Краткие сообщения

01;05;09

Поглощение электромагнитного излучения металлической частицей цилиндрической формы

© Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов

Московский педагогический университет,
107005 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 25 января 2001 г.)

Проведено вычисление сечения поглощения электромагнитного излучения в металлической частице цилиндрической формы. Расчет выполнен в низкочастотном пределе, когда вклад вихревых токов в поглощение доминирует, и для сравнительно мелких частиц (радиусом $\sim 10\,\mathrm{nm}$), что позволяет пренебречь скин-эффектом. Подробно рассмотрен случай, когда длина свободного пробега электронов в объеме металла значительно превышает радиус цилиндрической частицы. Произведено сравнение удельных сечений поглощения сферической и цилиндрической частиц.

Введение

Электромагнитные свойства малых металлических частиц могут существенно отличаться от свойства массивных образцов металла [1]. Если линейный размер R образца металла будет порядка Λ — длины свободного пробега электронов или меньше ее $R < \Lambda$, то взаимодействие электронов с границей металлического образца начинает оказывать заметное влияние на их отклик на внешнее электромагнитное поле. Следствием этого и являются особые оптические свойства образца (металлической частицы). Поэтому, когда выполняется условие $R < \Lambda$, одна из основных оптических характеристик — сечение поглощения обнаруживает нетривиальную зависимость от отношения R/Λ. При комнатной температуре в металлах с хорошей проводимостью (алюминий, медь, серебро и др.) длина свободного пробега электронов Λ лежит в следующих характерных пределах: $10-100\,\mathrm{nm}$. Размеры же экспериментально исследуемых частиц достигают нескольких nm, т.е. ситуация $R < \Lambda$ реализуется.

В качестве аппарата, способного описывать отклик электронов на внешнее электромагнитное поле с учетом взаимодействия электронов с границей образца, может быть использована стандартная кинетическая теория электронов проводимости в металле [2]. В этом случае ограничения на соотношение между длиной свободного пробега электронов и размером образца не накладываются.

Уравнения макроскопической электродинамики применимы лишь в случае "массивных" образцов: $R \gg \Lambda$. Поэтому известная теория Ми, которая описывает взаимодействие электромагнитной волны с металлическими телами в рамках макроскопической электродинамики, непригодна для описания упомянутого размерного эффекта.

В работах [3,4] была построена теория взаимодействия электромагнитного излучения с сферической частицей. Немного ранее в предельном случае $R \ll \Lambda$ на низких частотах (дальний ИК диапазон) результат, совпадающий с [3,4], получен в работах [5,6]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле. Альтернативный подход к проблеме предложен и развивается в работах [7,8]. В последнее время возрос интерес к проблеме взаимодействия электромагнитного излучения с несферическими частицами [9]. Отметим также работы, в которых предпринята попытка учета квантово-механических эффектов в данной проблеме, что особенно существенно при низких температурах [10–12].

В настоящей работе кинетическим методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов проводимости в металлическом цилиндре на переменное магнитное поле плоской электромагнитной волны. Особое внимание уделено случаю, когда длина свободного пробега электронов существенно превышает радиус цилиндра (свободно-электронный режим) $R \ll \Lambda$. По найденной функции распределения удается рассчитать зависимость сечения поглощения от радиуса и частоты и сравнить с сечением поглощения сферической частицы.

Математическая модель и расчет

Рассматривается цилиндрическая частица немагнитного металла радиуса R и длины L ($L \gg R$) в поле плоской электромагнитной волны частоты ω, которая ограничена сверху частотами ближнего ИК диапазона ($\omega < 2\cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$). Принимается, что направление магнитного поля в электромагнитной волне совпадает с осью цилиндра. Неоднородность внешнего поля волны и скин-эффект не учитываются (предполагается, что $R < \sigma$ — глубины скин-слоя). В рассматриваемом диапазоне частот вклад токов дипольной электрической поляризации будет мал по сравнению с вкладом вихревых токов, которые индуцируются внешним магнитным полем волны [3]. Поэтому действие внешнего электрического поля волны не учитывается.

