01;02

Магнитные свойства вырожденных атомных ферми-газов

© Е.В. Орленко, Б.Г. Матисов, Г.Т. Кетиладзе

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: quark@citadel.stu.neva.ru

(Поступило в Редакцию 13 марта 2001 г.)

Обсуждаются возможные магнитные эффекты в вырожденном атомном ферми-газе, такие как обменное усиление парамагнитной восприимчивости, а также возможность существования фазового перехода в ферромагнитное состояние с установлением спонтанной поляризации спинов атомов. Рассматривается вопрос о возможности распространения спиновых волн в атомной системе.

Введение

Вырожденный атомный ферми-газ представляет собой уникальный объект для реализации в эксперименте идеального ферми-газа и исследования его квантовых статистических свойств. В отличие от электронного ферми-газа в металле или плазме, где сильны эффекты взаимодействия, создающие неидеальность, атомный газ, в котором сохраняется только ван-дер-ваальсово взаимодействие, является прекрасной экспериментальной моделью идеального квантового газа.

После успешного охлаждения атомных бозе-систем и получения собственно бозе-конденсата [1] был проведен эксперимент по охлаждению ферми-системы, в частности K^{40}, когда $7 \cdot 10^5$ атомов было охлаждено до температуры вырождения, ниже 300 nK [2]. Таким образом, ультрахолодные атомы образуют разреженную систему, в которой межчастичное взаимодействие мало́, более того, здесь возможен контроль над взаимодействием, например, через так называемый резонанс Фешбаха на основе магнитных полей [3]. Особенности поведения охлажденных ферми-атомов, перечисленные выше, наблюдаются и в бозе-системах [4]. Для ферми-системы предсказываются новые явления, такие как чешуйчатая структура пространственного распределения [5], подавление упругих и неупругих соударений [6,7], существование нуль-звука при низкой температуре [8]. Предсказывается также возможность существования фазового перехода в сверхтекучее состояние для куперовских пар атомов [9].

Однако нельзя не вспомнить о магнитных явлениях в атомных газах, далеких от состояния вырождения ($T \sim 4\,\mathrm{K}$), но в которых квантовые эффекты уже не являются малыми, а представляют собой основной вклад в количественное описание физического явления, которое в этом смысле не имеет классического аналога. Для обозначения тех больцмановских газов, в которых имеют место макроскопические квантовые эффекты, был в свое время введен даже термин "квантовые газы" [10]. Эпитет "квантовый" для больцмановского газа означает лишь то, что тепловая длина волны де-Бройля λ значительно превосходит атомные размеры a, но значительно меньше среднего расстояния между частицами

$$n^{-1/3} \gg \lambda \gg a,$$

где n — концентрация спин-поляризованного атомного газа.

Для таких газов, в частности для спин-поляризованного водорода, а также для $^3\mathrm{He}\uparrow$, наблюдались магнитные коллективные эффекты, такие как спиновые волны [11–14]. Теоретическое описание магнитных эффектов спин-поляризованных больцмановских газов было предложено на основе феноменологической теории ферми-жидкости [10], а также ab initio [15]. В последнем случае в квантовое кинетическое уравнение не просто введено слагаемое, учитывающее корреляции спинов атомов, но естественным путем получена константа обменного взаимодействия и показана исходная причина появления в кинетическом уравнении слагаемого гейзенберговского типа.

Поскольку магнитные эффекты не только сохраняют свою актуальность для более холодных атомных систем, близких или находящихся в состоянии вырождения, но и могут выступать одним из основных механизмов, нарушающих идеальность атомного газа, то такие эффекты должны быть рассмотрены более подробно уже для случая вырожденного атомного газа. Действительно, более сильное кулоновское взаимодействие, какое имеет место в системе заряженных частиц, в атомных системах отсутствует и тем более значимыми становятся более слабые эффекты спиновой корреляции, обусловленные обменным взаимодействием, являющиеся следствием интерференционного перераспределения плотности атомного газа на фоне слабого ван-дер-ваальсова взаимодействия. Таким образом, эффекты спиновой корреляции и коллективные возбуждения, которые имели место в так называемых "квантовых больцмановских газах" при температурах $T \sim 4\,\mathrm{K}$, в вырожденном атомном ферми-газе не только будут проявлять себя особенно отчетливо, но послужат причиной появления более интересных магнитных эффектов, таких как фазовый переход II рода в ферромагнитное состояние.

