

01;10;12

Характеристики многополюсных линз с идеальной центральной частью полюса

© В.В. Вечеславов, О.В. Григорьева

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

(Поступило в Редакцию 23 марта 2001 г.)

Описывается использующий технику конформных отображений метод вычисления потенциала и поля многополюсных линз, у которых центральная часть полюса образована идеальной кривой. Проводится сравнение характеристик таких линз с линзами, профиль которых является многоугольником. Показано, что при относительно широких полюсах профили с идеальной центральной частью обеспечивают более высокое качество поля, чем многоугольные.

Введение

В современной технике формирования и транспортировки потоков заряженных частиц наряду с широким использованием квадрупольных линз (число пар полюсов $P = 2$) применяются также секступоли ($P = 3$) и октуполи ($P = 4$) [1–3]. Качество создаваемого линзой поля, требования к которому в последние годы заметно ужесточились, в решающей мере определяется геометрической формой полюса. Для любой P -линзы можно указать теоретический профиль, дающий "идеальное" поле: линейное для квадрупольной, квадратичное и кубическое для секступольной и октупольной соответственно. Однако идеальные профили, как известно, не могут быть выполнены (они не оставляют места для размещения обмотки и замыкания потока), поэтому создаваемые реальными линзами поля всегда содержат наряду с основной нежелательные высшие гармоники [2,3].

В практике поиска "хороших" профилей [2–4] четко обозначилась тенденция строить линзы двух типов: 1) оборванный идеальный профиль заменен подходящим приближением (например, частью окружности) и 2) профиль линзы является (или допускает аппроксимацию) многоугольником.

Первая удачная попытка расчета линз второго типа сделана в работе [4], где с помощью конформных отображений был найден плоский профиль квадрупольной линзы с подавленной шестой (первой неосновной) гармоникой потенциала. Заметим, что число подлежащих определению вершин многоугольника при этом было равно всего двум. Используемая в [4] техника вычислений получила недавно значительное дальнейшее развитие в работе [5], что дало возможность аппроксимировать сектор линзы (принадлежащая одному полюсу часть поперечного сечения) многоугольником с числом вершин до десяти и более.

В настоящей работе мы продолжаем начатую в [5] деятельность по расчету многополюсных линз и рассматриваем линзы первого типа, где центральная часть полюса строго следует идеальной кривой. Угловой раз-

мер этой части и геометрия шиммы подбираются так, чтобы обеспечить высокое качество поля. В разделе 3 приводится сравнение обоих типов линз и для каждого из них определяется своя область применимости.

Надо заметить, что качество создаваемого линзой поля принято в общем случае оценивать двумя показателями: максимальным (в пределах рабочей апертуры) отклонением поля от идеального и/или величиной амплитуды первой неосновной гармоники потенциала. Поскольку сегодня нет ясности, какой из этих показателей важнее, мы проводим оптимизацию по каждому из них отдельно (раздел 3). Ниже предполагается, что выполнены обычные для аналитических методов условия: линза длинная, имеет место полная симметрия и не учитывается насыщение железа.

1. Отображения сектора линзы

На рис. 1 в качестве примера показан сектор квадрупольной линзы, где центральная часть полюса является идеальной кривой — гиперболой. Здесь нельзя, как это делалось в [5], представить эту фигуру многоугольником, поскольку замена гиперболы ломаной с относительно небольшим числом вершин грубо исказит картину поля. Предлагается поступить следующим образом. Можно показать (см. Приложение 3 в [5]), что функция

$$\delta(z) = \eta(z) + i\xi(z) = (z \exp(-i\alpha_P))^P, \quad (1)$$

$$\alpha_P = \pi(P-2)/4P$$

отображает сектор идеальной — линзы на полюсу (двуугольник) в плоскости промежуточной переменной δ . Экспоненциальный множитель в (1) введен для того, чтобы сделать биссектрису первого квадранта $\varphi = \pi/4$ на плоскости z линией симметрии сектора линзы при любом числе пар полюсов P . Если применить преобразование (1) в отношении сектора реальной P -линзы, то на плоскости δ возникает замкнутая фигура, у которой центральная часть — точный образ идеального

