01

К теории гидродинамических явлений в квазиодномерных системах

© С.О. Гладков

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет), 117454 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 18 декабря 2000 г. В окончательной редакции 7 марта 2001 г.)

Показано, как с помощью принципа наименьшего действия можно получить уравнение Навье–Стокса для описания гидродинамических свойств структур в d_F-мерной среде. На примере квазиодномерного течения проанализировано решение приведенных уравнений.

Ранее (см., например, работы [1,2]) был намечен путь исследования диссипативных свойств сильно неоднородных структур с использованием гепотетической аналогии между подобными структурами и однородными, но в некотором геометрическом пространстве, в котором основная матрица имеет размерность $d_F = d + \varepsilon$, где $d = 1, 2, 3$, с величиной ε, зависящей от свойств наполнителя. При этом предполагалось, что ее свойства можно описывать в эквивалентном виде, заменяя формально пространство размерности d_F на некоторое метрическое риманово пространство с отличными от единицы компонентами метрического тензора.

Настоящая работа является логическим продолжением намеченной темы исследования и посвящена гидродинамическому описанию движения жидкостей и газов в пространствах с дробной размерностью подобно тому, как это было сделано в работе [1] для описания процесса теплопроводности в квазиодномерных структурах.

Для вывода соответствующих уравнений гидродинамики в произвольном пространстве размерности d_F мы поступим следующим образом. Как известно [3], уравнение Навье–Стокса имеет вид

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla P + \eta\Delta\mathbf{v} + \zeta \,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}, \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости; P — давление; $\mathbf{v}$ — скорость перемещения данного элемента жидкости, причем $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$; η, ζ — соответственно первая и вторая вязкости.

В любом пространстве скалярные величины ρ, η, ζ, P остаются инвариантными, чего нельзя сказать о векторах. Для d_F-мерного пространства градиент давления с помощью операции дробного дифференцирования можно представить как $\mathbf{A}P$, где оператор дробного дифференцирования $\mathbf{A}$ в d_F-мерном пространстве определяется по правилу [4]

$$A_\alpha f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ik_\alpha)^{1+\varepsilon} f_k e^{ikx} d^3k/(2\pi)^3. \tag{2}$$

Здесь индекс α отвечает трем компонентам x, y, z. Из определения (2) следует, что оператор $\mathbf{A}$ является линейным оператором, обладающим соответствующей нормой. Сумма двух последних слагаемых в (1) может быть получена путем взятия вариационной производной от функционала

$$L\{v\} = -(1/2)\int \left[K_1(\partial v_i/\partial x_k)^2 + K_2(\partial v_i/\partial x_i)^2\right] d^3x, \tag{3}$$

где K_1, K_2 — константы.

Если определить уравнение Навье–Стокса как

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla P + \gamma\delta L/\delta\mathbf{v}, \tag{4}$$

где γ — феноменологический диссипативный коэффициент, то получим уравнение (1) с

$$\eta = \gamma K_1, \quad \zeta = \gamma K_2. \tag{5}$$

Гипотетически было предположено [4], что пространство дробной размерности d_F эквивалентно (изоморфно) некоторому непрерывному риманову пространству с определенной метрикой. В связи с этим предположением мы заменим выражение (3) на

$$L\{v\} = -(1/2)\int \left[K_1 v^i_k v^k_i + K_2 (v^i_i)^2\right] g^{1/2} d^3x, \tag{6}$$

где g — определитель метрического тензора данного метрического пространства (см. ниже), v^i_k — есть k-я ковариантная производная от скорости $\mathbf{v}$.