Обменное взаимодействие

Рассмотрим взаимодействие двух нейтральных атомов при температурах, когда тепловая длина волны де-Бройля атома становится сравнима со средним расстоянием между частицами, т.е. $\hbar/\sqrt{2mT} \sim n^{-1/3}$, где m — масса атома, а температура берется в энергетической шкале. В этом случае существенно учесть уже в рамках квантово-механического расчета энергии взаимодействия принцип неразличимости атомов. Поскольку прямое ван-дер-ваальсово взаимодействие является малым, то в этом случае законно применение теории возмущений, но так как волновые свойства атомов достаточно сильно будут сказываться на результирующем интерференционном перераспределении плотности атомов в пространстве, то необходимо применять именно обменную теорию возмущений (ОТВ), разработанную специально для таких систем [16]. Первая поправка к энергии вычисляется согласно ОТВ

$$\varepsilon^{(1)} = \langle\Phi|\hat{V}|\Psi\rangle, \tag{1}$$

где Ψ — несимметризованная волновая функция системы невзаимодействующих частиц, являющаяся простым произведением волновых функций отдельных частиц, Ψ — антисимметризированная волновая функция или координатная часть антисимметризированной волновой функции, если возмущение не содержит спиновых операторов явно; $\hat{V}$ — оператор взаимодействия.

В нашем случае роль оператора взаимодействия будет выполнять потенциал Сюзерленда

$$\hat{V} = \begin{cases} -\dfrac{c}{r^6}, & r > a, \\ +\infty, & r < a, \end{cases} \tag{2}$$

где c — константа ван-дер-Ваальса; a — расстояние, на котором действуют силы отталкивания между атомами ($a \sim 10^{-8}$ cm); r — расстояние между центрами атомов.

Волновая функция двухатомной невзаимодействующей системы в координатах центра масс запишется в виде

$$|\Phi(r)\rangle = e^{ik_z z} + f(\theta)\,\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r},$$

$z = r\cos\theta$ — координата, отсчитанная вдоль оси, соединяющей ядра; f — амплитуда рассеяния, определяемая прямым взаимодействием атомов, т.е. $\hat{V}$; $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ — волновое число; $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения ядер.

Волновая функция, содержащая перестановку центров атомов, запишется в виде

$$|\Phi'(\mathbf{r})\rangle = e^{-ik_z z} + f(\pi-\theta)\,\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}.$$

Тогда координатная часть двухатомной функции будет либо симметричной, либо антисимметричной

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ik_z z} \pm e^{-ik_z z} + \big(f(\theta) \pm f(\pi-\theta)\big)\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}, \tag{3}$$

так как соответствующая спиновая часть будет либо симметричной, либо антисимметричной. Поскольку для атомов K^{40} в эксперименте реализуются только два спиновых состояния

$$\left|j=\frac{9}{2};\ j_z=\frac{9}{2}\right\rangle \quad \text{и} \quad \left|j=\frac{9}{2};\ j_z=\frac{7}{2}\right\rangle \text{ [2]},$$

где j — полный спин атома, j_z — проекция полного спина атома на ось z, то соответствующая симметричная или антисимметричная функция будет соответствовать двум возможным состояниям с полным спином двухатомной системы $J = 9$ или $J = 8$

$$|\chi_{s,a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|j=\frac{9}{2};\ j_z=\frac{9}{2}\right\rangle_{\mathrm{I}}\left|j=\frac{9}{2};\ j_z=\frac{7}{2}\right\rangle_{\mathrm{II}} \pm \left|j=\frac{9}{2};\ j_z=\frac{9}{2}\right\rangle_{\mathrm{III}}\left|j=\frac{9}{2};\ j_z=\frac{7}{2}\right\rangle_{\mathrm{I}}\right\}, \tag{4}$$

где индексы I и II соответствуют номеру атома, $|\chi_s\rangle = |J=9;\,J_z=8\rangle$, $|\chi_a\rangle = |J=8;\,J_z=8\rangle$; таким образом, верхнему знаку в выражении (3) соответствует состояние $|\chi_a\rangle$, а нижнему — $|\chi_s\rangle$.

Пусть вероятность того, что расстояние между соседними атомами равно r, определяется в больцмановском газе функцией

$$W(r) = N^{-1}\exp\left(-\frac{V(r)}{T}\right),$$

где N — нормировочный фактор.

