

03;04;05

## Нелинейная динамика контактной границы сред с различной плотностью и симметрией

© Н.Б. Волков, А.Е. Майер, А.П. Яловец

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

E-mail: nbv@ami.uran.ru

Челябинский государственный университет

Поступило в Редакцию 18 июля 2000 г.

Предлагается экономичный метод исследования нелинейной безвихревой стадии неустойчивости Рэлея–Тейлора (РТ) свободной поверхности тяжелой жидкости, а также неустойчивости Рихтмайера–Мешкова (РМ) контактной границы сплошных сред с различной плотностью и симметрией. Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого демонстрируют эффективность предложенного метода. Показано, что неустойчивость границы ”твердое тело–плазма” генерирует в твердом теле напряжения.

Исследование нелинейной динамики свободной поверхности жидкости, или контактной границы между двумя жидкостями с различной плотностью и симметрией в гравитационном поле (гравитационной неустойчивости Рэлея–Тейлора) или в магнитном поле (магнитогидродинамической (МГД) неустойчивости Рэлея–Тейлора) [1], или уско-ряемой с помощью импульса внешнего давления произвольной формы (неустойчивости Рихтмайера–Мешкова [2,3]) представляет большой научный и практический интерес [4], в частности для генерации мощного импульсного рентгеновского излучения из плазмы [5]. На поздних нелинейных стадиях эти неустойчивости приводят к развитию и установлению сильной турбулентности [6,7], которую мы здесь не рассматриваем.

Линейная и нелинейная (безвихревая) стадии РТ и РМ неустойчивостей достаточно полно исследованы (см. работы [1,2,4,8–10]). Обобщение развиваемых в указанных работах методов на случаи произвольной зависимости внешнего потенциального поля от времени вызывает большие трудности. Весьма сложным является применение этих теорий и для

описания динамики границы в криволинейных координатах. Применение всех этих теорий к описанию динамики контактной границы сред с различной симметрией, в частности к описанию динамики границы между плазмой, генерируемой пучками заряженных частиц или лазерным излучением, и твердым телом, также вызывает большие трудности.

В нашей работе предлагается экономичный метод исследования нелинейной динамики контактной поверхности для случая безвихревой несжимаемой жидкости при произвольной зависимости потенциала внешнего поля от времени и симметрии жидкости по разные стороны контактной границы. В безвихревой несжимаемой жидкости потенциал скорости является гармонической функцией и, следовательно, полностью определяется граничными условиями. Это обстоятельство позволяет нам сформулировать замкнутую систему дифференциальных уравнений для границы, исключая из рассмотрения течения среды в объеме. Решение задачи о неустойчивости контактной границы может быть использовано в качестве граничных условий при решении уравнений механики сплошной среды (МСС). Совместное решение уравнений, описывающих динамику границы и уравнений МСС для твердого тела, позволяет учесть влияние упругопластических свойств среды на развитие неустойчивости, а также влияние возмущений поверхности на распределение физических полей.

Для простоты изложим основные идеи метода на примере динамики свободной границы, После чего обобщим его на случай контактной границы между сплошными средами с различными свойствами и симметрией.

Примем, что трехмерное в общем случае течение жидкости не зависит от одной из координат, например  $z$  (предлагаемый нами метод может быть легко обобщен на трехмерный случай). Исключая из рассмотрения турбулентную стадию развития неустойчивости, будем задавать форму свободной поверхности, ограничивающей сверху объем, занимаемой несжимаемой жидкостью, однозначной функцией вида  $y = Y(x, t)$ . Вдоль границы для потенциала скорости  $\varphi$  справедливо уравнение Бернулли [11]:

$$\frac{\partial \varphi(x, Y, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2(x, Y, t) + G(x, Y, t) = 0, \quad (1)$$

где  $G$  — потенциал внешнего поля.

Фазовая скорость границы определяется кинематическим условием, физически означающим отсутствие потока вещества через свободную поверхность:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v_y(x, Y, t) - v_x(x, Y, t) \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (2)$$

Уравнения (1)–(2) являются граничными условиями для гармонического в объеме потенциала скорости. Полагая, что движение среды в объеме определяется только эволюцией границы, получим для нее замкнутую систему уравнений.

Поскольку вдоль оси  $z$  параметры жидкости однородны, производная от потенциала скорости вдоль  $x$  равна  $x$ -компоненте тангенциальной скорости ( $v_\tau$ ), можно записать:

$$\frac{\partial \varphi(x, Y, t)}{\partial x} = v_x(x, Y, t) + v_y(x, Y, t) \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (3)$$

Для замыкания системы уравнений (1)–(3) используем условие несжимаемости среды и граничное условие  $v(x, y = -\infty, t) = 0$ .

