01;09

Новое интегральное уравнение для расчета тонкого электрического вибратора

© В.А. Неганов, М.Г. Корнев, И.В. Матвеев

Поволжская государственная академия
телекоммуникаций и информатики
E-mail: neganov@mail.ru

Поступило в Редакцию 11 июля 2000 г.
В окончательной редакции 20 сентября 2000 г.

Получено новое сингулярное интегральное уравнение относительно распределения тока в тонком электрическом вибраторе, позволяющее математически корректно подойти к расчету излучателя.

Введение. Расчет тонких электрических вибраторов основан, как правило, на решении интегродифференциальных уравнений Поклингтона и Харрингтона, а также интегрального уравнения Халлена [1–4]. Самым распространенным является метод моментов и его модификации, которые определяются выбором базисных функций. Основным недостатком этого подхода следует считать, на наш взгляд, то, что при решении указанных выше интегральных уравнений исходные сигнулярне ядра, записанные в неявном виде, заменяются на регулярные (Фредгольмовские). В результате получаются интегральные уравнения Фредгольма первого рода, нахождение решений которых является некорректно поставленной задачей [5]. Также остается открытым вопрос проверки истинности решения и установления его адекватности рассматриваемой физической задаче. В [6] был предложен новый класс функций для решения таких уравнений, называемых собственными функциями интегродифференциального оператора. Однако в результате использования таких функций алгоритм численного решения оказывается сильно усложненным.

Данная работа является дальнейшим развитием работ [7,8], в которых на основе математического аппарата теории сингулярных интегральных уравнений (СИУ), развитого для полосково-щелевых волноведущих структур сверх- и крайневысоких частот [9–11], были получены неоднородные СИУ относительно производной по продольной координате от плотности поверхностного тока на вибраторе. Недостатком этих уравнений является то обстоятельство, что неоднородные слагаемые в СИУ (правые части) имеют разрывы первого рода, затрудняющие их регуляризацию.

Основным отличием данной работы от статьи [8] является получение нового СИУ относительно плотности поверхностного тока с непрерывной правой частью.

1. Постановка задачи. Обобщенное интегральное уравнение Халлена. Рассмотрим тонкий проводник длиной $2L$ и радиусом a, возбуждаемый в точке разрыва генератором высокочастотных колебаний (рис. 1). При выводе уравненния будем использовать общепринятую модель тонкого электрического вибратора $(a \ll L, \lambda)$, согласно которой плотность продольного электрического тока η_z^e вместе с эквивалентной плотностью магнитного тока в зазоре заменяется расположенной на оси вибратора бесконечно тонкой нитью продольного электрического тока $I_z(z) = 2\pi a \eta_z^e(z)$. Этот ток считается непрерывным в области зазора и обращается в нуль на концах вибратора. Торцевые токи не учитываются.

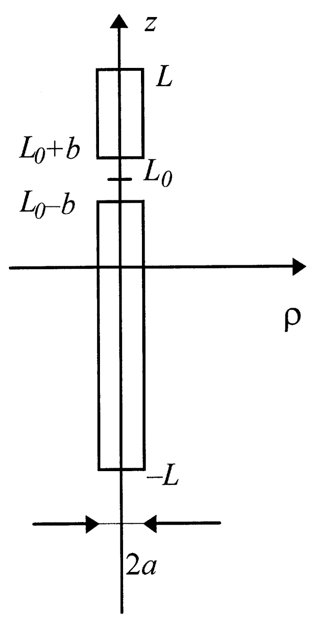

Рис. 1.

Составляющая вектора электрического поля E_z, создаваемая нитью тока, на поверхности цилиндра $\rho = a$ ($z \in [-L, L]$) обращается в нуль всюду, кроме области зазора $2b$, где она приравнивается к стороннему полю $E^0(z)$.