Также используются общепринятые физические допущения: электроны проводимости рассматриваются как вырожденный ферми-газ и описывается их отклик на внешнее переменное магнитное поле с помощью уравнения Больцмана в приближении времени релаксации. В граничных условиях принято, что отражение электронов от внутренней поверхности цилиндра происходит диффузно (т. е. электрон может отразиться под любым углом от 0 до 90 градусов с равной вероятностью).

Опираясь на перечисленные выше допущения, процесс поглощения энергии электромагнитной волны можно описать следующим образом: однородное периодическое по времени магнитное поле волны $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$ вызывает появление в частице вихревого электрического поля. Оно в силу симметрии задачи определяется из уравнения индукции Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1}$$

и может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c}\left[\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = \frac{\omega}{2ic}[\mathbf{r}, \mathbf{H}_0]\exp(-i\omega t), \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы), c — скорость света.

Вихревое электрическое поле воздействует на электроны проводимости в частице и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской f_0

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2}, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ и m — скорость и масса электрона.

Это приводит к возникновению вихревого тока

$$\mathbf{j} = e\int \mathbf{v} f\,\frac{2d^3(m\mathbf{v})}{h^3} = 2e\left(\frac{m}{h}\right)^3\int \mathbf{v} f_1 d^3v \tag{4}$$

(h — постоянная Планка, e — заряд электрона), а также к диссипации в объеме частицы энергии. Энергия $\bar{Q}$, диссипируемая в единицу времени, равна [13]

$$\bar{Q} = e\int \overline{\operatorname{Re}\mathbf{E}(\operatorname{Re}\mathbf{j})}d^3r = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int \mathbf{j}\mathbf{E}^* d^3r. \tag{5}$$

Здесь чертой обозначено усреднение по времени, а звездочкой — комплексное сопряжение. В формуле (4) используется стандартная нормировка функции распределения f, при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$. Для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация [14]

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_f, \\ 0, & \varepsilon_f < \varepsilon, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varepsilon_f = (mv_f^2)/2$ — энергия Ферми.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1, функции распределения, от равновесной f_0, возникающего под действием вихревого поля (2). В линейном приближении по внешнему полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [2,14]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v}\mathbf{E})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \tag{7}$$

где предполагается стационарная зависимость от времени $(f_1 \sim \exp(-i\omega t))$, а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации

$$(df_1/dt)_{\mathrm{col}} = -\frac{f_1}{\tau}, \tag{8}$$

где τ — электронное время релаксации.

Для однозначного определения функции f_1 необходимо задать для нее граничное условие на цилиндрической поверхности частицы. В качестве такового принимаем условие диффузного отражения электронов от поверхности [2]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |r_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}_\perp$ — соответственно проекции радиус-вектора электрона $\mathbf{r}$ и его скорости $\mathbf{v}$ на плоскость перпендикулярную оси цилиндра.

Решая уравнение (7) методом характеристик [15], получаем

$$f_1 = A\big(\exp(-\nu t') - 1\big)/\nu, \quad t' \ge 0, \tag{10}$$

где

$$\nu = 1/\tau - i\omega,$$

$$A = e(\mathbf{v}\mathbf{E})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \frac{e\omega}{2ic}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right)[\mathbf{v}, \mathbf{r}]\mathbf{H}_0\exp(-i\omega t). \tag{11}$$

Причем ν и A постоянны вдоль траектории (характеристики). Параметр t' имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы до точки $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$ и определяется как

$$t' = \left\{\mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp + [(\mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp)^2 + (R^2 - r_\perp^2)v_\perp^2]^{1/2}\right\}/v_\perp^2. \tag{12}$$

Это ясно из следующих геометрических соображений. Используя очевидное векторное равенство $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t'$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор электрона в момент отражения от границы частицы, и проектируя его на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, имеем $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t'$, где векторы $\mathbf{r}_\perp$, $\mathbf{r}_{0\perp}$ и $\mathbf{v}_\perp$ являются компонентами исходных векторов в плоскости проекции. Возводя обе части последнего равенства в квадрат и разрешив полученное уравнение относительно t', приходим к формуле (12).

Соотношениями (10)–(12) полностью определено решение f_1 уравнения (7) с граничным условием (9), что позволяет рассчитать ток (4) и диссипируемую мощность (5).

