}{b}\right), \quad I = \frac{c}{4}\left(C_1\frac{b}{a} + C_2\frac{a}{b}\right). \tag{15}$$

Чтобы конкретизировать эти зависимости, необходимо проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается из уравнения Эйлера (3),

$$a\ddot{a} = F, \quad b\ddot{b} = G. \tag{16}$$

Здесь введены обозначения: $F = Q - \mu I C_1$, $G = Q - \mu I C_2$, $\mu = 1/\pi c a_0 b_0 \rho_0$; ток I определяется выражением (15). Аналитическое решение уравнений (16) можно построить в том случае, когда F, G не зависят от времени, т.е. для постоянного значения силы тока, протекающего по шнуру. Как видно из (15), это условие выполняется, если отношение полуосей сечения плазменного шнура $\lambda = b/a$ остается неизменным в процессе движения плазмы.

Движения с однородной деформацией

Пусть при $t = 0$ плазменный шнур находится в стационарном состоянии, т.е. размеры полуосей сечения a_s, b_s определяются выражениями (13), где следует сделать замену $k = k_0$, $\rho = \rho_0$. В случае $F = G = 0$ для зависимости размеров поперечного сечения от времени получается наиболее простой результат

$$a = a_s(1+wt), \quad b = b_s(1+wt), \tag{17}$$

где w — некоторная постоянная величина.

Указанное решение описывает автомодельное движение плазмы, обусловленное изменением градиента внешнего магнитного поля по следующему закону: $k = k_0/(1+wt)^2$. Эта зависимость следует из того, что условие $C_1 = C_2$ приводит к соотношению (11). Соответственно при $w = 0$ выражение (17) переходит в указанное выше стационарное решение уравнений (1)–(3).

Как нетрудно видеть, аналитическое выражение для нелинейного закона изменения поперечных размеров шнура можно получить при выполнении условия $F = \lambda^2 G$. В этом случае λ не зависит от времени, если $a = a_0 f$, $b = b_0 f$, где функция f, как следует из (14), (16) удовлетворяет следующему уравнению:

$$f\ddot{f} = \Gamma. \tag{18}$$

Здесь используются обозначения

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{\lambda a_0 b_0}(1+\lambda^2) - \kappa\right], \quad \kappa = \frac{1}{\pi\rho_0}\left(\frac{2I}{a_0 b_0 c}\right)^2.$$

При положительных значениях Γ уравнение (18) описывает автомодельное расширение плазменного шнура, а при отрицательных — его сжатие, которому может предшествовать некоторое предварительное расширение шнура, если $\dot{f}_0 = u > 0$,

$$t = \tau A\sqrt{\pi}\left[\operatorname{erf}(u\tau) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{u^2\tau^2 - \ln f}\right)\right].$$

Этот результат можно получить из уравнения (18), полагая $\Gamma = -1/2\tau^2$. Максимальное увеличение поперечных размеров шнура характеризуется величиной $f_k = A = \exp(u^2\tau^2)$ и достигается в момент времени $t = t_k = \tau\sqrt{\pi}A\operatorname{erf}(u\tau)$. Затем при $t \geq t_k$ начинается сжатие

$$t = t_k + \tau A\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\sqrt{u^2\tau^2 - \ln f}\right).$$

В случае $\dot{f}_0 = -u \leq 0$ сразу происходит сжатие плазменного шнура

$$t = \tau A\sqrt{\pi}\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{u^2\tau^2 - \ln f}\right) - \operatorname{erf}(u\tau)\right].$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятностей [10]. Полученное решение соответствует следующей зависимости градиента внешнего поля от времени:

$$k = \frac{\sqrt{\pi\kappa\rho_0}}{f^2}\left[\left(1 - \frac{1}{\kappa\tau^2}\right)\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right].$$

Для произвольных начальных условий решение системы дифференциальных уравнений (16) может быть получено с помощью численных методов. Характерной особенностью этой системы уравнений является неустойчивый характер решения. Это проявляется уже на линейной стадии движения. Полагая $a = a_s(1+\alpha)$, $b = b_s(1+\beta)$, из (15) с точностью до членов первого порядка по α, β найдем

$$k = k_0\left[1 - \alpha - \beta - \frac{\gamma}{2\nu}(1 - \nu^2)\right],$$

$$I = I_0\left(1 - \frac{2\nu\gamma}{1+\nu^2}\right), \tag{19}$$

где $\gamma = \alpha - \beta$, $\nu = k_0 I_0/\pi\rho_0 c Q$.