В рамках принятой физической модели при рассмотрении излучения вибратора, не зависящего от угла φ, справедливо уравнение Поклингтона [1–4]:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \gamma^2\right) \int\limits_{-L}^{L} \frac{I_z(z')}{R} e^{-i\gamma R} dz = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^0, \tag{1}$$

где $R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$; $\gamma^2 = k^2\varepsilon\mu$; $k = \omega/c$ — волновое число; ε, μ — соответственно относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости пространства, окружающего вибратор; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Понимая соотношение (1) как дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции (z-составляющая векторного потенциала), представленной определенным интегралом:

$$A_z = \int\limits_{-L}^{L} \frac{I_z(z')}{R} e^{-i\gamma R} dz'$$

и предполагая, что вибратор возбуждается постоянным сторонним полем E_0, определенным в области щели, т. е.

$$E^0(z) = \left\{ \begin{array}{ll} E_0, & z \in [L_0 - b, L_0 + b] \\ 0, & z \notin [L_0 - b, L_0 + b] \end{array} \right\}, \tag{2}$$

рассмотрим соотношение (1) в трех областях:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \gamma^2\right) A_z^{(1)} = 0, \qquad z \in [-L, L_0 - b],$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \gamma^2\right) A_z^{(2)} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_0, \qquad z \in [L_0 - b, L_0 + b],$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \gamma^2\right) A_z^{(3)} = 0, \qquad z \in [L_0 + b, L]. \tag{3}$$

Верхний индекс k ($k = 1, 2, 3$) указывает на принадлежность к соответствующей области. Уравнение (3) необходимо решать совместно с граничными условиями для тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на поверхностях раздела этих областей ($z = L_0 - b$, $z = L_0 + b$). Относительно z-составляющей векторного потенциала A_z граничные условия выглядят так:

$$A_z^{(1)} = A_z^{(2)}, \quad \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial A_z^{(2)}}{dz}, \quad z = L_0 - b,$$

$$A_z^{(2)} = A_z^{(3)}, \quad \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial A_z^{(3)}}{\partial z}, \quad z = L_0 + b. \tag{4}$$

Для случая симметричного вибратора ($L_0 = 0$) выражение для A_z можно записать следующим образом ($z \in [-L, L]$):

$$\int\limits_{-L}^{L} I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{R} dz' = C\cos(\gamma z) - \frac{2\pi i U}{\gamma b Z_c}\psi(z), \tag{5}$$

где

$$\psi(z) = \left\{ \begin{matrix} 1 - \cos(\gamma b)\cos(\gamma z), & z \in [-b, b] \\ \sin(\gamma b)\sin(\gamma |z|), & z \notin [-b, b] \end{matrix} \right\},$$

$U = 2bE_0$ — напряжение в зазоре вибратора, $Z_c = \sqrt{\mu_0\mu/\varepsilon_0\varepsilon}$ — характеристическое сопротивление среды, C — неизвестная постоянная, определяемая из дополнительных физических условий.

Интегральное уравнение (5) будет называть обобщенным интегральным уравнением Халлена. В предельном переходе при $b \to 0$ оно переходит в известное интегральное уравнение Халлена [1–4]:

$$\int\limits_{-L}^{L} I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{R} dz' = C\cos(\gamma z) - \frac{2\pi i U}{Z_c}\sin(k|z|). \tag{6}$$

Правая часть обобщенного интегрального уравнения Халлена (5) обладает непрерывной первой производной в отличие от известного уравнения (6), первая производная правой части которого при $z = 0$ имеет разрыв первого рода. Это обстоятельство является следствием того, что уравнение Халлена описывает случай возбуждения вибратора генератором, расположенным в точке $z = 0$ (разрыв вибратора имеет нулевую толщину). Поэтому уравнение (5), в отличие от известного (6), позволяет учитывать конечную ширину зазора b.

