01;10

О распространении параксиального пучка заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 17 ноября 2000 г.)

Сформулирован метод малоуглового приближения для криволинейного пучка релятивистских частиц в ортогональных однородном магнитном и неоднородном электрическом полях. Получены аналитические решения параксиального уравнения для криволинейных пучков заряженных частиц.

Введение

Необходимость разработки методов расчета движения потоков заряженных частиц во внешних электромагнитных полях обусловлена практическими задачами электронно-ионной оптики, масс-спектрографии и т.д. [1–3]. Одним из методов теоретического анализа динамики пучков заряженных частиц является параксиальная теория, которая позволяет решать задачу определения внешних формирующих электродов для реализации потока требуемой конфигурации, а также рассматривать прямую постановку задачи, когда заданы характеристики внешнего электромагнитного поля, в котором распространяется пучок.

В общем случае, когда ось пучка представляет собой пространственную кривую, уравнения параксиальной теории оказываются достаточно сложными [4]. Как было показано в работе [5] на примере нерелятивистского пучка, более простые выражения получаются для пучков, ось которых является плоской кривой. В данной работе проводится обобщение методического подхода работы [5] для релятивистской задачи. Рассматривается тонкий пучок, для которого отношение поперечных размеров пучка к радиусу его кривизны является малой величиной. В этом случае удается получить аналитические результаты с точностью до членов первого порядка по указанному малому параметру.

Постановка задачи

Для определенности будем считать, что пучок распространяется перпендикулярно оси z в ортогональных неоднородном электрическом поле $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y$ и однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$. Движение пучка удобно рассматривать относительно системы криволинейных координат x, q, ζ

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(s) + q\mathbf{n} + \zeta\mathbf{b}.$$

Кривая $\mathbf{X}(s)$ представляет собой ось сечения пучка в плоскости $z = 0$; координата s — длина траектории осевых частиц от места инжекции пучка; $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \pm\mathbf{e}_z$ — векторы трехгранника Френе, связанного с кривой $\mathbf{X}(s)$. Направление вектора $\mathbf{b}$ зависит от направления внешнего электрического поля.

Положение оси пучка, задаваемое траекторией осевых частиц, определяется решением релятивистского уравнения движения одиночной частицы в рассматриваемом внешнем поле. Подставляя выражение для импульса частицы $\mathbf{p} = mu\mathbf{t}$ в указанное уравнение движения, получим следующие соотношения:

$$muu' = \gamma eE_{01}, \quad k = \frac{\gamma eE_{02}}{mu^2} - \frac{\Omega}{u}. \tag{1}$$

Здесь E_{0i} — составляющие внешнего электрического поля на оси пучка: $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{X}(s)) = E_{01}\mathbf{t} + E_{02}\mathbf{n}$, $\gamma = \sqrt{c^2+u^2}/c$, $\Omega = e\mathbf{b}\mathbf{B}_0/mc$; штрихом обозначается дифференцирование по s. Для определения характеристик криволинейного пучка заряженных частиц, распространяющегося во внешнем электромагнитном поле, необходимо найти уравнение траектории частицы, условия инжекции которой несколько отличаются от начальных условий для осевой частицы. Это отличия заключаются в том, что частица инжектируется на некотором расстоянии от осевой линии и под углом к ней; кроме этого, начальная кинетическая энергия частицы не совпадает с начальной кинетической энергией осевой частицы. Для учета влияния таких эффектов, как тепловой разброс скоростей частиц и многократное упругое рассеяние на молекулах газа, можно использовать кинетическое уравнение в малоугловом приближении [6].

