01;03

О принципе минимума диссипации кинетической энергии в нелинейной гидродинамике вязкой жидкости

© В.А. Люлька

Вычислительный центр РАН,
Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 31 июля 2000 г.)

Прямым численным интегрированием полной системы уравнений Навье–Стокса установлено для некоторых внутренних течений вязкой жидкости, что в этих течениях реализуется принцип минимума диссипации кинетической энергии, или принцип Гельмгольца. Исследования проводились в интервале чисел Рейнольдса от 2 до 20. Рассмотрен класс задач, для которых этот принцип имеет место.

В гидродинамике вязкой жидкости для медленных течений, т. е. течений, для которых можно пренебречь нелинейными членами в системе уравнений Навье–Стокса, известен вариационный принцип Гельмгольца, который формулируется следующим образом: механическая энергия, диссипируемая при действительном медленном движении вязкой несжимаемой жидкости в некотором объеме, меньше, чем в произвольном движении несжимаемой жидкости с тем же распределением скоростей на поверхности, ограничивающей этот объем [1]. В нелинейной гидродинамике вязкой жидкости этот принцип в подобной общности не имеет места.

Возникает, однако, вопрос, существуют ли явления для нелинейных течений, в которых реализуется все-таки принцип минимума диссипации кинетической энергии. Оказывается, однако, что такие течения существуют и класс их достаточно обширен. Понятно, что обнаружены они были с помощью численных методов, поскольку аналитическими методами решить сколько-нибудь содержательную задачу не представляется возможным.

Сформулируем решаемую задачу. Вдоль бесконечной круглой цилиндрической трубы движется поток вязкой несжимаемой жидкости, содержащий одиночную цилиндрическую частицу или несколько жесткосвязанных цилиндрических частиц. Ось трубы и оси частиц совпадают. Рассматривается движение частиц, при котором частица движется вдоль оси трубы и скорость ее по величине неизменна. Назовем эту скорость скоростью увлечения частиц. Именно при этой скорости мы будем рассматривать частицу, с которой связана система координат. Тип частиц, для которых решалась задача увлечения, показан на рис. 1.

Выпишем систему уравнений Навье–Стокса в цилиндрической системе координат, используя функцию тока Ψ. Введем функцию тока с помощью равенств

$$V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}; \qquad V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

Здесь V_r и V_z — скорости вдоль радиуса и оси z. После обезразмеривания уравнений, проведенных обычным образом, и исключения давления получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \omega,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} - \frac{1}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = \frac{\mathrm{Re}}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\omega + \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{1}{r} \times \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right). \quad (1)$$

Здесь

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv D$$

— оператор Стокса [2], $\mathrm{Re} = (\rho R V_m)/\mu$ — число Рейнольдса, ρ — плотность жидкости, R — радиус трубы, V_m — средняя скорость жидкости при $z \to \pm\infty$, μ — вязкость жидкости.

Система дифференциальных уравнений Навье–Стокса должна быть дополнена граничными условиями; условия использовались в системе координат, в которых частица покоилась. При $z \to \pm\infty$ $\Psi = -(1-r^2)^2 - 0.5Vr^2$ (V — скорость движения частицы), при $z \to \pm\infty$ $\omega = -8r^2$. Остальные граничные условия приведены в [3]. Граничные условия для ω на твердых поверхностях используют условия типа Тома [4]. Система (1) аппроксимировалась с помощью центральных разностей. Система полученных разностных уравнений решалась методом Зайделя. В работе [5] подробно рассмотрена точность численных результатов в подобной задаче.

Приведем для справки энергию диссипации в осесимметрической задаче и цилиндрических координатах

$$E = \frac{2}{\mathrm{Re}}\int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_0^1 \left[4\pi\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right)^2 + 4\pi\left(\frac{U_r}{r}\right)^2 + 4\pi\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{2\pi}{r}\left(\omega - 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)^2\right] r\,\partial r, \quad (2)$$

где

$$U_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad U_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

и z_1 соответствует левому концу трубы, а z_1 — правому.

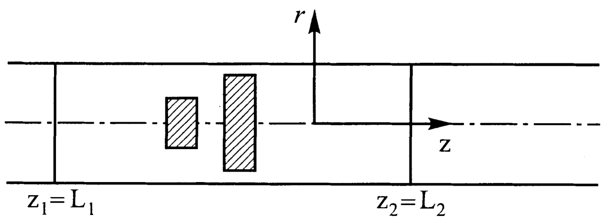

Рис. 1.