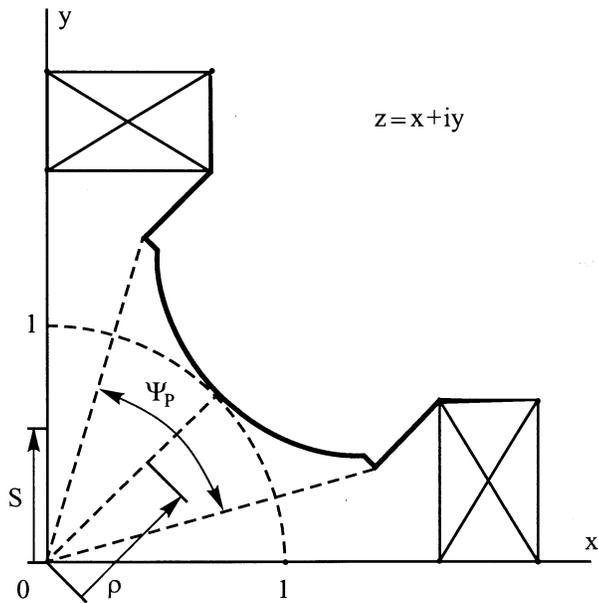


Рис. 1. Сектор квадрупольа с идеальной центральной частью полюса. Толщина линий соответствует распределению скалярного потенциала по границе сектора.

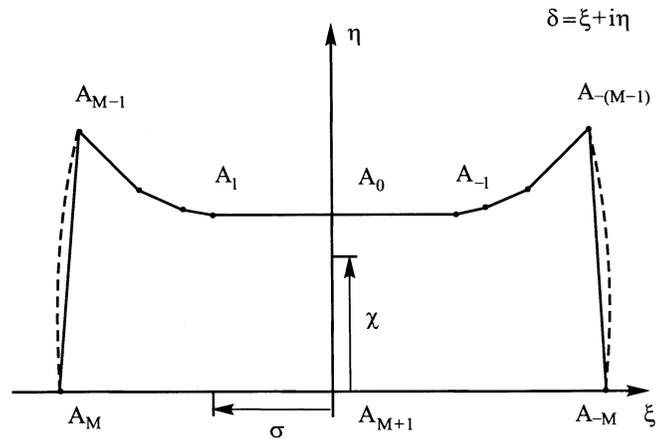


Рис. 2. Образ сектора линзы (рис. 1) на промежуточной плоскости δ . Штриховая кривая — отображение с помощью функции (1), сплошная — аппроксимация этого отображения многоугольником.

участка профиля, т.е. отрезок горизонтальной прямой, а остальные звенья в общем случае кривые (рис. 2). Эту фигуру можно достаточно аккуратно представить многоугольником с общим числом вершин $2M + 1$, поскольку такая аппроксимация задевает только периферию линзы.

Отображение верхней полуплоскости комплексной переменной $\omega = u + iv$ на этот многоугольник осуществляет интеграл Кристоффеля–Шварца, который с учетом симметрии рассматриваемой области записывается в

виде [5,6]

$$\delta(\omega) = C_0 \int_{\omega_0}^{\omega} \prod_{m=1}^M (\omega^2 - a_m^2)^{\beta_m} d\omega + C_1, \quad (2)$$

где $\beta_m = \alpha_m - 1$, α_m — измеренные в долях π внутренние по отношению к области углы; a_m — точки вещественной оси u плоскости ω , являющиеся образами вершин многоугольника A_m .

Процедура выполнения конформного отображения полностью совпадает с описанной в [5] для многоугольного профиля, что позволяет найти все входящие в отображение (2) параметры. Вместе с тем построение распределений потенциала и индукции, а также вычисление спектра потенциала (см. Приложение) из-за наличия промежуточного преобразования на плоскость δ выполняется по-другому.

2. Распределение потенциала и индукции магнитного поля

Комплексный магнитный потенциал P -линзы на промежуточной плоскости δ можно представить в форме ряда [5]

$$\mathcal{P}(\delta) = \mathcal{D}(\delta) + i\mathcal{F}(\delta) = p_0\delta \left(1 + \sum_n \tilde{p}_n \delta^{2n} \right), \quad (3)$$

где $\mathcal{D}(\delta)$ и $\mathcal{F}(\delta)$ — векторный и скалярный магнитные потенциалы соответственно [2].