При вычислении интегралов (4), (5) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат ($r_\perp, \alpha, r_z$; полярная ось–ось Z; вектор $\mathbf{H}_0$ параллелен оси Z), так и в пространстве скоростей ($v_\perp, \varphi, v_z$; полярная ось–ось $v_\perp$). Ось цилиндра совпадает с осью Z. Поле (2) в цилиндрических координатах имеет лишь φ-компоненту

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} r_\perp H_0 \exp(-i\omega t). \tag{13}$$

Соответственно и ток (4) обладает лишь φ-компонентой (линии тока являются замкнутыми окружностями с центрами на оси Z в плоскостях, перпендикулярных оси Z)

$$j_\varphi = 2e\left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{1}{\nu}\int v_\varphi e(\mathbf{vE})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\big(\exp(-\nu t) - 1\big)d^3v$$

$$= E_\varphi 2e^2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{1}{\nu}\int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f)\big(1 - \exp(-\nu t)\big)d^3v$$

$$= E_\varphi 2e^2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{1}{\nu}\left(\frac{2}{m}\right)\int\limits_0^{v_f}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} v_\perp^2 \sin^2\varphi\,\delta$$

$$\times\left(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_z^2}\right)\frac{1}{\sqrt{v_f^2 - f_\perp^2}}\big(1 - \exp(-\nu t)\big)v_\perp dv_\perp d\varphi dv_z$$

$$= E_\varphi 2e^2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{1}{\nu}\left(\frac{2}{m}\right)\int\limits_0^{v_f}\int\limits_0^{2\pi}\frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}}$$

$$\times\big(1 - \exp(-\nu t)\big)\sin^2\varphi\, dv_\perp d\varphi. \tag{14}$$

Действительно, воспользовавшись свойствами δ-функции, имеем

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon_f) = \frac{2}{m}\delta(v_z^2 + v_\perp^2 - v_f^2) = \frac{2}{m}\delta[v_z^2 - (v_f^2 - v_\perp^2)]$$

$$= \frac{2}{m}\delta\left[\left(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}\right)\left(v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{m\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}}\left[\delta\left(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}\right)\right.$$

$$\left. + \delta\left(v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}\right)\right].$$

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, и результат удваивается. Преобразуем выражение (12), введя обозначение $\xi = r_\perp/R$ и пользуясь тем, что $\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp = r_\perp v_\perp \cos\varphi$. Получаем

$$t' = R\left(\xi\cos\varphi + \sqrt{1 - \xi^2\sin^2\varphi}\right)/v_\perp.$$

Введем новые переменные

$$\eta = \xi\cos\varphi + \sqrt{1 - \xi^2\sin^2\varphi} \text{ и } z = \frac{R}{v_f}\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right). \tag{15}$$

Тогда выражение (14) принимает вид

$$j_\varphi = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 e^2 E_\varphi \frac{2}{m\nu}\int\limits_0^{v_f}\int\limits_0^{2\pi}\frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}}$$

$$\times\left(1 - \exp\left(-\frac{\eta z v_f}{v_\perp}\right)\right)\sin^2\varphi\, dv_\perp d\varphi. \tag{16}$$

В дальнейшем подробно остановимся на случае, когда частота поля ω и частота столкновений электронов в объеме металла $(1/\tau)$ низки по сравнению с частотой столкновения электронов с поверхностью частицы. Другими словами, рассмотрим случай $|z| \ll 1$. Тогда выражение для тока j_φ можно представить в виде

$$j_\varphi = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 e^2 E_\varphi \frac{2}{m\nu}\int\limits_0^{v_f}\int\limits_0^{2\pi}\frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}}$$

$$\times\frac{\eta z v_f}{v_\perp}\sin^2\varphi\, dv_\perp d\varphi. \tag{17}$$

По формуле (5) находим теперь среднюю диссипируемую мощность Q и, разделив ее на средний поток энергии в волне $cH_0^2/8\pi$, получаем сечение поглощения σ