2. Сингулярное интегральное уравнение. Дифференцируя соотношение (5) по z и используя известное разложение [10]:

$$\frac{e^{-i\gamma R}}{R} = -\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} J_0(va) H_0^{(2)}(va)\,dh, \tag{7}$$

где $v = -i\sqrt{h^2 - \gamma^2}$, $J_0(va)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $H_0^{(2)}(va)$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, можно записать следующее интегральное уравнение:

$$\int\limits_{-L}^{L} I_z(z') G(z,z')\,dz' = 2\gamma\left[C\sin(\gamma z) + \frac{2\pi iU}{\gamma b Z_c}\psi'(z)\right], \tag{8}$$

где

$$G(z,z') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(h) e^{-ih(z-z')}\,dh = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h e^{-ih(z-z')} J_0(va) H_0^{(2)}(va)\,dh, \tag{9}$$

$$\psi'(z) = \left\{\begin{array}{ll} \cos(\gamma b)\sin(\gamma z), & z \in [-b, b] \\ \operatorname{sgn}(z)\sin(\gamma b)\cos(\gamma z), & z \notin [-b, b] \end{array}\right\}.$$

Рассматривая асимптотическое поведение подынтегральной функции в (9) при $|h| \to \infty$, можно показать, что

$$G_\infty(z,z') = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\lim_{|h|\to\infty} g(h)\right\} e^{-ih(z-z')}\,dh = \frac{2i}{z'-z}. \tag{10}$$

Таким образом, ядро $G(z,z')$ в интегральном уравнении (6) в неявном виде содержит сингулярность типа Коши (10) и поэтому является сингулярным.

Выделяя в (8) сингулярность (10) и переходя к новым переменным $z = Lt$, $z' = Lt'$, перепишем уравнение (8) в виде ($t \in [-1, 1]$):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{I_z(t')}{t'-t}dt' = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} I_z(t')g(t,t')dt' + \gamma a\left[C\sin(\gamma Lt) + \frac{2\pi iU}{\gamma bZ_c}\psi'(t)\right], \qquad (11)$$

где

$$g(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty}\Delta G(\beta)e^{-i\beta\lambda(t-t')}d\beta,$$

$$\Delta G(\beta) = \beta J_0(\beta)H_0^{(2)}(\beta) - \frac{i}{\pi}\mathrm{sgn}(\beta), \qquad \lambda = \frac{L}{a}.$$

Учитывая, что неизвестную постоянную C можно определить из (5) при $z = 0$:

$$C = \lambda\int_{-1}^{1} I(t')G_0(t')dt' + \frac{2\pi iU}{\gamma bZ_c}\psi_0, \qquad (12)$$

где

$$G_0(t) = \frac{e^{-i\gamma a\sqrt{\lambda^2t^2+1}}}{\sqrt{\lambda^2t^2+1}}, \qquad \psi_0 = 1 - \cos(\gamma b),$$

вместо (8) нетрудно записать следующее сингулярное интегральное уравнение ($t \in [-1, 1]$):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{I_z(t')}{t'-t}dt' + \int_{-1}^{1} I_z(t')M(t,t')dt' = \Phi(t), \qquad (13)$$

где

$$M(t,t') = -\frac{\lambda}{2}g(t,t') + \gamma LG_0(t')\sin(\gamma Lt),$$

$$\Phi(t) = [\psi_0\sin(\gamma Lt) + \psi'(t)]\,2\pi i\,\frac{a}{b}\frac{U}{Z_c}.$$

Соотношение (13) является неоднородным сингулярным интегральным уравнением (СИУ) первого рода относительно распределения тока $I_z(t)$ на тонком симметричном вибраторе и не имеет аналогов в научной литературе. Заметим, что СИУ (12) записано относительно поверхностной плотности тока, в отличие от СИУ (15) из [8], записанного производной по продольной координате от поверхностной плотности тока. Так как на практике обычно необходимо знание распределения тока на вибраторе, а не его производную, то использование СИУ (12) предпочтительнее, чем СИУ (15) из [8]. В частности, проще найти входное сопротивление: $Z = U/I_z(0)$, где $I_z(0)$ — значение тока при $z = 0$; U — напряжение поля в зазоре.