Мы работаем со скалярным потенциалом $\mathcal{F}(\delta)$, распределение которого по сектору линзы показано на рис. 1: на поверхности полюса $\mathcal{F} = 1$ (жирная линия), в области обмотки величина потенциала спадает до нуля (линия меняющейся толщины) и равна нулю на всей остальной границе сектора (тонкие линии). Отображение (2) позволяет перенести это распределение на действительную ось u плоскости ω . Вычисления показывают, что участок обмотки весьма мал и истинное распределение $\mathcal{F}(u)$ можно с хорошей точностью заменить эквивалентным прямоугольным (рис. 3, *b* в [5])

$$\mathcal{F}(u) = 1, \quad -a_b \leq u \leq a_b; \quad \mathcal{F}(u) = 0, \quad |u| > a_b. \quad (4)$$

При отображении плоскости ω на промежуточную плоскость δ мнимая полюсь $0 \leq v < \infty$ переходит в отрезок $0 < \chi < 1$ мнимой оси η , который в свою очередь является образом отрезка единичной длины от центра линзы до центра полюса $x = y = 1/\sqrt{2}$ на плоскости z (рис. 1).

Потенциал $\mathcal{F}(u, v)$ в любой точке верхней полуплоскости ω и распределение потенциала $\mathcal{F}(v)$ вдоль полюсь $0 \leq v < \infty$, записанные в переменных u, v , даются формулами (9) и (10) в работе [5]. Описанная там техника построения распределений индукции вдоль биссектрисы линзы и вдоль границы ее сектора также

полностью применима к рассматриваемому случаю. Однако возврат на исходную плоскость z должен включить в себя переменные промежуточной плоскости δ , поэтому распределения индукции при идеальной центральной части полюса несколько отличаются от полученных в [5] для многоугольного профиля.

Входящая в распределение потенциала $\mathcal{F}(v(\chi))$ вдоль полюси $0 \leq v < \infty$ зависимость v от промежуточной переменной χ определяется уравнением (оно получено заменой $p \rightarrow \chi$ в формуле (12) из [5])

$$\frac{dv}{d\chi} = -\frac{1}{|C_0|} \prod_{m=1}^M (v^2(\chi) + a_m^2)^{-\beta_m}. \quad (5)$$

Распределение индукции на единичном отрезке от центра линзы до центра полюса на исходной плоскости z с учетом равенства $\chi = \rho^P$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\rho) &= \frac{d\mathcal{F}}{d\rho} = \frac{d\mathcal{F}}{dv} \frac{dv}{d\chi} \frac{d\chi}{d\rho} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{a_b}{v^2(\chi) + a_b^2} \frac{P}{|C_0|} \prod_{m=1}^M [v^2(\chi) + a_m^2]^{-\beta_m} \rho^{P-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Фактически вычисление распределения $\mathcal{B}(\rho)$ по бисектрисе сектора линзы выполняется совместным использованием формул (5) и (6). Из (6) можно получить точное значение индукции в центре полюса, полагая $v = 0$,

$$\mathcal{B}_{\rho=1} = \frac{2P}{\pi} \left(\frac{1}{a_b |C_0|} \right) \prod_{m=1}^M a_m^{-2\beta_m}, \quad (7)$$

а также определить индукцию вблизи центра линзы из условия $\rho \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$

$$\mathcal{B}_{\rho \rightarrow 0} = \frac{2Pa_b}{\pi |C_0|^2} \rho^{P-1}. \quad (8)$$

Сравнение выражений (8) и (3) с учетом (1) позволяет написать точное значение коэффициента основной гармоники потенциала

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \frac{a_b}{|C_0|}. \quad (9)$$