После линеаризации системы (16) для разности относительного изменения размеров полуосей получается следующее уравнение:

$$\ddot{\gamma} = \frac{4\gamma k_0^2}{\pi c\rho_0(1-\nu^2)^2}.$$

Полученный результат показывает, что для рассматриваемой модели плазменный шнур неустойчив относительно движений с однородной деформацией.

Тороидальный шнур эллиптического сечения

Для построения стационарных решений системы уравнений (1)–(3) в случае ограниченной в пространстве аксиально-симметричной конфигурации плазмы используется уравнение Шафранова для магнитных поверхностей [11]. Конкретным примером такого решения является тороидальная конфигурация [12]

$$\psi = \frac{1}{2}\psi_0\left[r^2 z^2 + \frac{\Lambda - 1}{4}(r^2 - R^2)^2\right],$$

где R — радиус магнитной оси; ψ_0, Λ — постоянные, причем

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad B_\varphi = 0,$$

$$B_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad 16\pi^3\frac{dp}{d\psi} = -\Lambda\psi_0. \tag{20}$$

Для тонкого шнура это решение с точностью до членов первого порядка совпадает с приведенными выше результатами для прямолинейного шнура эллиптического сечения. Действительно, вблизи магнитной оси

$$\psi \approx \frac{1}{2}\psi_0 R^2\left[z^2 + (\Lambda - 1)q^2\right],$$

где $q = r - R$; малым параметром является отношение поперечного размера шнура к радиусу магнитной оси.

Далее, полагая $\psi_0 = 8\pi^2 j/cR\Lambda$, $\Lambda = \lambda^2 + 1$, из (20) с принятой точностью найдем

$$B_r = -\frac{4\pi}{c}\frac{jz}{\lambda^2 + 1}, \quad B_z = \frac{4\pi}{c}\frac{j\lambda^2 q}{\lambda^2 + 1}, \tag{21}$$

$$p = \frac{2I^2}{\pi c^2(a^2 + b^2)}\left(1 - \frac{q^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right), \tag{22}$$

что с учетом (12) эквивалентно выражениям (6), (7).

Отметим, что магнитное поле (21) соответствует однородному распределению плотности тока, протекающего по шнуру в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}_\varphi$. Несложно найти выражение для внешнего поля

$$B_{0r} = kz\,\frac{R}{r}, \quad B_{0z} = kR \ln \frac{r}{R},$$

которое с точностью до членов первого порядка совпадает с фигурирующим в (21) удерживающим магнитным полем.

Автомодельное приближение

Автомодельный подход может быть использован для построения приближенного нестационарного решения уравнений (1)–(3) в случае тороидального плазменного шнура эллиптического сечения. Подобная процедура применялась ранее для описания динамики электронного кольца [13].

При отсутствии продольного движения и $B_\varphi = 0$ уравнения (2), (3) для осесимметричного распределения плазмы принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{1}{4\pi\rho}\left(B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial B_z^2}{\partial r}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{24}$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{1}{4\pi\rho}\left(B_r \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{\partial B_r^2}{\partial z}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{25}$$

Для рассматриваемого класса движений тороидального шнура плотность плазмы и выражение для ее скорости записываются в виде

$$\rho = \rho_1 \frac{R}{r} H(1 - \xi^2 - \eta^2), \quad V_r = \dot{a}\xi, \quad V_z = \dot{b}\eta, \tag{26}$$

где $\rho_1 = \rho_0 a_0 b_0 / ab$, $\xi = q/a$, $\eta = z/b$ — автомодельные переменные.

Как нетрудно видеть, с точностью до членов первого порядка для тонкого тороидального шнура с однородным распределением плотности тока можно использовать результаты, полученные ранее для прямолинейного шнура эллиптического сечения. Однако для неустойчивой модели эти результаты применимы только для начальной стадии движения, когда шнур можно считать тонким.