Тогда усредненное значение поправки к энергии взаимодействия найдем по модифицированной формуле (1)

$$\varepsilon^{(1)}(r) = \langle\Phi|\hat{V}(r)W(r)|\Psi\rangle, \tag{5}$$

которая эквивалентна усреднению с помощью матрицы плотности в координатном представлении. Поправка к энергии будет иметь известную структуру

$$\varepsilon^{(1)} = K \pm A, \tag{6}$$

где K — прямой вклад; A — обменный вклад, который и будет определять расщепление в энергии, обусловленное ван-дер-ваальсовым потенциалом, но одновременно зависящее от ориентации спинов атомов. Для A находим

$$A = \frac{bT}{2kN}\,\mathrm{Im}\big(I_5(k) + 2\bar{f}I_6(k)\big), \tag{7}$$

где $b = c/T$, $I_n(k)$ — интегралы, вычисленные методом перевала; $\bar{f}$ — усредненное по угловым переменным значение амплитуды, по порядку величины равное a; фактор

$$N = \int\limits_a^\rho \exp\left(\frac{b}{r^6}\right) r^2 dr,$$

ρ — среднее расстояние между атомами $\rho > n^{-1/3}$.

При выполнении условий $ka > 1$, $\rho \gg a$ и заданной температуре T_0, используя приближенные значения интегралов, получаем

$$A = -\frac{2}{3}\pi T_0 \frac{3b}{a^6}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3 \left(\frac{\pi}{7kr_0}\right)^{1/2} \times \sin\left(\frac{4\pi}{7} + \frac{7kr_0}{3}\right)\left(1 + \frac{2f}{r_0} - \frac{1.5}{ak}\right). \quad (8)$$

Здесь $(6b/k)^{1/7} = r_0$ — эффективный радиус обменного взаимодействия. Поскольку верхнему индексу в выражениях (3) и (6) соответствует антисимметричная спиновая часть $|\chi_a\rangle = |J = 8;\ J_z = 8\rangle$, а нижнему — симметричная спиновая часть $|\chi_s\rangle = |J = 9;\ J_z = 8\rangle$, то выражение (6) можно переписать, используя спиновые операторы в явном виде. Так как собственное значение оператора $\hat{j}_{\mathrm{I}}\hat{j}_{\mathrm{II}}$ равно

$$\overline{\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}} \cdot \hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}}} = \frac{1}{2}\big(J(J+1) - j_{\mathrm{I}}(j_{\mathrm{I}}+1) - j_{\mathrm{II}}(j_{\mathrm{II}}+1)\big) \quad (9)$$

и принимает два значения: при $J = 9$ $\overline{\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}}\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}}} = 81/4$, при $J = 8$ $\overline{\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}}\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}}} = 45/4$, то можно ввести обычным способом оператор

$$\hat{P}_{\mathrm{I,II}} = \frac{1}{18}\left(63 - 4\overline{\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}}\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}}}\right),$$

собственные значения которого равны ± 1 соответственно для антисимметричной и симметричной функции. Тогда в выражении (6) можно ± 1 заменить на указанный оператор:

$$\hat{\varepsilon} = K + \frac{A}{18}(63 - 4\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}}\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}})$$

или

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 - \frac{2A}{9}\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}}\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}}, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_0 = K + \frac{7}{2}A.$$

Таким обдразом, для атомного газа можно ввести добавку к оператору энергии, связанную со спиновым взаимодействием,

$$\hat{H} = -\frac{2}{9}A\sum_{i<j}\hat{\mathbf{j}}_i\hat{\mathbf{j}}_j. \quad (11)$$

Численные оценки константы взаимодействия приведем для температур, не превышающих $T_0 = 1/2 \times \times 10^{-16}$ erg. Дело в том, что в отличие от конденсированных сред, где обменное взаимодействие слабо зависит от теплового движения взаимодействующих атомов, в газе кинетические процессы являются при определенном соотношении основных параметров задачи рассеяния, таких как тепловая длина волны де-Бройля, константа ван-дер-Ваальса и концентрация атомов, может эффективно действовать описанный механизм обменного взаимодействия. Константа $b = 5 \cdot 10^4 c$, где $c = 6E_B(a_B^2)^6$, $k \cong 1/a_B$, а a_B — боровский радиус. Радиус потенциального барьера в модели Сюзерленда выбирается обычно в районе ван-дер-ваальсового минимума и равен приблизительно $a \cong 5a_B$, радиус $r_0 = 8a_B$. При таких значениях величин из (8) получаем $A \sim$ нескольких T_0. При увеличении температуры на порядок перевальная точка в интегралах, входящих в (7), оказывается внутри потенциального барьера, т.е. $r_0 < a$, и расчет теряет силу. Можно привести аппроксимацию зависимости обменного интеграла от температуры вблизи указанной критической

$$A \approx T_0 x^{3/2} e^{-x},$$

где x — отношение энергии ван-дер-Ваальса к тепловой.