Уравнение траектории

Уравнение траектории заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле можно получить на основе принципа Мопертюи. В релятивистской механике этот принцип записывается в виде [7]

$$\delta\int\left(m\Lambda dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{x}\right) = 0.$$

Здесь $\Lambda = \sqrt{(E-e\Phi)^2/m^2c^2 - c^2}$; E — полная энергия частицы; $\Phi, \mathbf{A}$ — потенциалы внешнего поля; l — длина дуги траектории. Вычисления, аналогичные случаю нерелятивистской частицы в потенциальном поле [8], позволяют найти уравнение траектории

$$m\Lambda\frac{d}{dl}\left(\Lambda\frac{d\mathbf{x}}{dl}\right) = \frac{e}{mc^2}(E-e\Phi)\mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{e}{c}\Lambda\left[\frac{d\mathbf{x}}{dl}\,\mathbf{B}_0\right]. \tag{2}$$

Как нетрудно видеть, величина $m\Lambda(\mathbf{x}(l))$ представляет собой модуль импульса частицы; в частности, для траектории частиц на оси пучка $\Lambda(\mathbf{X}(s)) = u$.

Чтобы получить приближенное уравнение траектории вблизи кривой $\mathbf{X}(s)$, следует представить вектор импульса частицы в следующем виде

$$m\Lambda \frac{d\mathbf{x}}{dl} = mu\big[(1+\lambda)\mathbf{t} + q'\mathbf{n}\big]. \tag{3}$$

Для траектории, расположенной вблизи оси пучка, значение kq, λ будут малыми. Подставляя выражение (3) в уравнение (2) и опуская члены второго порядка малости, найдем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$q'' + \frac{u'}{u}q' + k^2 q + \left(k + \frac{\kappa}{\gamma^2}\right)\lambda = \frac{\gamma e g_2}{mu^2}\,q, \tag{4}$$

$$\lambda' + \Gamma\frac{u'}{u}\lambda = \kappa q' - kq\frac{u'}{u} + \frac{\gamma e g_1}{mu^2}\,q. \tag{5}$$

Здесь введены обозначения: $\kappa = k + \Omega/u$, $\Gamma = 1 + 1/\gamma^2$; g_i — составляющие внешнего электрического поля вблизи кривой $\mathbf{X}(x)$

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = (E_{01} + g_1 q)\,\mathbf{t} + (E_{02} + g_2 q)\,\mathbf{n}.$$

Параксиальное уравнение

Для получения параксиального уравнения в замкнутом виде необходимо найти явный вид функции λ. Как было установлено в предыдущей работе [5], функции g_i имеют вид

$$g_1 = E'_{02} + kE_{01}, \quad g_2 = kE_{02} - E'_{01}. \tag{6}$$

Подстановка выражения (6) для g_1 в уравнение (5) позволяет представить это уравнение в более удобном для интегрирования виде

$$\lambda' + \Gamma\frac{u'}{u}\,\lambda = \frac{\gamma e}{mu^2}\,\frac{d}{dx}\,qE_{02}.$$

Отсюда с учетом соотношений (1) получается следующее выражение для функции λ:

$$\lambda = \kappa q + C\,\frac{\gamma}{u^2},$$

где постоянная $C = u_0^2(\lambda_0 - \kappa_0 q_0)/\gamma_0$.

Подставляя в уравнение (4) полученное выражение для λ и выражение (6) для g_2, в итоге с учетом соотношений (1) найдем

$$q'' + \frac{u'}{u}\,q' + \left(k^2 + \frac{\kappa^2}{\gamma^2} + \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{\gamma^2 u^2}\right) q + \frac{C}{u^2}\left(\gamma k + \frac{\kappa}{\gamma}\right) = 0. \tag{7}$$

Кривизна оси пучка равна $k = \sqrt{X''^2 + Y''^2}$. Таким образом, с точностью до членов первого порядка получено уравнение для траектории частицы, инжектированной в рассматриваемое внешнее электромагнитное поле вблизи кривой $X(s)$. Угол $q'_0 = \alpha$ между направлением инжекции и осью пучка, а также расстояние q_0 от точки инжекции до оси пучка являются начальными условиями для уравнения (7), а начальная кинетическая энергия частицы T определяет входящую в это уравнение постоянную C ($W = \gamma_0 mc^2$ — начальная кинетическая энергия осевой частицы)

$$C = \frac{D}{m}(\lambda_0 - \kappa_0 q_0), \qquad \lambda_0 = \frac{1}{D}(T - W),$$

$$D = W - \frac{m^2c^4}{W}. \tag{8}$$

В общем случае для решения полученного дифференциального уравнения следует использовать численные методы. Аналитические результаты несложно найти в случае пучка с постоянной кривизной оси. Пучки такой конфигурации используются в масс-спектроскопии [3]: в секторном магнитном поле и в электрическом поле цилиндрического конденсатора ось пучка представляет собой отрезок окружности.