Обсудим чрезвычайно важный, но нигде не рассматриваемый вопрос о численном дифференцировании численного решения дифференциального уравнения. Окончательная погрешность численного решения дифференциального уравнения складывается из систематической ошибки $O(h^k)$, так называемой ошибки аппроксимации, и случайной ошибки ε, связанной с неточным решением разностных уравнений методом итераций. При дифференцировании результатов численного счета берется разность определенного порядка и делится на h^l, где h — шаг сетки, 1 — показатель степени. При этом погрешность в конечном результате может стать недопустимо большой. Именно подобный случай наблюдался бы в данной задаче, когда численные результаты, полученные по схеме второго порядка точности дважды дифференцировались, затем возводились в квадрат и суммировались. Замечательным фактом является то, что наличие случайной и систематической ошибки на численном решении краевой задачи при численном дифференцировании его, как правило, приводит к значению производных с приемлемой погрешностью. Из точных результатов на эту тему автору известна теорема Е.А. Волкова, в которой утверждается, что при дифференцировании численного решения уравнения Лапласа порядок точности любой производной имеет тот же порядок точности, что и численное решение [6].

Задача об увлечении частиц решалась следующим образом: связанное тело, как показано на рис. 1, увлекается потоком вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Система координат неподвижна и связана с увлекаемым телом. В этой системе координат рассматривается течение вязкой жидкости около твердых частиц; границы этого объема жидкости заключены между $z_1 = L_1$ и $z_2 = L_2$ (рис. 1), на концах этого отрезка трубы градиент давления поперек сечения трубы равен градиенту течения Пуазейля.

В таком объеме для тел разной конфигурации и чисел Re проводились вычисления энергии диссипации по формуле (2) и при различных скоростях движения увлекаемого тела. На рис. 2 слева представлена зависимость энергии диссипации от скорости движения тел, показанных на рис. 1, а справа приведена зависимость суммарной силы, действующей на двужущуюся частицу, от скорости движения последней. Число Рейнольдса, для которого получены данные величины, равно 10. Рассмотрим график поведения силы: при определенном значении скорости суммарная сила, действующая на увлекаемое тело, равна нулю. По определению, эта скорость соответствует скорости увлечения тела, но на графике слева минимум энергии диссипации потока достигается также при определенной скорости. Относительная погрешность в обеих скоростях, при которой достигается нуль суммарной силы и минимум диссипации энергии, не превышает 0.04%. Автор понимает, что численный счет не может служить доказательством принципа, который он формулирует в данной работе, однако у него нет сомнений в правильности этого принципа, поскольку совпадение минимума энергии диссипации (2) и нуля суммы сил, действующих на тела определенной конфигурации, столь сложных выражений на специальном множестве точек (численное решение уравнений Навье–Стокса) случайно произойти не может.

Данное исследование производилось в интервале чисел Рейнольдса от 2 до 20. Характер поведения энергии диссипации и суммарной силы, действующей на увлекаемые тела, такой же во всем интервале исследованных чисел Рейнольдса и для тел разной конфигурации. Может возникнуть подозрение, что это интервал малых чисел Рейнольдса. Однако это не так, нелинейность в данных задачах проявлялась уже при Re $= 1-3$, а такой интервал чисел Рейнольдса выбирался потому, что расчет производился на машине БЭСМ-6, быстродействие которой было невелико.

Отметим еще один интересный факт. Как показано на рис. 3, в исследованном интервале чисел Re для тел различных конфигураций зависимость энергии диссипации от числа Рейнольдса представляется гиперболой

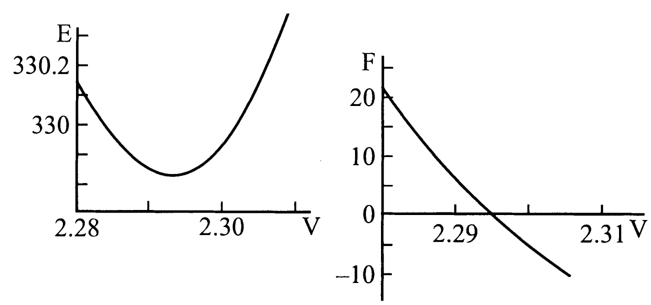

Рис. 2.

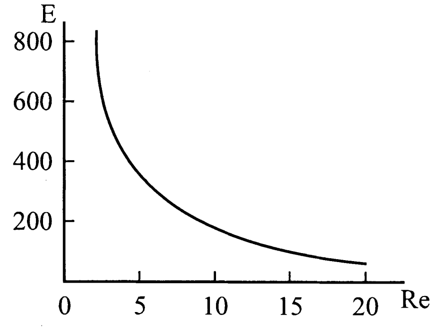

Рис. 3.