Видно, что в этом случае наиболее эффективное взаимодействие будет при $x = 3/2$. Итак, в рассматриваемой области температур парное обменное взаимодействие атомов вызывает расщепление энергии в зависимости от сориентации спинов атомов, причем энергетически выгодным является состояние с параллельно ориентированными спинами. Таким образом, можно ожидать появления спонтанной намагниченности в газе или по крайней мере усиления парамагнитной восприимчивости системы атомов в магнитном поле.

Влияние обменного взаимодействия на энергию Ферми и полную энергию системы атомов вырожденного газа

Обменное взаимодействие в системе атомов вырожденного газа будет проявлять себя с двух противоположных сторон. Во-первых, появление спонтанной поляризации в атомном газе изменяет положение уровня Ферми и, таким образом, приводит к увеличению средней кинетической энергии атомов. Во-вторых, как было показано выше, обменное взаимодействие, приводящее к сориентации спинов, понижает энергию системы. Таким образом, в процессе установления равновесной поляризации спиновой системы участвуют два конкурирующих фактора: несиловой обмен, или интерференционное перераспределение атомной плотности, которое является следствием принципа Паули, и приводит к установлению в системе антипараллельной ориентации спинов и собственно обменное взаимодействие, которое понижает энергию в случае параллельной ориентации спинов и повышает ее, если спины антипараллельны, на величину $\Delta E = A$. Эти обстоятельства учитываются в теории ферми-жидкости Ландау для электронов в металле путем введения феноменологической функции Ландау [17].

Оценим сначала характер изменения энергии Ферми при наличии спонтанной поляризации, степени α

$$n^+ - n^- = \alpha n, \quad n^+ + n^- = n, \quad (12)$$

где n — концентрация атомов.

Вычисляя энергию Ферми с учетом поляризации, получим

$$\varepsilon_F^{+} = \varepsilon_F(1 \pm \alpha)^{2/3}, \quad \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}. \tag{13}$$

Вычисляя кинетическую энергию без учета температурных поправок, получим

$$T = \frac{3}{5} n\varepsilon_F (1-\alpha)^{5/3} + \frac{3}{5} n\varepsilon_F \frac{1}{2}\big((1+\alpha)^{5/3} - (1-\alpha)^{5/3}\big). \tag{14}$$

Тогда полная энергия с учетом обменного взаимодействия

$$U = \frac{3}{5} n \frac{\varepsilon_F}{2}\big\{(1+\alpha)^{5/3} + (1-\alpha)^{5/3}\big\} + \frac{A}{2} n(1-2\alpha). \tag{15}$$

Исследуя выражение (15) на экстремум относительно степени поляризации α, получим

$$\alpha_{\min} \approx \frac{1}{4}\left(\frac{2A}{\varepsilon_F}\right)^3 \tag{16}$$

в приближении слабого взаимодействия $2A \ll \varepsilon_F$, а в приближении $A > \varepsilon_F$ минимуму потенциальной энергии соответствует $\alpha = 1$. Таким образом, обменное взаимодействие свободных атомов может приводить к появлению спонтанной поляризации в атомной вырожденной системе.

Усиление парамагнетизма при наличии обменного взаимодействия

Обменное взаимодействие приводит к появлению спонтанной поляризации, что отражается на положении уровня Ферми; заменим в выражении (13) ± 1 на оператор $\hat{P}_{\mathrm{I,II}}$, тогда

$$\varepsilon_F^{\pm} = \varepsilon_F\left(1 - \frac{7}{2}\alpha + \frac{2}{9}\alpha\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}}\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}}\right)^{2/3}. \tag{17}$$

Обменная поправка к энергии дана в (10). Таким образом, матрица плотности по спиновой переменной

$$\hat{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \frac{2}{9}A\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}}' - \varepsilon_F^{\pm}}{T}\right) + 1}. \tag{18}$$

Разлагая (18) в ряд по малому параметру, получим

$$\hat{n} = n_0 + \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\hat{f}, \tag{19}$$

где

$$\hat{f} = -\frac{1}{n}\left\{\frac{\alpha}{3}\varepsilon(p) + \left(\frac{4\alpha}{27}\varepsilon(p) + \frac{2}{9}A(p,p')\right)\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{j}}'\right\},$$

n_0 — фермиевская функция.