3. Решение СИУ. Численные результаты. Для решения СИУ (13) воспользуемся формулой обращения интеграла Коши. С учетом поведения функции $I_z(t)$ при $t = \pm 1$ $\big(I_z(1) - I_z(-1) = 0\big)$ она записывается следующим образом:

$$I_z(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{F(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau - t)} d\tau, \tag{14}$$

где

$$F(\tau) = \int\limits_{-1}^{1} I_z(t) M(\tau, t) dt - \Phi(\tau).$$

Уравнение (14) есть неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $I_z(t)$.

Заметим, что СИУ (12) имеет непрерывную правую часть, в отличие от правой части СИУ (15) из [8], которая при $z = \pm b$ имеет разрыв первого рода. Как следствие, регуляризация СИУ (15) из [8] с помощью формул обращения интеграла Коши требует выделения этих особенностей. Без использования специальных мер (см., например, [12]) интеграл Коши в интегральном уравнении Фредгольма второго рода (17) в [8] будет расходящимся. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (14) в настоящей статье не обладает таким существенным недостатком.

Уравнение (14) исследовалось численно методом механических квадратур [13]. На рис. 2, 3 приведены характерные распределения действительной $\mathrm{Re}\{I_z(t)\}$ и мнимой $\mathrm{Im}\{I_z(t)\}$ составляющих тока на

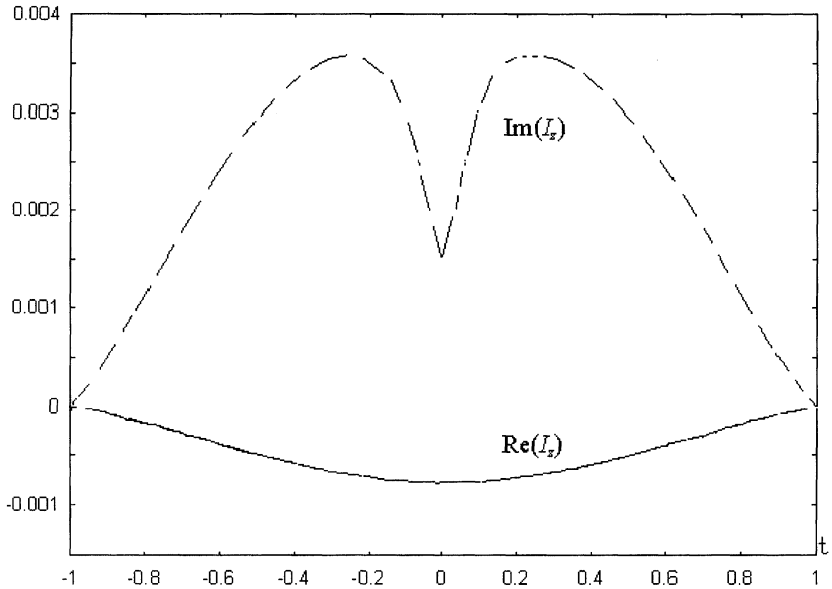

Рис. 2.

вибраторе при $b/L = 1/100$, $a/\lambda = 1/40$. Рис. 2 соответствует $L/\lambda = 1/4$, рис. 3 — $L/\lambda = 1/2$. Сплошными линиями показаны $\mathrm{Re}\{I_z(t)\}$, а штрихованными линиями — $\mathrm{Im}\{I_z(t)\}$. Результаты работы показали хорошее согласие с результатами работ [6,7].