Кривизна пучка в секторном магнитном поле $k = 1/R$, где $R = mcu_0/eB_0$ — радиус окружности. Так как в этом случае $\kappa = 0$, а скорость частицы постоянна, то уравнение (7) заметно упрощается

$$q'' + k^2 q + k\lambda_0 = 0. \tag{9}$$

Отсюда для траектории заряженной частицы в секторном магнитном поле найдем

$$q = (q_0 + \lambda_0 R)\cos\psi + R(\alpha\sin\psi - \lambda_0),$$

где $\psi = s/R$.

Для пучка в неоднородном электрическом поле цилиндрического конденсатора $k = \kappa = 1/R$, где R — радиус окружности, по которой движутся осевые частицы с кинетической энергией $W = (A + \sqrt{A^2 + 4m^2c^4})/2$. Здесь постоянная $A = eU/\ln b/a$, где U — напряжение на конденсаторе; a, b — соответственно внутренний и внешний радиусы обкладок конденсатора.

В этом случае уравнение (7) записывается в аналогичном (9) виде

$$q'' + k^2\Gamma[k(q - q_0) + \lambda_0 R] = 0.$$

Решение этого уравнения определяет траекторию релятивистской частицы в поле цилиндрического конденсатора

$$q = q_0 + \lambda_0 R(\cos\psi - 1) + \alpha R_0\sin\psi,$$

где $\psi = s/R_0$, $R_0 = R/\sqrt{2 - A/W}$.

Кинетическое уравнение

Перейдем теперь к формулировке кинетического уравнения

$$\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + e\left(\mathbf{E}_{\mathrm{ext}} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{el} \qquad (10)$$

для криволинейного пучка заряженных частиц. Здесь $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ — функция распределения, I_{el} — интеграл упругих столкновений.

С этой целью запишем уравнение (10) в рассматриваемых криволинейных координатах, полагая $\mathbf{p} = mu[(1+\lambda)\mathbf{t} + \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{b}]$. Для узкого пучка наряду с λ малыми величинами будут и углы α, β. В результате с точностью до членов первого порядка найдем:

$$Lf + \left[\kappa\alpha - (\lambda\Gamma + kq)\frac{u'}{u} + \frac{e\gamma g_1}{mu^2 q}\right]\frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

$$+\left[\frac{e\gamma g_2}{mu^2}q - k^2 q - \left(k + \frac{\kappa}{\gamma^2}\right)\lambda - \alpha\frac{u'}{u}\right]\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad (11)$$

где χ^2 — средний квадрат угла рассеяния на единице пути,

$$L = \frac{\partial}{\partial s} + \alpha\frac{\partial}{\partial q} + \beta\frac{\partial}{\partial \zeta} - \beta\frac{u'}{u}\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\chi^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right).$$

Для упрощения уравнения (11) следует перейти от λ к новой переменной $\mu = (\lambda - \kappa q)u^2/\gamma$. Тогда с учетом соотношений (1), (6) окончательно найдем кинетическое уравнение для криволинейного параксиального пучка релятивистских частиц

$$Lf - \left[\alpha\frac{u'}{u} + \left(k^2 + \frac{\kappa^2}{\gamma^2} + \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{\gamma^2 u^2}\right)q\right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{u^2}\left(k\gamma + \frac{\kappa}{\gamma}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \qquad (12)$$

Аналитическое решение уравнения (12) можно получить для рассмотренных выше примеров пучка с постоянной кривизной; в частности, для построения функции Грина можно использовать предложенный в работе [5] метод.