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi}{cH_0^2}\right)\int \mathrm{Re}(j_\varphi E_\varphi^*)d^3r = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi}{cH_0^2}\right)2\left(\frac{m}{h}\right)^3$$

$$\times e^2\left(\frac{i\omega}{2c}\right)H_0\exp(-i\omega t)\frac{2}{m\nu}zv_f\left(-\frac{i\omega}{2c}\right)H_0\exp(-i\omega t)$$

$$\times\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^L r_\perp^3 dr_\perp d\alpha dr_z\left[\int\limits_0^{v_f}\int\limits_0^{2\pi}\frac{v_\perp^2}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}}\eta\sin^2\varphi\, dv_\perp d\varphi\right]$$

$$= \frac{2\pi^3 m^2 e^2\omega^2 L v_f^2 R^5}{h^3 c^3}\int\limits_0^1 \xi^3 d\xi\int\limits_0^{2\pi}\eta\sin^2\varphi\, d\varphi. \tag{18}$$

Интеграл (18) вычисляется в явном виде. Для этого во внутреннем интеграле производится замена переменной интегрирования $\varphi \to \eta$ по формуле (15), из которой следует, что

$$\cos\varphi\frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{2\eta\xi}, \quad d(\cos\varphi) = \frac{\eta^2 - \xi^2 + 1}{2\eta^2\xi}d\eta. \tag{19}$$

В результате сечение поглощения σ можно вычислить следующим образом:

$$\sigma = \frac{2\pi^3 m^2 e^2 \omega^2 L v_f^2 R^5}{h^3 c^3} \int\limits_0^1 \xi^3 d\xi \int\limits_0^{2\pi} \Big(\xi\cos\varphi + \sqrt{1-\xi^2\sin^2\varphi}\Big)\sin^2\varphi d\varphi = \frac{2\pi^3 m^2 e^2 \omega^2 L v_f^2 R^5}{h^3 c^3}$$

$$\times \int\limits_0^1 \xi^3 d\xi \Big[\int\limits_0^{\pi} \Big(\xi\cos\varphi + \sqrt{1-\xi^2\sin^2\varphi}\Big)\sin^2\varphi d\varphi$$

$$+ \int\limits_{\pi}^{2\pi} \Big(\xi\cos\varphi + \sqrt{1-\xi^2\sin^2\varphi}\Big)\sin^2\varphi d\varphi\Big]$$

$$= \frac{2\pi^3 m^2 e^2 \omega^2 L v_f^2 R^5}{h^3 c^3} \int\limits_0^1 \xi^3 d\xi$$

$$\times \Big[\int\limits_{1-\xi}^{1+\xi} \eta \sqrt{1 - \frac{(\xi^2+\eta^2-1)^2}{4\eta^2\xi^2}} \Big(\frac{\eta^2-\xi^2+1}{2\eta^2\xi}\Big) d\eta$$

$$+ \int\limits_{1+\xi}^{1-\xi} \eta \sqrt{1 - \frac{(\xi^2+\eta^2-1)^2}{4\eta^2\xi^2}} \Big(\frac{\eta^2-\xi^2+1}{2\eta^2\xi}\Big) d\eta\Big]. \quad (20)$$

Далее изменяется порядок интегрирования

$$\int\limits_0^1 d\xi \Big[\int\limits_{1-\xi}^{1+\xi} d\eta(\ldots) + \int\limits_{1+\xi}^{1-\xi} d\eta(\ldots)\Big]$$

$$= 2\Big[\int\limits_0^1 d\eta \int\limits_{1-\eta}^1 d\xi\xi^3(\ldots) + \int\limits_1^2 d\eta \int\limits_{\eta-1}^1 d\xi\xi^3(\ldots)\Big]$$

$$= 2\int\limits_0^2 d\eta \int\limits_{\eta-1}^1 d\xi\xi^3(\ldots). \quad (21)$$

Поскольку

$$\int\limits_{\eta-1}^1 d\xi\xi^3(\ldots) = \int\limits_{1-\eta}^1 d\xi\xi^3(\ldots) = \frac{\eta(4-\eta^2)^{3/2}}{24},$$