Заключение. Таким образом, в данной статье можно выделить два новых и важных для практики и теории результата. Во-первых, получено обобщенное интегральное уравнение Халлена (5), которое имеет ряд преимуществ перед известным в теории антенн уравнением Халлена (6): правая часть обобщенного уравнения (5) обладает непрерывной первой производной, в то время как первая производная правой части (6) имеет разрыв первого рода, что существенно затрудняет его решение. Как следствие, уравнение (5) позволяет учитывать конечную ширину зазора b, в отличие от уравнения (6), которое записано для случая, когда разрыв вибратора имеет нулевую толщину: $b \equiv 0$. Во-вторых,

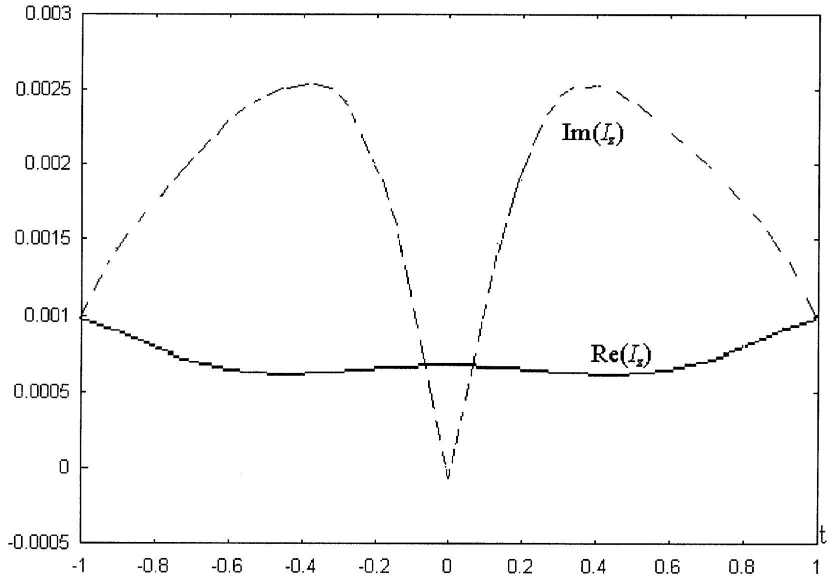

Рис. 3.

предложенный подход, базирующийся на использовании математического аппарата теории СИУ, позволил получить новое интегральное уравнение Фредгольма второго рода (14) относительно поверхностной плотности тока на вибраторе с непрерывной правой частью. Полученное уравнение второго рода позволяет математически корректно подойти к анализу тонкого электрического вибратора. В частности, при его решении не возникает явление относительной сходимости, имеющее место при решениии уравнений Фредгольма первого рода [4,5], к которым относится известное уравнение Халлена. Полученное в работе новое СИУ, в принципе, может стать основой для получения приближенных аналитических формул для тока на вибраторе. Представленный метод полностью решает проблему расчета входных проводимостей и входных сопротивлений вибраторных антенн.

Список литературы

[1] *Вычислительные* методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 486 с.
[2] *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ: Учебник для радиотехнических специальностей вузов. М.: Высш. школа, 1988. 432 с.
[3] *Антенно-фидерные* устройства и распространение радиоволн: Учебник для вузов / Г.А. Ерохин, О.В. Чернышев, Н.Д. Козырев, В.Г. Кочершевский. Под ред. Г.А. Ерохина. М.: Радио и связь, 1996. 352 с.
[4] *Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Линейная макроскопическая электродинамика / Под ред. В.А. Неганова. Т. 1. М.: Радио и связь, 2000. 509 с.
[5] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
[6] *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. С. 2160–2168.
[7] *Неганов В.А., Матвеев И.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43. № 3. С. 412–420.
[8] *Неганов В.А., Матвеев И.В., Медведев С.В.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 12. С. 86–94.
[9] *Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П.* Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневысоких частот. М.: Наука, Физматлит, 1996. 304 с.
[10] *Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П.* Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневысоких частот. М.: Педагогика-Пресс, 1998. 328 с.
[11] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.–Л.: Энергия, 1967. 376 с.
[12] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
[13] *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарук З.Т.* Метод сигнулярных интегральных уравнений в двухмерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.