Поскольку $v^i_k = \partial v^i/\partial x^k + \Gamma^i_{ks} v^s$, где Γ^i_{ks} — символ Кристоффеля, то (6) дает

$$L\{v\} = -(1/2)\int \Big\{K_1 \left(\partial v^i/\partial x^k + \Gamma^i_{ks}v^s\right)\left(\partial v^k/\partial x^i + \Gamma^k_{is}v^s\right) + g^{-1}K_2\left[(\partial/\partial x^i)(g^{1/2}v^i)\right]^2\Big\} g^{1/2} d^3x. \tag{7}$$

Варьируя (7) по v^i, имеем

$$\delta L = \int \Big\{K_1(\partial/\partial x^k)\left[g^{1/2}\left(\partial v^k/\partial x^i + \Gamma^k_{is}v^s\right)\right]\delta v^i - K_1\Gamma^k_{is}\left(\partial v^s/\partial x^k + \Gamma^s_{kp}v^p\right)\delta v^i g^{1/2} + K_2(\partial/\partial x^i)\left[(1/g^{1/2})(\partial/\partial x^k)(g^{1/2}v^k)\right]\delta v^i g^{1/2}\Big\} d^3x.$$

Следовательно, уравнение (4) приводится к такому

$$\rho g_{is}\left[\partial v^s/\partial t + v^k\left(\partial v^s/\partial x^k + \Gamma^s_{kp}v^p\right)\right]$$
$$- \mathbf{A}_i P + \eta(\partial/\partial x^k)\left[g^{1/2}\left(\partial v^k/\partial x^i + \Gamma^k_{is}v^s\right)\right]$$
$$- \eta\Gamma^s_{ik}\left(\partial v^k/\partial x^s + \Gamma^k_{sp}v^p\right)g^{1/2}$$
$$+ \zeta g^{1/2}(\partial/\partial x^k)\left[(1/g^{1/2})(\partial/\partial x^k)(g^{1/2}g_{is}v^s)\right]. \quad (8)$$

Чтобы система уравнений была полной, к полученному уравнению следует добавить уравнение непрерывности

$$\partial\rho/\partial t + g^{-1/2}(\partial/\partial x^i)(g^{1/2}v^i) = 0. \quad (9)$$

Гипотетически предполагалось, что описание физических свойств сложных структур возможно проводить в пространствах дробной размерности, задаваемых метрикой определенного вида. Для примера приложения уравнений (8) и (9) рассмотрим квазиодномерное течение. Метрические свойства зададим метрикой

$$dl^2 = g(x)dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (10)$$

где единственная, отличная от нуля компонента метрического тензора есть

$$g(x) = g_{xx} = (x/L_0)^{\varepsilon\nu}. \quad (11)$$

Здесь ε — истинная дробная размерность рассматриваемого пространства, причем $\varepsilon < 0$; L_0 — некоторый характерный размер; коэффициент ν есть множитель, обеспечивающий выполнение определенных требований. Поясним это. Если с помощью метрики (11) вычислить длину квазиодномерной структуры, заданной в непрерывном метрическом пространстве, для которой прототип структуры в реальном нашем мире может быть, скажем, елкой, то их длины, как скалярные величины, должны быть равны. Из этого условия и определится ν. Такое требование в принципе отвечает реальности. Далее мы будем просто писать ε, подразумевая под ним произведение $\varepsilon\nu$. Для метрики (11) отличен от нуля единственный символ Кристоффеля, а именно

$$\Gamma^x_{xx} = -(1/2g)\partial g/\partial x = -\varepsilon/2x. \quad (12)$$

Уравнение (8) для компоненты v^x будет тогда таким:

$$g(x)\rho\left[\partial v^x/\partial t + v^x(\partial v^x/\partial x)(1-\varepsilon/2x)\right]$$
$$= - A_x P + \eta g^{1/2}\left[\partial^2 v^x/\partial x^2 + (\varepsilon/2x)\partial v^x/\partial x\right.$$
$$\left. + \varepsilon(1-\varepsilon)v^x/2x^2\right]$$
$$+ \xi g^{1/2}(\partial/\partial x)\left[g^{-1/2}(\partial(v^x g^{1/2})/\partial x)\right]. \quad (13)$$

Если жидкость несжимаемая, то в силу уравнения (9) получим

$$(\partial/\partial x^i)(g^{1/2}v^i) = 0, \quad (14)$$

а потому слагаемое, пропорциональное ξ в (13), исчезает.