то имеем

$$\sigma = \frac{4\pi^3 m^2 e^2 \omega^2 L v_f^2 R^5}{h^3 c^3} \int\limits_0^2 \frac{(4-\eta^2)^{3/2}\eta}{24}$$

$$= \frac{16\pi^3 m^2 e^2 \omega^2 L v_f^2 R^5}{15 h^3 c^3},$$

а так как концентрация электронов в металле

$$n = 2\Big(\frac{m}{h}\Big)^3 \frac{4\pi v_f^3}{3},$$

то

$$\sigma = \frac{2\pi^2 e^2 L R^5 n \omega^2}{5 c^3 m v_f}. \quad (22)$$

Обсуждение результатов

Классическое сечение поглощения для цилиндра вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{\mathrm{I}1} = \frac{1}{2}\frac{8\pi}{cH_0^2}\int \mathrm{Re}(j_\varphi E_\varphi^*) d^3r = \frac{1}{2}\frac{8\pi}{cH_0^2}\int (\Sigma_0 E_\varphi)(E_\varphi^*) d^3r$$

$$= \frac{1}{2}\frac{8\pi}{cH_0^2}\Sigma_0 \frac{i\omega}{2c} H_0 \exp(-i\omega t)\frac{(-i\omega)}{2c} H_0 \exp(-i\omega t)$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^L r_\perp^3 dr_\perp d\alpha dr_z = \frac{\pi \Sigma_0 \omega^2 R_1^4 2\pi L}{4mc^3}$$

$$= \frac{\pi^2 e^2 n R_1^4 \tau L \omega^2}{2mc^3}. \quad (23)$$

Мы учли, что $\Sigma_0 = (e^2 n\tau)/m$ — статическая проводимость металла.

Сравним сечения поглощения цилиндра, рассчитанные классическим способом и с помощью кинетического метода. Имеем

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{\mathrm{I}1}} = \frac{4R_1}{5\tau v_f}. \quad (24)$$

По аналогии легко вычисляется и классическое сечение поглощения для шара

$$\sigma_{\mathrm{I}2} = \frac{8\pi^2 e^2 n\tau R_2^5 \omega^2}{15mc^3}. \quad (25)$$

Найдя отношение удельных (на единицу объема) классических сечений поглощения цилиндра и шара, если их радиусы равны, получаем

$$\frac{\sigma_{\mathrm{I,II},1}}{\sigma_{\mathrm{I,II},2}} = 1.25. \quad (26)$$

Сравним поглощение сферической и цилиндрической частиц в низкотемпературном случае. Оценки для сферической частицы можно получить, используя работу [3],

$$\sigma_{\mathrm{II}1} = \frac{2\pi n e^2 R_1^3 \omega^2}{5mc^3 v_f}, \quad \sigma_{\mathrm{II}2} = \frac{\pi n e^2 R_2^3 \omega^2}{5mc^3 v_f}. \quad (27)$$

Найдя отношение удельных сечений поглощения цилиндра и шара (если их радиусы равны), имеем

$$\frac{\sigma_{\mathrm{II}1}}{\sigma_{\mathrm{II}2}} = 1.6. \quad (28)$$

Таким образом, точный кинетический расчет дает существенную поправку к классическому результату.

Список литературы

[1] *Морохов И.Д., Петинов В.И., Трусов Л.И.* и др. // УФН. 1981. Т. 133. 653 с.
[2] *Займан Дж.* Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. Гл. 11.
[3] *Лесскис А.Г., Пастернак В.Е., Юшканов А.А.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 1. С. 310–317.
[4] *Лесскис А.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // Поверхность. 1987. № 11. С. 115–121.
[5] *Trodahl H.J.* // Phys. Rev. 1979. Vol. B. 19. P. 1316–1317.
[6] *Trodahl H.J.* // J. Phys. C. 1982. Vol. 15. P. 7245–7254.
[7] *Бондарь Е.А.* // Опт. и спектр. 1983. Т. 75. Вып. 4. С. 837–840.
[8] *Бондарь Е.А.* // Опт. и спектр. 1996. Т. 80. № 1. С. 89–95.
[9] *Томчук П.М., Томчук Б.П.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. Вып. 2(8). С. 661–678.
[10] *Kubo R.J.* // Phys. Soc. Jap. 1962. Vol. 17. P. 975.
[11] *Горьков Л.П., Элиашберг Г.М.* // ЖЭТФ. 1955. Т. 48. С. 1407.
[12] *Лушников А.А., Максименко В.В., Симонов А.Я.* Диспергированные металлические пленки. Киев: Изд-во АН УССР, 1976. С. 72.
[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
[14] *Харрисон У.* Теория твердого тела. М.: Мир, 1972.
[15] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. Гл. 2.