Из выражения для функции тока на свободной поверхности  $\psi(x, Y, t) = \int_{-\infty}^{Y(x,t)} v_x(x, y, t) dy$ , условия несжимаемости жидкости и уравнения (2) следует:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \psi(x, Y, t)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Учитывая затухание поля скоростей с глубиной и условие несжимаемости, представим:

$$\psi(x, Y, t) = \int_{-\infty}^{Y(x,t)} \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} dy = H(x, t) \frac{\partial \varphi(x, Y, t)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$v_y(x, Y, t) = - \int_{-\infty}^{Y(x,t)} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial x^2} dy = -h(x, t) \frac{\partial^2 \varphi(x, Y, t)}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где  $H(x, t)$  и  $h(x, t)$  — неизвестные функции, удовлетворяющие условиям совместности выражений (5) и (6):

$$h = H \left( 1 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (7)$$

Интегрируя последнее из равенств (7), получим:

$$H(x, t) = Y(x, t) - \gamma(t). \quad (8)$$

Величину  $H$  можно интерпретировать как эффективную глубину возмущения, а  $y = \gamma(t)$  — как поверхность, разделяющую возмущенную и невозмущенную области среды.

Интегрируя (8) по  $x$  и дифференцируя получившееся выражение по времени, получим соотношение, эквивалентное в силу несжимаемости жидкости выражению вида:

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^{\lambda_m} v_y(x, Y, t) dx, \quad (9)$$

где  $\lambda_m$  — размер возмущенной области по  $x$ .

Уравнения (1), (4), (5), (8) и (9) представляют собой замкнутую систему, описывающую эволюцию границы  $Y(x, t)$ . Примем следующие граничные и начальные условия:

$$v_x(x = 0) = v_x(x = \lambda_m) = 0,$$

$$Y(x, t = 0) = Y_0 + a_0 \cos(kx), \quad H(x, t = 0) = 1/k,$$

где  $k = 2\pi/\lambda_m$ ,  $Y_0$  — координата невозмущенной поверхности.

Полученная система уравнений решается численно. Непосредственное применение для ее решения системы метода конечных разностей приводит к неустойчивому решению, что обусловлено отсутствием в модели диссипативных механизмов, ограничивающих рост коротковолновых возмущений. Однако, так как в идеальной жидкости наибольшей скоростью роста обладают коротковолновые возмущения, стадия турбулентного перемешивания для них наступит раньше, чем у длинноволновых возмущений. Возникновение мелкомасштабной турбулентности приводит к эффективному обрезанию возмущений в области больших волновых чисел из-за турбулентной вязкости. Учет этого факта осуществлялся путем проведения на каждом временном шаге прямого и обратного преобразования Фурье приращений потенциала скорости. При этом при нахождении обратного преобразования Фурье учитывался вклад лишь длинноволновых возмущений. Этот подход обеспечивает

устойчивость решения даже при использовании схемы Эйлера для интегрирования уравнений (1) и (5).

Пусть теперь сверху над жидкостью с плотностью  $\rho_+$  находится жидкость с плотностью  $\rho_-$ , причем  $\rho_- < \rho_+$ . (Все величины, относящиеся к легкой или тяжелой жидкости, будем далее также снабжать индексами  $-$  или  $+$  соответственно).

Согласно вышеизложенному, запишем систему уравнений, описывающую эволюцию границы раздела этих сред в виде:

$$\frac{\partial \varphi^\pm(x, Y, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}(v^\pm(x, Y, t))^2 + G(x, Y, t) + \frac{P(x, Y, t)}{\rho_\pm} = 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^\pm + \frac{\partial \psi^\pm(x, Y, t)}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\psi^\pm(x, Y, t) = \pm H^\pm(x, t) \frac{\partial \varphi^\pm(x, Y, t)}{\partial x}, \quad (12)$$

$$H^\pm(x, t) = \pm Y(x, t) \mp \gamma^\pm(t), \quad (13)$$

$$\dot{\gamma}^\pm = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda v_y^\pm(x, Y, t) dx, \quad (14)$$

где  $P$  — давление.

Из равенства нормальных к контактной границе компонент скорости следует соотношение:

$$H^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} = -H^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial x}. \quad (15)$$

Представив  $\varphi^-(x, Y, t) = -\varphi^+(x, Y, t) + \eta(x, t)$ , из (15) находим:

$$\eta(x, t) = \int_0^x \left(1 - \frac{H^+(x', t)}{H^-(x', t)}\right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial x'} dx' + \eta_0(t). \quad (16)$$

В (16)  $\eta_0(t)$  — неизвестная функция, практически не влияющая на динамику границы, вследствие чего ее можно приравнять к 0.