Уравнение (14) дает

$$v^x = Cx^{-\varepsilon/2}, \quad (15)$$

где $C = \text{const}$.

Решим уравнение (13) для малых скоростей, когда слагаемым $v^x(\partial v^x/\partial x)(1-\varepsilon/2x)$ можно пренебречь (малые числа Рейнольдса), в стационарном случае и для малых ε. Положив $v^x = v$, имеем

$$\partial^2 v^x/\partial x^2 + (\varepsilon/2x)\partial v^x/\partial x + \varepsilon(1-\varepsilon)v^x/2x^2$$
$$= (1/\eta L_0^{\varepsilon})\int\limits_{-\infty}^{\infty}(ik)^{1+\varepsilon}P_k e^{1kx}dk/2\pi, \quad (16)$$

где в правой части мы воспользовались правилом (2), определяющим действие линейного оператора дробного дифференцирования на скалярную функцию; P_k — фурье-образ давления $P(x)$.

Чтобы решить полученное уравнение, предположим, что давление меняется по закону

$$P(x) = P_0\cos ax, \quad (17)$$

где a — некоторая константа, имеющая размерность обратной длины.

Это означает, что фурье-образ есть

$$P_k = \frac{2P_0\gamma(a^2+k^2+\gamma^2)}{(a^2+k^2+\gamma^2)^2 - 4a^2k^2}, \quad (18)$$

где γ — некоторая формально вводимая величина, обеспечивающая сходимость интеграла.

Для такого P_k вычислим интеграл, стоящий в правой части уравнения (16). Действительно,

$$J = (\gamma P_0/\pi\eta L^{\varepsilon})\int\limits_{-\infty}^{\infty}(ik)^{(1+\varepsilon)}\frac{e^{ikx}(a^2+k^2+\gamma^2)dk}{(a^2+k^2+\gamma^2)^2 - 4a^2k^2}. \quad (19)$$

Вычисление интеграла (19) легко осуществляется с помощью теории вычетов и в результате (после перехода к пределу $\gamma \to 0$) получаем

$$J = -(P_0 a^{1+\varepsilon}/\eta L^{\varepsilon})\sin(ax - \pi\varepsilon/2)e^{i\pi(1+\varepsilon)}. \quad (20)$$

Решение однородного уравнения (16) при малых ε дает

$$v(x) = Ax^{1-\varepsilon} + Bx^{-\varepsilon/2}. \quad (21)$$

Если теперь зафиксировать x, положив его равным некоторому значению x_0, и провести плоскость, перпендикулярно рисунку, a, то очевидно получим картину, представленную на рисунке, b. Явно прослеживается одномерная "дырочная" структура, из "дырок" которой течет жидкость. Приведенную структуру с некоторой натяжкой можно назвать канторовым множеством, где роль точек играют дырки разных диаметров: самая большая из них соответствует основному стволу.