Рассмотрим воздействие на атомную систему внешнего магнитного поля. Полное изменение энергии системы в результате воздействия поля может быть записано в виде (16)

$$\delta E = -\beta_1(\mathbf{p})\hat{\mathbf{j}}\mathbf{H}. \tag{20}$$

Это изменение слагается из двух компонент. Во-первых, магнитное поле действует на магнитный момент атома, что дает вклад

$$-2\mu_0^*\mathbf{H}\hat{\mathbf{j}}, \tag{21}$$

где

$$\mu_0^* = \frac{e\hbar}{2m_{am}c}.$$

Во-вторых, влияние на энергетический спектр оказывает изменение функции распределения. Соответствующее изменение энергии равно

$$\begin{aligned}
&Sp_{j'}\int f(\mathbf{p},\mathbf{j},\mathbf{p}',\mathbf{j}')\delta n(\mathbf{p}',\mathbf{j}')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= Sp_{j'}\int f(\mathbf{p},\mathbf{j},\mathbf{p}',\mathbf{j}')\frac{\partial n_0}{\partial E}(\mathbf{p}',\mathbf{j}')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= -Sp_{j'}\int f(\mathbf{p},\mathbf{j},\mathbf{p}',\mathbf{j}')\frac{\partial n_0}{\partial E}\beta_1(p')\mathbf{j}'\mathbf{H}\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= -Sp_{j'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3 n} \\
&\quad\times\left[\frac{\alpha}{3}\varepsilon(p') + \left(\frac{4\alpha}{3}\varepsilon(p') + 2A(p,p')\right)\frac{\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{j}}'}{9}\right] \\
&\quad\times\left(-\frac{\partial n_0}{\partial E'}\right)\beta_1(p')(\hat{\mathbf{j}}'\mathbf{H}) \\
&= -\frac{1}{(2\pi\hbar)^3 n}\frac{\hat{\mathbf{j}}\mathbf{H}}{9}\int\left[\frac{4\alpha}{3}\varepsilon(p') + 2A(p,p')\right] \\
&\quad\times\left(-\frac{\partial n_0}{\partial E'}\right)\beta_1(p')d^3p'.
\end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая (20)–(22), получаем

$$\beta_1(p) = 2\mu_0^* + \frac{(2m)^{3/2}}{9n2\pi^2\hbar^3 2}\int\left(-\frac{\partial n_0}{\partial E}\right)\beta_1(p') \times\left[\frac{4\alpha}{3}\varepsilon(p') + 2A(p,p')\right]\sqrt{\varepsilon'}d\varepsilon',$$

$$\beta_1(p) \approx 2\mu_0^* + \frac{1}{12\varepsilon_F^{3/2}}\left\{\frac{4\alpha}{3}\varepsilon_F^{3/2} + 2A(p)\sqrt{\varepsilon_F}\right\}\beta_1(p')$$

или

$$\beta_1(p) = \frac{2\mu_0^*}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{A(p)}{\varepsilon_F}\right)}. \tag{23}$$

Магнитный момент равен

$$\mathbf{M} = 2\mu_0^* Sp_j \hat{j} \int \delta n(p, \hat{j}') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$= 2\mu_0^* Sp_j \hat{j} \int \delta n(p, \hat{j}) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon(p, \hat{j}) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$= 2\mu_0^* Sp_j \hat{j} (\hat{\mathbf{j}}\,\mathbf{H}) \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \beta_1(p) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$= \frac{2\mu_0^*}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{A(p)}{\varepsilon_F}\right)}. \qquad (24)$$

Тогда для магнитной восприимчивости имеем [17]

$$\chi = \frac{4\mu_0^{*2}}{1 - \frac{A}{6\varepsilon_F}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{A}{\varepsilon_F}\right)^2 + 1\right)}. \qquad (25)$$

Хорошо видно, что если отношение A/ε_F не является малым, то может существовать особенность в парамагнитной восприимчивости, связанная с переходом в состояние со спонтанной намагниченностью. Иными словами, могут существовать условия для фазового перехода парамагнетик–ферромагнетик. Но этот случай требует отдельного рассмотрения.