Исключая давление из уравнений (10) и используя (16), получаем уравнение для  $\varphi^+$ :

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1} \left\{ A \left( \frac{\partial Y}{\partial t} \right)^2 + \alpha \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right)^2 \right\} + AG - \frac{1-A}{2} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \quad (17)$$

Здесь  $A = \frac{\rho^+ - \rho^-}{\rho^+ + \rho^-}$  — число Атвуда,  $\alpha(x, t) = \frac{1}{2}[(1+A) + (1-A)(\frac{H^+}{H^-})^2]$ .

В уравнении (17) единственная используемая характеристика легкой жидкости — глубина возмущения  $H^-(x, t)$ , которую можно найти из уравнений (13), (14) и (15).

Если в качестве тяжелой жидкости рассматривается твердое тело, то для учета его свойств необходимо при записи уравнения (10) для  $\varphi^+$  учесть внутренние напряжения, что приводит к появлению в правой части уравнения (17) члена следующего вида:

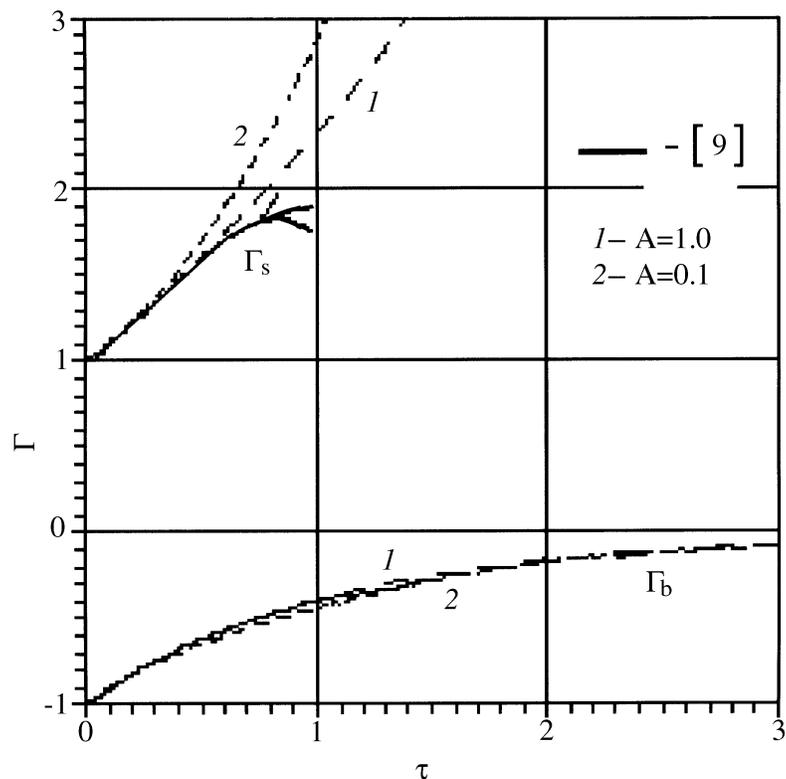
$$S(x, Y, t) = \frac{1}{\rho_+} \left\{ \int_0^x \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right)_Y dx' + \int_0^x \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right)_Y \frac{\partial Y}{\partial x'} dx' \right\}, \quad (18)$$

где  $(\dots)_Y$  означает, что производные от компонент тензора напряжений вычислены на границе раздела сред, а интегрирование выполняется вдоль границы. Выражение (18) вычисляется при решении уравнений МСС.

Рассмотрим решение задачи о развитии неустойчивости РМ для случая, когда  $A = 1$ . На первоначально покоящуюся жидкость в момент  $t = 0$  действует мгновенный импульсный потенциал  $G(x, y, t) = -U\delta(t)y$ . Интегрируя уравнение Бернулли (1) по времени от  $t = -0$  до  $t = +0$  получаем начальное условие для потенциала:

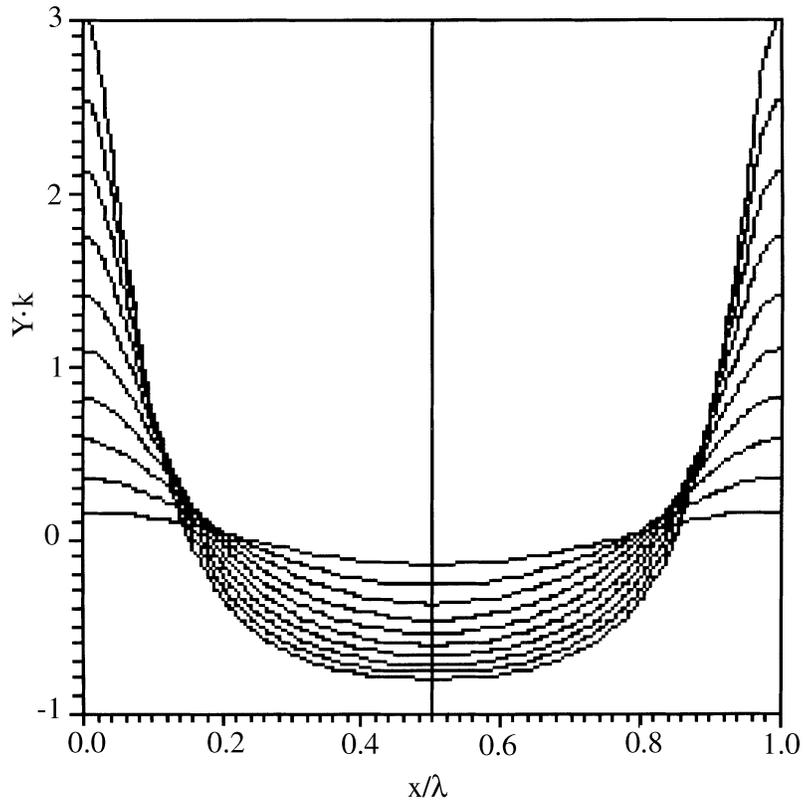
$$\varphi(x, t = +0) = AU Y(x, 0). \quad (19)$$

Начальное возмущение описывалось гармоническим законом, амплитуда начального возмущения составляла  $a = 0.001\lambda$ . Линейная теория [2] дает постоянную скорость роста амплитуды возмущения  $\dot{Y}_{RM} = AUk$ .



**Рис. 1.** Нормированные на линейную скорости роста пузыря  $\Gamma_b = \dot{Y}_b/\dot{Y}_{RM}$  и струи  $\Gamma_s = \dot{Y}_s/\dot{Y}_{RM}$  для различных чисел Атвуда.

На рис. 1 изображены нормированные на линейную скорости роста пузыря  $\Gamma_b = \dot{Y}_b/\dot{Y}_{RM}$  и струи  $\Gamma_s = \dot{Y}_s/\dot{Y}_{RM}$  для различных значений числа Атвуда. Кривые даны в зависимости от безразмерного времени  $\tau = (k^2 A U a) t$ . Для сравнения на график нанесены результаты работы [9], в которой решение получено в виде суммы степенного ряда. При выходе за радиус сходимости ряда в [9] использовалась аппроксимация решения. При этом, как следует из [9], аппроксимации разных порядков для  $\Gamma_s$  расходятся.



**Рис. 2.** Профили свободной границы в последовательные моменты времени  $\tau = 0.15, 0.30, 0.45, \dots, 1.50$  ( $A = 1$ ).

На рис. 2 изображены профили границы  $Y(x, t)$  в последовательные моменты времени  $\tau = 0.15, 0.30, 0.45, \dots, 1.50$  ( $A = 1$ ). Из начального гармонического профиля формируется пузырь с плоским дном и длинные узкие струи. Из рис. 1, 2 видно, что результаты наших расчетов согласуются с результатами работы авторов [9] в области применимости их модели. Однако предложенный нами метод в отличие от [9] позволяет описывать более поздние стадии развития неустойчивости.