Параметрическое представление

Обратимся вновь к параксиальному уравнению. В качестве продольной переменной вместо s можно использовать собственное время движения осевой частицы

$$\tau = \int_0^{\pi}\frac{dx}{u(x)},$$

т. е. перейти к параметрическому представлению ее траектории. Тогда уравнение (7) запишется в следующем виде (точкой обозначается дифференцирование по τ):

$$\ddot{q} + \left[\left(2k^2 + \frac{\kappa^2}{\gamma^2}\right)u^2 + \frac{\mathbf{u}\dot{\mathbf{w}}}{u^2} - \left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{w}}{\gamma uc}\right)^2\right]q$$

$$+ C\left(\gamma k + \frac{\kappa}{\gamma}\right) = 0. \qquad (13)$$

Здесь используются обозначения $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{X}}$, $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{u}}$; соответственно в этих обозначениях выражение для кривизны траектории принимает вид $k^2 = [\mathbf{u}\mathbf{w}]^2/u^6$.

Для однородного электромагнитного поля $\mathbf{u}\dot{\mathbf{w}} - (\mathbf{u}\mathbf{w}/\gamma c)^2 = ku\Omega$ и уравнение (12) принимает более компактный вид

$$\ddot{q} + \left(k^2 + k\kappa + \frac{\kappa^2}{\gamma^2}\right)u^2 q + C\left(\gamma k + \frac{\kappa}{\gamma}\right) = 0. \qquad (14)$$

Уравнения (13), (14) следует решать вместе с уравнением движения осевой частицы

$$m\mathbf{w} = e\gamma\mathbf{E}_{\mathrm{ext}} + \frac{e}{c}[\mathbf{u}\mathbf{B}_0].$$

Для нерелятивистских частиц $\gamma = 1$ величина u равна скорости осевой частицы v, а параметр τ совпадает с временем ее движения. В связи с этим уравнение (13) принимает более простой вид

$$\ddot{q} + \left[(2k^2 + \kappa^2)v^2 + \frac{\mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}}}{v^2}\right]q + C(k + \kappa) = 0, \qquad (15)$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}}$; точкой теперь обозначается дифференцирование по времени.

Соответственно, изменяется и выражение для кривизны траектории $k^2 = [\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2/v^6$.

Полагая $T = mc^2 + K$, $W = mc^2 + K_0$, из выражений (8) для постоянной C в нерелятивистском пределе найдем

$$C = \frac{2K_0}{m}(\lambda_0 - \kappa_0 q_0), \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{K_0} - 1\right).$$

Уравнение (15) следует дополнить уравнением движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}_{\mathrm{ext}} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0].$$

Пучок в электрическом поле

Решение уравнения (15) можно построить для пучков в однородных полях, когда $\ddot{\mathbf{v}} = 0$. В однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_y$ ось сечения пучка представляет собой отрезок параболы

$$Y = wX^2/2v_0^2\sin^2\Phi - X\,\mathrm{ctg}\,\phi.$$

Здесь $X = v_0 t\sin\phi$, $w = eE_0/m$, ϕ — угол между вектором электрического поля и направлением инжекции осевых частиц с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{2K_0/m}$, а также используется параметрическое представление продольной координаты

$$s = \frac{1}{2w}\Bigg[v(wt - v_0\cos\phi) + v_0^2\left(\cos\phi + \sin^2\phi\ln\frac{wt - v_0\cos\phi + v}{v_0(1-\cos\phi)}\right)\Bigg],$$

где $v = \sqrt{v_0^2 + wt(wt - 2v_0\cos\phi)}$ — скорость осевых частиц.

В данном случае кривизна оси пучка равна $k = \kappa = wv_0\sin\phi/v^3$, поэтому уравнение (15) принимает вид

$$\ddot{q} + 3v_0^2\sin^2\phi\,\frac{w^2}{v^4}q = Q,\quad Q = -2Cw\sin\phi\,\frac{v_0}{v^3}. \tag{16}$$

Решение уравнения (16) можно построить с помощью метода вариации постоянной [9]. Для этого нужно вначале найти функции q_1, q_2, которые представляют собой два независимых решения соответствующего (16) однородного дифференциального уравнения. Как несложно проверить, эти функции удовлетворяют следующему условию:

$$q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1q_2 = C_0, \tag{17}$$

где C_0 — некоторая постоянная.

