01;03;11

К проблеме существования сингулярного стационарного профиля заряженной поверхности проводящей жидкости

© *Н.М. Зубарев*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 30 августа 2000 г.

Доказывается утверждение о том, что в плоской геометрии не существует равновесной конфигурации свободной заряженной поверхности проводящей жидкости, обеспечивающей неограниченное локальное усиление электрического поля.

Экспериментальные данные [1], а также результаты численного моделирования [2,3] свидетельствуют о том, что на поверхности проводящей жидкости (жидкого металла) в достаточно сильном внешнем электрическом поле за конечное время формируются острия. Это обусловливает интерес к вопросу о возможности существования равновесной сингулярной конфигурации заряженной свободной эквипотенциальной поверхности. Известно частное сингулярное решение задачи о стационарном профиле границы проводящей жидкости — так называемый конус Тейлора [1]. Однако условие баланса сил для конуса Тейлора нарушается в особой точке — его вершине, так что подобное решение задает лишь возможную асимптотическую форму поверхности на значительном удалении от острия.

В настоящей работе будет показано, что в случае плоской геометрии системы существование равновесной конфигурации поверхности проводящей жидкости, вблизи которой индуцированное электрическое поле значительно превышало бы внешнее поле E_0, невозможно. Алгоритм доказательства следующий: в предположении о допустимости существования острийных образований будет получено общее решение уравнений, описывающих равновесную форму поверхности; затем продемонстрировано, что эти решения не могут быть реализованы физически.

Стационарный профиль поверхности проводящей жидкости (считаем, что он задается неизвестной функцией η) определяется условием баланса сил на границе жидкости:

$$E^2/(8\pi) + \alpha K = E_0^2/(8\pi) + \rho g \eta, \qquad y = \eta(x), \tag{1}$$

где $E = |\nabla\varphi|$ — абсолютное значение напряжения электрического поля (φ — потенциал поля), $K(x) = \eta_{xx}/(1+\eta_x^2)^{3/2}$ — кривизна поверхности, α — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение свободного падения, а ρ — плотность среды. Распределение потенциала электрического поля в отсутствие пространственных зарядов задается уравнением Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

которое следует решать совместно с условием эквипотенциальности поверхности проводящей жидкости и условием однородности поля на бесконечном удалении от поверхности:

$$\varphi = 0, \qquad y = \eta(x),$$

$$\varphi \to -E_0 y, \qquad y \to \infty.$$

Рассмотрим интересующий нас случай, когда поле на поверхности значительно превышает внешнее, т.е. когда $E \gg E_0$, что характерно для всевозможных острийных образований — углов, точек возврата. В таком случае членами в правой части уравнения (1) можно пренебречь, и условие равновесия записывается в виде:

$$E^2/(8\pi) + \alpha K = 0, \qquad y = \eta(x).$$

Принимая E_0 за единицу напряженности электрического поля и $8\pi\alpha E_0^{-2}$ за единицу длины, получим:

$$E^2 - E_\varphi = 0, \qquad y = \eta(x), \tag{2}$$

где мы учли, что кривизна эквипотенциальной поверхности может быть выражена через потенциал поля [4]: $K = -|\nabla\varphi|_\varphi$.

Для дальнейших преобразований оказывается удобным выбрать в качестве независимых переменных потенциал φ и гармонически сопряженную к нему функцию ψ (условие $\psi = \mathrm{const}$ задает силовые линии электрического поля), а в качестве неизвестной функции — функцию $f = \ln E$. Она является гармонической функцией переменных x и y [4] и, как следствие, переменных φ и ψ:

$$f_{\psi\psi} + f_{\varphi\varphi} = 0. \tag{3}$$

Граничное условие (2) переписывается в виде:

$$f_\varphi = \exp f, \qquad \varphi = 0, \tag{4}$$

а поскольку в безразмерных переменных $E \to 1$ при $z \to \infty$, то, очевидно, функция f затухает на бесконечности:

$$f \to 0, \qquad \varphi \to -\infty. \tag{5}$$

Таким образом, вместо исходной краевой задачи с неизвестной границей мы получаем нелинейную краевую задачу (3)–(5) на полуплоскости $\varphi < 0$.