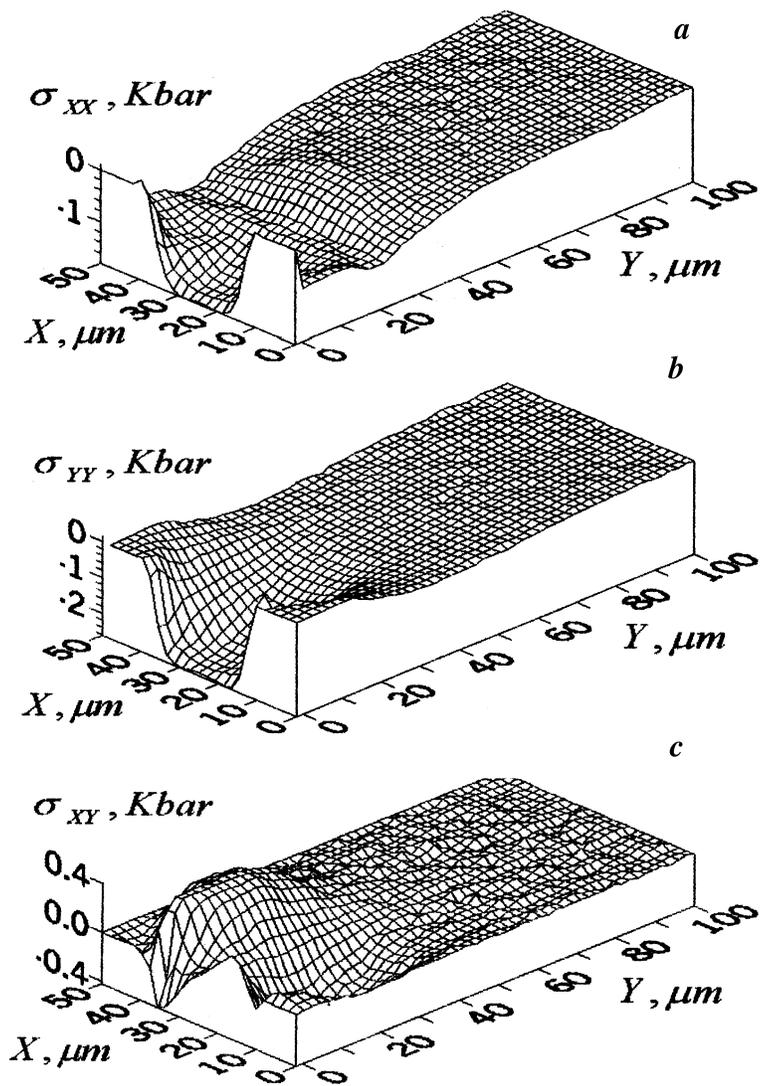


Рис. 3. Поля напряжений в медной мишени при воздействии на нее электронного пучка с плотностью тока около нескольких десятков  $\text{kA}/\text{cm}^2$ .

При облучении твердотельных мишеней интенсивными потоками заряженных частиц или лазерного излучения с плотностью потока мощностью более  $10^8 \text{ W/cm}^2$  образуется плазма, при разлете которой твердотельная часть вблизи границы с плазмой испытывает ускорения  $\sim 10^8 \div 10^{11} \text{ m/s}^2$ . В результате на границе плазмы и твердого тела развиваются неустойчивость РТ, вызывающая деформацию твердого тела и, как следствие, возникновение полей напряжения, величина которых сравнима с амплитудой волн напряжения, образующихся в результате обычного термоупругого механизма.

На рис. 3 приведены поля напряжений (в момент времени 100 ns), возникающих в медной мишени при ускорении среды  $10^{10} \text{ m/s}^2$ , действующем в течение 100 ns. Такие ускорения возникают, например, при облучении мишени электронным пучком с плотностью тока несколько десятков  $\text{kA/cm}^2$ . Упругопластические течения в твердом теле рассчитывались методом, предложенным в [12].

Таким образом, предложенный нами метод расчета неустойчивости РТ и РМ дает результаты, хорошо согласующиеся с результатами других авторов, а также позволяет в совокупности с решением уравнений МСС учесть упругие свойства среды. Отметим в связи с этим, что формирование полей напряжения в облучаемом твердом теле вследствие развития неустойчивости границы "плазма-твердое тело" имеет фундаментальное значение для понимания процессов модификации материалов с помощью воздействия на них интенсивных потоков излучения.

Работа частично поддержана Министерством образования РФ (проект 97-24-7.1-38).

## Список литературы

- [1] Chandrasekhar S. // Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, 1961.
- [2] Richtmyer R.D. Comm. on Pure and Appl. Math. 1960. V. 12. P. 297.
- [3] Мешков Е.Е. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. Т. 5. С. 151.
- [4] Sharp D.H. // Physica D. 1984. V. 12. P. 3.
- [5] Ryutov D.D., Derzon M.S., Matzen M.K. // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72. P. 167.
- [6] Иногамов Н.А. // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4. С. 743.
- [7] Белоцерковский О.М. // Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. М.: Наука, 1997.

- [8] Ферми Э. // Научные труды. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 493; Ферми Э., Нейман Дж. // Там же. С. 498.
- [9] Velikovich A.L., Dimonte G. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3112.
- [10] Neuvazhayev V.E., Parshukov I.E. // Mathematical Modelling and Applied Mathematics / Eds A.A. Samarsky, M.P. Sapagovas. North-Holland: IMACS, 1992. P. 323.
- [11] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. // Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [12] Яловец А.П. // ПМТФ. 1997. № 1. С. 151.