О возможности ферромагнитного состояния атомного ферми-газа

Если в системе имеется спонтанная поляризация спинов, то в этом случае можно говорить и о спонтанном магнитном моменте всей ферми-системы. Пусть $\mathbf{m}$ — единичный вектор, характеризующий направление спонтанного магнитного момента. Тогда энергия связи частиц будет зависеть от ориентации спина по отношению к $\mathbf{m}$

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{j}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) - \kappa \hat{\mathbf{j}}\mathbf{m}. \qquad (26)$$

Согласно этой формуле, энергия атома со спином, параллельным m, есть $\varepsilon_0 - \kappa$ и соответственно равновесная функция распределения равна $n_F(\varepsilon_0 - \kappa) = n^+$. У атома с противоположным спином энергия равна $\varepsilon_0 + \kappa$, а равновесная функция распределения — $n_F(\varepsilon_F + \kappa) = n^-$. Собственные значения n^+ и n^- при соответствующих ориентациях получаются при действии оператора

$$\hat{n}_0(\mathbf{p}, \mathbf{j}) = \frac{1}{2}(n^+ + n^-) + (n^+ - n^-)\hat{\mathbf{j}}\mathbf{m}, \qquad (27)$$

который можно считать равновесной матрицей плотности. Для возбужденных состояний $\varepsilon > \varepsilon_F$ можно считать

$$n^+ - n^- = n_F^0 \frac{e^{\frac{\kappa}{T}} - e^{-\frac{\kappa}{T}}}{e^{\frac{\kappa}{T}} + e^{-\frac{\kappa}{T}}}, \qquad (28)$$

где n_F^0 — функция распределения Ферми.

Рассмотрим, как изменяется энергия электрона при повороте $\mathbf{m}$ на угол $\delta\theta$. При этом $\delta\mathbf{m} = [\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{m}]$ и, согласно (26), имеем

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = -\kappa[\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{j}}]\delta\theta. \qquad (29)$$

Но, с другой стороны, при изменении $\mathbf{m}$ меняется и равновесная функция распределения (27)

$$\delta\hat{n}_0(\mathbf{p}, \mathbf{j}) = (n^+ - n^-)[\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{j}}]\delta\theta,$$

а с ней и энергия

$$\delta\varepsilon = Sp_j \int \hat{f} \delta n_0 \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$= Sp_j \int \hat{f}(n^+ - n^-)[\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{j}}]\delta\theta \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (30)$$

Приравнивая (29) и (30) при произвольном $\delta\theta$, получим

$$-\kappa[\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{j}}] = Sp_{j'} \int \hat{f}(n^+ - n^-)[\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{j}}] \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (31)$$

Подставляя сюда (19)

$$\hat{f} = -\frac{1}{n}\left\{\frac{\alpha}{3}\varepsilon(p) + \frac{1}{9}\left(\frac{4\alpha}{3}\varepsilon(p) + 2A\right)\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{j}}'\right\},$$

находим

$$-\kappa[\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{j}}] = -\frac{\sinh\frac{\kappa}{T}}{\cosh\frac{\kappa}{T}}\left(\frac{4\alpha}{3}\varepsilon_F + 2A\right)[\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{j}}],$$

$$\text{так как} \quad \alpha \approx \frac{1}{4}\left(\frac{2A}{\varepsilon_F}\right)^3,$$

$$\frac{\kappa}{T}\frac{T}{\frac{4\alpha}{3}\varepsilon_F + 2A} = \operatorname{th}\frac{\kappa}{T}, \qquad (32)$$

$$\frac{\kappa}{T}\frac{T}{2A\left(\left(\frac{2A}{\varepsilon_F}\right)^2 + 1\right)} = \operatorname{th}\frac{\kappa}{T}. \qquad (33)$$

Трансцендентное уравнение (33) имеет нетривиальное решение, соответствующее фазовому переходу в состояние с нескомпенсированным магнитным моментом, при

$$\frac{T}{2A\left(\left(\frac{2A}{\varepsilon_F}\right)^2 + 1\right)} < 1.$$

Это условие хорошо выполняется для рассматриваемой области температур, при которой наступает вырождение атомного газа. Причем фазовый переход в ферромагнитное состояние может наступить гораздо раньше, при более высоких температурах.

Спиновые волны в вырожденном атомном ферми-газе

При наличии ферромагнетизма может возникнуть новый тип спиновых волн в атомной ферми-системе. Соответствующее кинетическое уравнение запишем для матрицы плотности по спиновой переменной

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\,[\hat{H}, \hat{n}].$$

Операторы координат и импульсов атомов рассматриваются как классические. Учитывая некоммутативность только спиновых переменных, получим уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{\varepsilon}, \hat{n}] + \mathbf{v}\,\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}\,\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Будем искать распределения $\hat{n} = \hat{n}_0 + \delta\hat{n}$, где $\hat{n}_0$ — равновесная функция (27), $\delta\hat{n} \sim \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$. Представим $\delta\hat{n}$ в виде суммы двух слагаемых, а именно зависящего и не зависящего от спина,

$$\delta\hat{n} = \nu(\mathbf{p}) + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p})\sigma.$$

Сохраняя члены, линейные по δn, получим систему уравнений для ν и $\boldsymbol{\nu}$.