Для построения второго распределения индукции $\mathcal{B}(s)$ от центра линзы по границе сектора рис. 1 (координата s отсчитывается от центра линзы, для квадрупольа $s \equiv y$) можно получить аналогичные (5) и (6) зависимости следующим образом. Левая граница сектора линзы плоскости z отображается на отрезке $A_M \leq \sigma \leq 0$ вещественной оси ξ промежуточной плоскости δ . Этот отрезок в свою очередь отображается на отрезок $a_M \leq u < \infty$ вещественной оси u плоскости ω , где отлична от нуля только v -компонента индукции, которая, как и в работе [5], задается формулой

$$\mathcal{B}_v(u, 0) = -\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = -\frac{2a_b}{\pi} \frac{1}{u^2 - a_b^2}.$$

Входящая в последнее выражение зависимость $u(\sigma)$ определяется уравнением (оно получено заменой $s \rightarrow \sigma$ в формуле (20) из [5])

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{1}{|C_0|} \prod_{m=1}^M (u^2(\sigma) - a_m^2)^{-\beta_m}. \quad (10)$$

Окончательно распределение индукции на границе сектора линзы дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(s) &= \mathcal{B}_v(u, 0) \frac{du}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{2a_b}{\pi |C_0|} \frac{P}{u^2(\sigma) - a_b^2} \\ &\times \prod_{m=1}^M [u^2(\sigma) - a_m^2]^{-\beta_m} s^{P-1} \end{aligned} \quad (11)$$

и вычисляется совместно с (10). Заметим, что из последнего соотношения с помощью предельного перехода $u(\sigma) \rightarrow \infty$ можно подтвердить правильность формул (8) и (9).

Из двух распределений (6) и (11) во внимание принимается то, которое дает наибольшее (в пределах рабочей апертуры) относительное отклонение поля от основного.

Выше отмечалось, что объектом минимизации может быть также относительная амплитуда первой неосновной гармоники потенциала. В Приложении описана рекуррентная процедура вычисления относительных амплитуд, входящих в (3) высших гармоник \tilde{p}_n , $n \leq N$ до любого порядка N . При $N > 1$ это удается сделать только с привлечением средств компьютерной аналитики [7], но для $N = 1$ вычисления оказываются несложными и точное выражение для \tilde{p}_1 в рассматриваемом случае линз с идеальной частью полюса имеет вид

$$\tilde{p}_1 = -\frac{1}{3C_0^2} \left(a_b^2 + \sum_{m=1}^M \beta_m a_m^2 \right). \quad (12)$$

Заметим попутно, что аналогичная характеристика для многоугольного профиля, которая в [5] отсутствует, дается формулой

$$\tilde{p}_1 = -(P|C_0|)^{-2P} \left(\frac{a_b^2}{3} - \frac{P}{2P+1} \sum_{m=1}^M \beta_m a_m^2 \right).$$

3. Сравнение характеристик линз и заключение

На базе приведенных выше и в работе [5] алгоритмов был написан пакет программ MULTIPOL, дающий возможность в интерактивном режиме вычислять и оптимизировать линзы с любым числом пар полюсов. С помощью этого пакета был получен довольно большой объем данных по расчету квадрупольей и секстипольей как для профилей с идеальной центральной частью, так и мно-