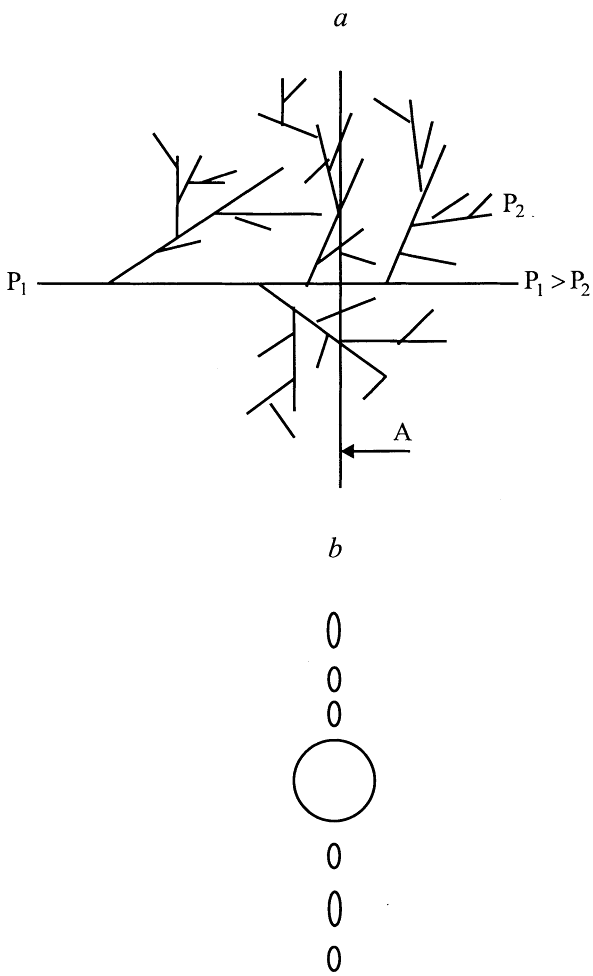

Схема структуры с $\varepsilon > 0$ (a) и сечение плоскостью A при $x = \mathrm{const}$.

Решая далее уравнение (16) методом вариации постоянных, находим с учетом (20)

$$v(x) = Ax^{1-\varepsilon} + Bx^{-\varepsilon/2} + D[x^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon/2)] \times \int x^{\varepsilon} \sin(ax - \pi\varepsilon/2)dx - D\left[x^{-\varepsilon/2}/(1+\varepsilon/2)\right] \int x^{1+\varepsilon/2} \sin(ax - \pi\varepsilon/2)dx, \tag{22}$$

где $D = (P_0 a/\eta)(a/L_0)^{\varepsilon} e^{i\pi(1+\varepsilon)}$.

В отсутствие давления ($P_0 = 0$) решение (22) должно совпадать с (15). Это означает, что следует положить $A = 0$, $B = C$. Окончательно

$$v(x) = Cx^{-\varepsilon/2} + D[x^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon/2)] \int x^{\varepsilon} \sin(ax - \pi\varepsilon/2)dx - D[x^{-\varepsilon/2}/(1+\varepsilon/2)] \int x^{1+\varepsilon/2} \sin(ax - \pi\varepsilon/2)dx. \tag{23}$$

Если в (23) положить $\varepsilon = 0$, то получим естественный результат

$$v_{\varepsilon=0}(x) = C - (P_0/a\eta)\sin ax. \tag{24}$$

Предельный случай (24) показывает корректность математических выкладок и подтверждает правильность выражения (23), из которого следует вывод о том, что в квазиодномерных структурах скорость течения в отсутствие внешних факторов (в частности, давления) не является постоянно. Объяснение этому тривиальное: всегда существует взаимодействие между различными частями d_F-мерных структур. С точки зрения технического приложения построенной теории (в частности, квазиоднородной) тут следует заметить, что гидродинамическое течение жидкостей по хаотически разветвленным трубопроводам и с уменьшающимся постепенно радиусом труб до настоящего времени не поддавалось теоретичекому описанию.

Единственное условие, которое требуется для возможности математического расчета физических свойств подобных объектов — это их самокопирование в некоторых пределах изменения пространственного масштаба. Предложенное в работе эвристическое описание физических характеристик таких сложных разветвленных систем позволяет решать разнообразные задачи чисто прикладного характера.

Действительно, получаемые этим методом результаты можно использовать, к примеру, и в таких казалось бы далеких от гидродинамики областях, как оптоволоконная технология, где речь идет о системе разветвляющихся оптических волокон, так и в теории кристаллизации.

Заключение

Предложено описание гидродинамических явления в пространствах произвольной размерности и как пример исследован квазиодномерный случай приложения d_F-мерного уравнения гидродинамики (8).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00011).

Список литературы

[1] *Гладков С.О.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 8–12.
[2] *Гладков С.О.* // Перспективные материалы. 2000. № 1. С. 5–9.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. Т. 8. 733 с.
[4] *Гладков С.О.* Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.