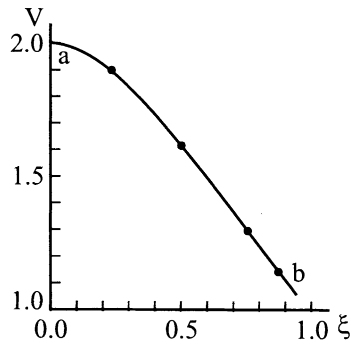

Рис. 4.

$E = b/\mathrm{Re}$, где b — некоторая постоянная величина, зависящая от формы и конфигурации частиц. Отклонение вычисленных величин от закона обратной пропорциональности не превышает 0.1%. Как следует из рис. 3, энергия диссипации для таких течений в зависимости от числа Re обладает подобием.

Осесимметричные задачи, а также плоские задачи не являются единственными задачами, для которых выполняется принцип минимума диссипации энергии. Интуиция подсказывает, что данный принцип выполняется для течений вязкой жидкости, содержащей твердые тела, в бесконечном цилиндре с прямыми образующими любого сечения, лишь бы увлекаемое тело или группа тел двигались все с постоянным вектором скорости, который называется скоростью увлечения тел, а на краях цилиндра поддерживались стационарные граничные условия. Этот факт также верен для увлечения одинаковых периодических структур.

Кратко опишем эффект, наблюдаемый в работе [7]: в бесконечно длинной трубе, содержащей вязкую жидкость вместе со столбиком различного радиуса и бесконечной длины, этот столбик увлекался вязкой жидкостью. Для определения скорости твердого столбика использовался принцип минимума потерь энергии, причем была получена точная формула для скорости увлечения бесконечно длинных цилиндров определенного радиуса. Точками на кривой (V, ξ) (рис. 4) показаны значения скоростей цилиндрических тел того же радиуса и достаточно большой длины; значения этих скоростей, отмеченных точками на графике, находились из прямого численного интегрирования уравнений Навье–Стокса [8]. Поэтому если вязкой жидкостью увлекается бесконечный круглый цилиндр в круглом же цилиндре, то можно получить точную формулу для увлекаемого тела, используя принцип минимума диссипации кинетической энергии. Вот эта формула

$$\frac{2}{V} = \frac{2\zeta}{a} = 1 + \zeta^2 + b[(1+\zeta^2)\zeta^2 \ln \zeta^2 + 2\zeta^2(1-\zeta^2)]/8,$$

где величина b находится из решения квадратного уравнения $4b = (l+b)^2\zeta^2$ с учетом соотношения $l(1-\zeta^2) = 8 + b\zeta^2 \ln \zeta^2$ для l.

Если решать аналогичную задачу об увлечении бесконечного цилиндра, но в осесимметричной волнообразной трубе, то применение того же принципа приведет к правильному результату, но для нелинейного течения. Как видим, принцип минимума диссипации энергии для ряда задач является единственным способом решить задачу до конца. Поскольку в последних двух задачах при движении жидкости сила, действующая на увлекаемое тело, не может равняться нулю, то необходимо применить принцип минимума диссипации энергии для нахождения скорости увлечения твердого тела.

В [9] с вариационной точки зрения рассмотрены некоторые задачи для уравнений Стокса, в [10] много страниц посвящено гидродинамике вязкой жидкости. В этой книге ставится вопрос о существовании движений, при которых реализуется принцип Гельмгольца, однако ответа на данный вопрос нет. Обе работы вышли гораздо позже, чем статьи автора, однако ни в одной из них нет указаний на мои работы и результаты, полученные в них. Из этого автор делает вывод, что данная работа "утонула" в общем потоке работ, и после переработки решил опубликовать ее вновь.

Список литературы

[1] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Физматгиз, 1959.

[2] *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.

[3] *Люлька В.А.* // ЖВМиМФ. 1973. Т. 13. № 5.

[4] *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.

[5] *Люлька В.А.* // ЖВМиМФ. 1983. Т. 13. № 1.

[6] *Волков Е.А.* // Тр. МИАН. 1972. Т. 128.

[7] *Борисов В.М., Марков В.Г., Палилова С.Ф.* // ЖВМиМФ. 1971. Т. 11. № 3.

[8] *Люлька В.А., Павловский Ю.Н.* // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9. № 2.

[9] *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.

[10] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.