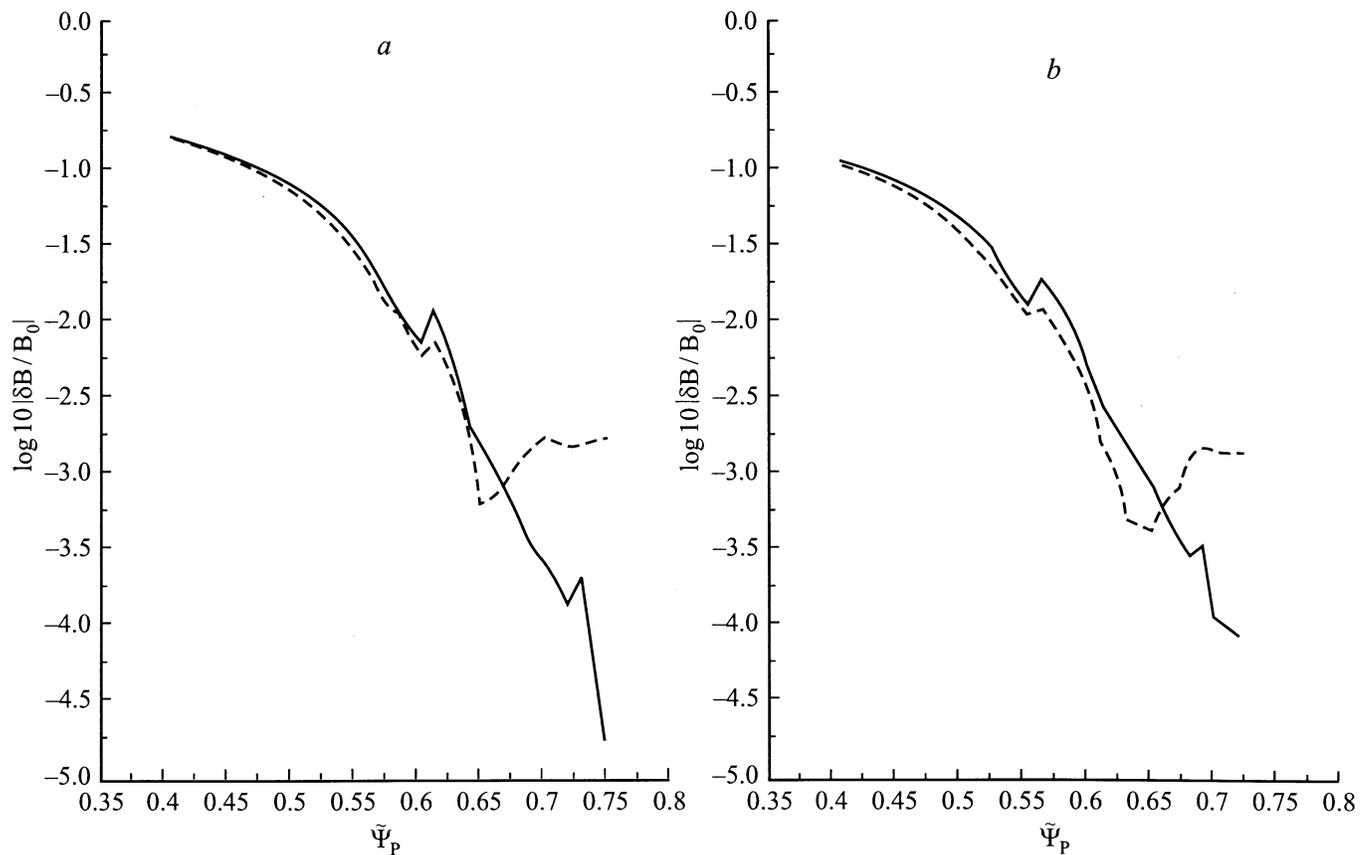


Рис. 3. Максимальные относительные отклонения поля от идеального для квадруполей (а) и секступолей (б). Сплошная кривая — профиль с идеальной центральной частью полюса, штриховая — многоугольный. $\tilde{\Psi}_P$ — относительный угол полюса линзы (13). Логарифм десятичный.

гоугольных. Одним из основных входных параметров в расчете является величина полного относительного угла полюса P -линзы (рис. 1)

$$\tilde{\Psi}_P = P\Psi_P/\pi. \quad (13)$$

Во всех случаях программа автоматически (без участия оператора) подбирала длину и угол наклона шиммы так, чтобы минимизировать либо максимальное (в пределах рабочей апертуры $r_a \leq 0.9$) отклонение поля $\delta B/B$ от идеального, либо относительную амплитуду \tilde{r}_1 первой неосновной гармоники. Для многоугольных профилей кроме того также автоматически подбирались значения регулировочных параметров T_φ и T_r , корректирующих угловые и радиальные координаты вершин многоугольника [5, раздел 3]. Полное число вершин многоугольников $2M + 1$, аппроксимирующих сектор линз второго типа [5, рис. 2] и для квадруполей, и для секступолей, было равно 21.