Первая из них соответствует колебаниям плотности атомов и связанным с ними колебаниями проекций спина на направление магнитного поля $\nu_z = \boldsymbol{\nu}\mathbf{m}$. В отличие от случая колебаний электронной плотности, сопровождающихся колебаниями плотности зарядов, где необходимо уже учитывать возникающие электрические поля, что в свою очередь приводит к высоким частотам возбуждений $\omega = \mu/\hbar$ [18], в случае атомной системы такие колебания проекции спина должны тоже приниматься во внимание, но в данной работе рассматриваться не будут. Вторая система уравнений, соответствующая колебаниям поперечных компонент, после введения циклических переменных дает для $\nu_+ = \nu_x + i\nu_y$ [18]

$$\begin{aligned} &-\omega\nu_+ + \mathbf{kv}\boldsymbol{\nu}_+ + [\mathbf{k}(\mathbf{v}-\mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 - b - \mu) \\ &\quad + \mathbf{k}(\mathbf{v}+\mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 + b - \mu)] \int \left(\frac{4}{3}\,\alpha\varepsilon(p) + j(p, p')\right) \\ &\quad \times \nu_+(p')\,\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} - \frac{2b}{\hbar}\,\nu_+ - \frac{2}{\hbar}(n_+ - n_-) \\ &\quad \times \int \left(\frac{4}{3}\,\alpha\varepsilon(p) + j(p, p')\right) \nu_+(p')\,\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} = 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon_0/\partial p$, $\mathbf{u} = \partial b/\partial p$, $2A = J$.

Решая это уравнение методом последовательных приближений, получаем для членов второго порядка по k [17] дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \omega = &\left\{ \int \hbar(\mathbf{kv})^2(n_+ - n_-)\,\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \right. \\ &\left. - \hbar b\!\int\!(\mathbf{kv})^2\,\frac{ds}{(2\pi\hbar)^3 v_{\varepsilon_0=\mu+b}} - \hbar b\!\int\!(\mathbf{kv})^2\,\frac{ds}{(2\pi\hbar)^2 v_{\varepsilon_0=\mu-b}} \right\} \\ &\times \left[2b \int (n_+ - n_-)\,\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Оказывается, что $\omega \sim \hbar k^2 v^2 b/\mu$, в том числе в вырожденном атомном ферромагнитном газе, где могут распространяться поперечные волны. Этот результат в целом согласуется с работами [10,15], где рассматривались подобные эффекты в больцмановских атомных газах, точнее в невырожденных квантовых газах.

Заключение

Последовательное описание магнитных эффектов, имеющих место в сильно охлажденных атомных ферми-системах, важно по меньшей мере по двум причинам. Во-первых, сам процесс охлаждения и удержания атомов происходит в магнитных ловушках, имеющих довольно сложную конфигурацию магнитных полей. Поэтому поведение "захваченного" такой ловушкой атомного газа будет во многом определяться его реакцией на неоднородное внешнее поле (парамагнитные эффекты), а также способностью газа генерировать собственное магнитное поле (ферромагнетизм). Во-вторых, собственно взаимодействие, приводящее к появлению спонтанной намагниченности атомного газа, может создавать неидеальность, так что при температурах ниже некоторой критической атомный газ вообще нельзя считать хорошей моделью идеальной ферми-системы.

В настоящей работе мы не ставили себе целью подробное электродинамическое описание распределения макроскопических магнитных полей в ловушке с учетом возможности генерации магнитных полей самой системой атомов, хотя такое описание могло бы представлять интерес. Здесь мы попытались поставить и по возможности решить задачу микроскопического описания поведения взаимодействующих атомов, находящихся в состоянии, близком к вырождению, и указать на возможные квантовые эффекты, аналогичные обменным эффектам в твердом теле, приводящие к ферромагнетизму атомного газа. В более разреженных газах может наблюдаться по крайней мере обменное усиление парамагнетизма. Мы показали также, что константа обменного взаимодействия, вычисленная нами ab initio, не является малой величиной по сравнению с тепловой энергией.