Для построения устойчивой модели тороидального шнура выберем следующее выражение для давления:

$$p = \frac{1}{2}\rho_1 Q \left(1 - q^2 \frac{a_s^2}{a^4} - z^2 \frac{b_s^2}{b^4}\right), \tag{27}$$

которое для стационарного состояния совпадает с (22). Следует отметить, что аналогичное выражение для давления пучка заряженных частиц фигурирует в известной модели Капчинского–Владимирского.

Подставляя (26), (27) в уравнения (24), (25) и учитывая выражения (14), найдем систему уравнений, описывающую изменение размеров поперечного сечения шнура,

$$\ddot{a} = Q\frac{a_s^2}{a^3} - \mu I \frac{C_1}{a}, \quad \ddot{b} = Q\frac{b_s^2}{b^3} - \mu I \frac{C_2}{b}, \tag{28}$$

где, как и ранее, ток I определяется выражением (15).

Аналитические результаты можно получить для малых пульсаций шнура вблизи стационарного состояния. Линеаризуя систему уравнений (28) и используя выражения (19), получим

$$\ddot{\alpha} + \frac{\omega^2}{(1-\nu)^2}[(1 - \nu + \nu^2)\alpha + \nu\beta] = 0, \tag{29}$$

$$\ddot{\beta} + \frac{\omega^2}{(1+\nu)^2}[(1 + \nu + \nu^2)\beta - \nu\beta] = 0, \tag{30}$$

где введно обозначение $\omega^2 = \pi\rho_0(cQ/I_0)^2$.

Решение системы уравнений (29), (30) может быть получено стандартным методом. Вначале вычисляются собственные частоты $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega(1+\nu^2)/(1-\nu^2) \equiv \Omega$, а затем выражения для относительного изменения размеров полуосей

$$\alpha = A_1(1+\nu)^2 \sin \Omega t - A_2 \sin \omega t,$$

$$\beta = A_2 \sin \omega t - A_1(1-\nu)^2 \sin \Omega t.$$

Здесь A_i — постоянные величины

$$A_1 = \frac{1}{4\nu\Omega}\left(\dot{a}_0 + \dot{\beta}_0\right),$$

$$A_2 = \frac{1}{4\nu\omega}\left[\dot{a}_0(1-\nu)^2 + \dot{\beta}_0(1+\nu)^2\right].$$

Как следует из (19), указанное движение с постоянной деформацией обусловлено изменением с течением времени градиента внешнего магнитного поля и тока, протекающего по шнуру,

$$k = k_0\left[1 - A_1\left(4\nu + \frac{1}{\nu} - \nu^3\right) \times \sin \Omega t - A_2\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right)\sin \omega t\right],$$

$$I = I_0\left[1 - 4\nu\left(A_1 \sin \Omega t - \frac{A_2}{1+\nu^2}\sin \omega t\right)\right].$$

Очевидно, что с помощью полученных в этом разделе результатов несложно построить модель прямолинейного плазменного шнура эллиптического сечения, которая будет устойчива относительно движений с однородной деформацией.

Список литературы

[1] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
[2] *Куликовский А.Г.* // ДАН. 1957. Т. 114. № 5. С. 984–987. Там же. 1958. Т. 120. № 5. С. 984–986.
[3] *Яворская И.М.* // ДАН. 1957. Т. 114. № 5. С. 988–990.
[4] *Коробейников В.П.* // ДАН. 1958. Т. 121. № 4. С. 613–615.
[5] *Рязанов Е.В.* // ПММ. 1959. Т. 23. № 1. С. 187–189.
[6] *Ладиков Ю.П.* // ДАН. 1961. Т. 137. № 2. С. 303–306.
[7] *Кролл Н., Трайвелпис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
[8] *Gajewski R.* // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. N 1. P. 70–74.
[9] *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* // Впоросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича, Б.Б. Кадомцева. Вып. 11. М.: Энергоиздат, 1982. С. 118–235.
[10] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
[11] *Шафранов В.Д.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 3(9). С. 710–722.
[12] *Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 2. М.: Госатомиздат. 1963. С. 92–131.
[13] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 103–107.