Затем решение неоднородного уравнения вычисляется с помощью функций q_1, q_2

$$q = q_1\left(C_1 - \frac{1}{C_0}\int q_2Q\,dt\right) + q_2\left(C_2 + \frac{1}{C_0}\int q_1Q\,dt\right).$$

Постоянные C_i определяются начальными условиями.

Одно из решений соответствующего (16) однородного уравнения следует искать в виде степенной зависимости от v, что дает $q_1 = v - 2v_0^2\sin^2\phi/v$. Используя условие (17), найдем второе независимое решение $q_2 = (wt - v_0\cos\phi)/v$. В итоге для пучка в электрическом поле получается следующий результат:

$$q = \frac{1}{v}\big[(q_0 + \alpha v_0 t)(v_0 - wt\cos\phi) - \lambda_0 v_0 wt^2\sin\phi\big].$$

Пучок в ортогональных полях

Траекторией нерелятивистской заряженной частицы в ортогональных однородных электрическом и магнитном полях является трохоида

$$X = Vt - \frac{1}{\omega}\sin\psi\big[V\cos\phi - v_0\sin(\psi+\phi)\big],$$

$$Y = \frac{1}{\omega}\big[v_0\cos(\psi+\phi) + V\sin\psi\big].$$

Здесь введены обозначения: $V = cE_0/B_0$, $\psi = \omega t$, $\omega = eB_0/2mc$. Как и в предыдущей задаче, ϕ — угол между вектором электрического поля и направлением инжекции частиц. Связь между s и t может быть представлена через эллиптический интеграл 2-го рода и для краткости не приводится.

Отсюда следует, что скорость осевой частицы определяется следующим выражением

$$v^2 = v_0^2 + 4V\sin\psi\big[V\sin\psi + v_0\cos(\psi+\phi)\big].$$

Кривизна оси пучка равна $k = \omega(1+\rho)/v$, где введено обозначение $\rho = v_0(v_0 - 2V\sin\phi)/v^2$.

В результате уравнение (15) для пучка в ортогональный полях записывается в следующем виде:

$$\ddot{q} + \omega^2(1+3\rho^2)q + 2\rho\omega\,\frac{v_0^2}{v}\left(\lambda_0 + 2q_0\omega\,\frac{V}{v_0^2}\sin\phi\right) = 0. \tag{18}$$

К сожалению, для произвольного значения начальной скорости осевых частиц аналитическое решение уравнения (18) получить не удается. Исключение составляет частный случай $v_0 = 2V\sin\phi$, когда ось пучка представляет собой отрезок циклоиды

$$X = Vt + \frac{V}{2\omega}\big[\sin 2\phi - \sin 2(\psi+\phi)\big],$$

$$Y = \frac{V}{2\omega}\big[\cos 2\phi - \cos 2(\psi+\phi)\big].$$

Характерной особенностью движения частицы вблизи оси пучка в этом случае является то, что ее траектория не зависит от начальной энергии

$$q = q_0\cos\psi + 2\alpha\frac{V}{\omega}\sin\phi\sin\psi,$$

где $\psi = \arccos(\cos\phi - 2\omega s/V) - \phi$.

Практическая значимость разработанного методического аппарата заключается в возможности оценки параметров криволинейного пучка релятивистских частиц, распространяющегося во внешнем электромагнитном поле. Эти оценки будут применимы в той области, где еще не происходит заметного утолщения пучка вследствие влияния таких факторов, как разброс скоростей частиц и многократное упругое рассеяние на молекулах газа.

Список литературы

[1] *Кельман В.М., Явор С.Я.* Электронная оптика. М.: Наука, 1968.
[2] *Молоковский С.И., Сушков А.Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
[3] *Джейрам Р.* Масс-спектроскопия. М.: Мир, 1969.
[4] *Сыровой В.А.* // РЭ. 1993. Т. 37. № 9. С. 1692–1702.
[5] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 90–94.
[6] *Hughes T.P., Godfrey B.B.* // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. N 6. P. 1531–1537.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973.
[9] *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. С. 15.