Анализ численных данных позволяет сделать следующие выводы. Для обоих типов профилей полюсов при оптимизации по отклонению поля $\delta B/B$

имеется своя область превосходства, что видно из рис. 3. Профили с идеальной центральной частью обеспечивают более высокое качество поля при широких полюсах $\tilde{\Psi}_P \gtrsim 0.65$, а для узких полюсов выгоднее использовать многоугольные профили. При минимизации по амплитуде первой неосновной гармоники потенциала \tilde{r}_1 картина оказывается не столь однозначной, тем не менее наличие профилей, когда эта гармоника сильно подавлена, не вызывает сомнений.

Отметим также, что относительная доля шимм (разность между полным угловым размером полюса и угловым размером его идеальной или многоугольной части) тем больше, чем уже полюс. Так, во всех обследованных случаях при $\tilde{\Psi}_P \approx 0.75$ она составляет около 10%, а при $\tilde{\Psi}_P \approx 0.4$ возрастает примерно до 30%. Возможно, что использование для узких полюсов более сложных, чем показано на рис. 1, шимм позволит улучшить рабочие характеристики линз.

Авторы глубоко благодарны Е.Б. Левичеву и В.Н. Корчуганову за обсуждения и советы.

Приложение

Список литературы

Спектр потенциала P -линзы с идеальной частью полюса

С помощью соотношений (3) и (9) относительное распределение потенциала вдоль отрезка χ на линии симметрии линзы (рис. 2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\mu) &= \mathcal{F}/p_0 \\ &= \mu - \frac{(a_b/|C_0|)^2}{3} \mu^3 + \frac{(a_b/|C_0|)^4}{5} \mu^5 - \dots, \quad (\text{П1}) \end{aligned}$$

где введена новая переменная

$$\mu(\chi) = \frac{|C_0|}{v(\chi)} \quad (\text{П2})$$

и предполагается выполненным неравенство $v > a_b$ (см. (4)). Зависимость $\mu(\chi)$ также ищется в виде ряда

$$\mu = \chi[1 + \theta(\chi)], \quad \theta(\chi) = \sum_{n=1}^N \tilde{\alpha}_n \chi^{2n}, \quad (\text{П3})$$

где последнее выражение считается малой поправкой $|\theta(\chi)| \ll 1$.

Из определения (П2) через переменную v находим

$$\frac{d\mu}{d\chi} = -\frac{|C_0|}{v^2} \frac{dv}{d\chi} = \prod_{m=1}^M \left[1 + \left(\frac{\mu a_m}{|C_0|} \right)^2 \right]^{-\beta_m}, \quad (\text{П4})$$

где $dv/d\chi$ задается формулой (5) и учтено геометрическое равенство $\sum_{m=1}^M \beta_m = -1$.

Раскладывая правую часть (П4) по формулам бинома с учетом (П3) и группируя члены, можно получить ряд по степеням χ , в коэффициенты которого входят неизвестные величины $\tilde{\alpha}_n$. С другой стороны, производную $d\mu/d\chi$ можно найти и непосредственно из основного определения (П3) также в виде ряда

$$\frac{d\mu}{d\chi} = 1 + 3\tilde{\alpha}_1 \chi^2 + 5\tilde{\alpha}_2 \chi^4 + \dots \quad (\text{П5})$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях χ в соотношениях (П4), (П5) и используя знание точных значений величин p_0 , $|C_0|$, получаем возможность рекуррентного определения входящих в (П3) параметров $\tilde{\alpha}_n$, $n = 1, 2, \dots$. Это позволяет построить в явном виде зависимость (П2) для $\mu(\chi)$ и с помощью (П1) найти амплитуды \tilde{p}_n ($n = 1, 2, \dots, N$) гармоник потенциала в разложении (3).

- [1] Courant E.D. et al. // Phys. Rev. 1952. Vol. 88. P. 1190. Пробл. соврем. физ. 1954. Т. 11. С. 169.
- [2] Капчинский И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: Атомиздат, 1966. 310 с.
- [3] Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. М.: Мир, 1969. 222 с.
- [4] Плотников В.К. // ПТЭ. 1962. № 2. С. 29.
- [5] Вечеславов В.В., Логинова О.В. // ЭТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 81.
- [6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 678 с.
- [7] Hearn A.C. REDUCE User's Manual. Version 3.6 (RAND Pub. CP78 Rev. 7/95, 1995). М.: Наука, 1973. 678 с.