Исследовав вопрос о принципиальной возможности спонтанной спиновой поляризации вырожденного атомного газа при наличии в нем обменного взаимодействия, мы пришли к выводу о том, что силовой обмен превалирует над несиловым, дающим тенденцию к антипараллельному выстраиванию спинов, и в системе может устанавливаться частичная поляризация спинов. Это обстоятельство в статистическом смысле приводит к возможности существования фазового перехода атомного газа в ферромагнитное состояние. Именно на фоне установившейся ферромагнитной сориентации спинов атомов могут распространяться возбуждения (спиновые волны), наблюдавшиеся в больцмановских газах и описанные в более ранних работах.

Авторы выражают свою признательность пробсту Кристофу Эрихту (Christoph Ehricht) за моральную поддержку в работе, а также фонду РФФИ (грант № 99-02-17076) и программе "Университеты России" (грант № 015.01.04), Министерства образования РФ за финансовую поддержку данного цикла работ (грант № E00-3-12).

Список литературы

[1] *Anderson M.H.* // Science. 1995. Vol. 269. N 1. P. 198–205. Davis K.B. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. N 12. P. 3969–3972. Bradley C.C. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. N 6. P. 1687–1694. Bradley C.C., Sackett C.A., Hulet R.G. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 2. P. 985–993.
[2] *De Marko B., Jin D.S.* // Science. 1999. Vol. 285. P. 1703–1705.
[3] *Inouye S.* // Nature. 1998. Vol. 392. N 1. P. 151. Coureille Ph., Freeland R.S., Heinzen D.J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. N 1. P. 69. Roberts J.L. // Ibid. P. 5109–5112. Vuletic V., Kerman A.J., Chin C., Chu S. // Ibid. 1999. Vol. 82. N 5. P. 1406–1409.
[4] *Cornell E.A., Enscher J.R., Wieman C.E.* http://lanl.gov/abs/condmat/9903109.
[5] *Schneider J., Wallis H.* // Phys. Rev. A. 1998. Vol. 57. N 6. P. 1253–1258; Bruun G.M., Burnet K. // Ibid. 1998. Vol. 58. N 10. P. 2427–2434.
[6] *Koelman J.M.V.A., Stoof H.T.C., Verhaar B.J., Walraven J.T.M.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. N 3. P. 676–679.
[7] *Ferari G.* // Phys. Rev. A. 1999. Vol. 59. N 8. R4125–R4130.
[8] *Yip S.K., Ho T.L.* // Phys. Rev. A. 1999. Vol. 59. N 8. P. 4653–4657.
[9] *Stoof H.T.C., Houbiers M., Sackett C.A., Hulet R.G.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. N 1. C. 10–13. Houbiers M., Stoof H.T.C. // Phys. Rev. A. 1999. Vol. 59. N 2. P. 1556–1560. Baranov M.A., Petrov D.S. // Ibid. 1998. Vol. 58. N 4. P. R801–804.
[10] *Башкин С.П.* // УФН. 1986. Т. 148. № 3. С. 433–471.
[11] *Сильвера А.Ф., Валравен Ю.* // УФН. 1983. Т. 139. № 6. С. 701–706. Silvera I.F. // Physica Ser. B. 1982. Vol. 109/110. P. 1499–1502.
[12] *Leduc M., Nacher P.J., Crampton S.B., Laloë F.* J. De Phys. Lett. 1984. Vol. 45. N 4. P. L441–L448.
[13] *Johnson B.R., Denker J.S., Bigelow N., Levy L.P., Freed J.H., Lee D.M.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. N 6. P. 1508–1511. Johnson B.R., Denker J.S., Bigelow N. // Ibid. Vol. 53. N 2. P. 487–491.
[14] *Tastevin G., Nacher P.J., Leduc M., Laloë F.* // J. De Phys. Lett. 1985. Vol. 45. N 2. P. L249–L252.
[15] *Орленко Е.В., Румянцев А.А.* // Физика низких температур. 1989. Т. 15. № 5. С. 485–490.
[16] *Орленко Е.В., Румянцев А.А.* // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. Вып. 3. С. 439–446. Орленко Е.В., Латышевская Т.Ю. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 6. С. 2139–2147. Орленко Е.В., Матисов Б.Г. // ФТТ. 1999. Т. 41. Вып. 12. С. 2127–2131.
[17] *Ландау Л.Д.* // ЖЭТФ. Т. 30. С. 1058.
[18] *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 519 с.