Используя известное решение уравнения Лапласа на полуплоскости для затухающих на бесконечности функций, запишем:

$$f(\psi,\varphi) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi f(\psi',0)}{(\psi'-\psi)^2+\varphi^2}\,d\psi', \qquad \varphi < 0.$$

Дифференцируя это выражение по ψ, получим на границе:

$$f_\varphi\big|_{\varphi=0} = -\hat{H}\tilde{f}_\psi,$$

где мы обозначили $\tilde{f}(\psi) = f|_{\varphi=0}$, а $\hat{H}$ — интегральный оператор Гильберта:

$$\hat{H}\tilde{f} = \frac{1}{\pi}\mathrm{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(\psi')}{\psi'-\psi}\,d\psi'.$$

Используя данные соотношения, мы можем исключить производную f_φ из (4) и тем самым свести двумерную краевую задачу (3)–(5) к следующему одномерному интегродифференциальному уравнению:

$$\hat{H}\tilde{f}_\psi = -\exp\tilde{f}.$$

Действуя на обе части этого уравнения оператором Гильберта и учитывая, что $\hat{H}^2 = -1$, получим:

$$\tilde{E}_\psi = \tilde{E}\hat{H}\tilde{E}, \tag{6}$$

где функция $\tilde{E} = E|_{\varphi=0} = \exp\tilde{f}$ задает абсолютное значение электрического поля на границе проводящей жидкости. Как показано, данное уравнение описывает распределение на равновесной поверхности в предположении, что индуцированное поле значительно превышает внешнее.

Для его решения представим $\tilde{E}$ в виде суммы двух функций, $\tilde{E} = \tilde{E}^{(+)} + \tilde{E}^{(-)}$, аналитических в верхней и соответственно нижней полуплоскостях комплексной переменной ψ. Подставляя это выражение в (6) и учитывая, что $\hat{H}\tilde{E}^{(\pm)} = \pm i\tilde{E}^{(\pm)}$, получим пару обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\tilde{E}^{(\pm)}_\psi = \pm i\left[\tilde{E}^{(\pm)}\right]^2.$$

Их решение дается формулой: $\tilde{E}^{(\pm)} = \pm i/(\psi \pm iq)$, где для постоянной q справедливо: $\mathrm{Re}\, q > 0$. Не теряя общности, можно считать эту постоянную вещественной. Тогда решением уравнения (6) будет:

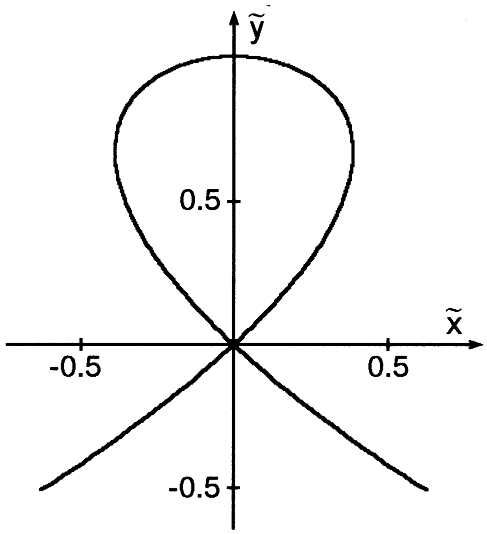
$$\tilde{E} = 2q/(\psi^2 + q^2). \tag{7}$$

Построим поверхность, соответствующую этому решению. Заметим, что угол наклона вектора напряженности электрического поля к оси абсцисс θ является гармонически сопряженной к f функцией [4]. Тогда выполняется условие Коши–Римана $\theta_\psi = f_\varphi$ и, как следует из уравнения (4), на поверхности $\varphi = 0$ справедливо:

$$\tilde{\theta}_\psi = \exp\tilde{f} = \tilde{E},$$

где $\tilde{\theta} = \theta|_{\varphi=0}$. Подставляя сюда выражение (7) и затем интегрируя получившееся соотношение по ψ, получим для угла:

$$\tilde{\theta} = \pi/2 + 2\mathrm{arctg}(\psi/q).$$



Переход к переменным x и y осуществляется при помощи преобразования [4]:

$$x + iy = i \int \tilde{E}^{-1} \exp(i\tilde{\theta}) d\psi.$$

Вычисляя интеграл в правой части этого соотношения, разделяя вещественную и мнимую части и, наконец, исключая параметр ψ, находим:

$$\tilde{x}^2 = \tilde{y}^2 - \tilde{y}^3,$$

где $\tilde{y} = 2y/(3q^2)$, $\tilde{x} = 2x/(\sqrt{3}q^2)$, что соответствует так называемому параболическому листу (см. рисунок). Эта поверхность самопересекается в точке $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$, т.е. найденное нами решение физически не реализуется.

Это означает, что наше предположение о том, что поле на равновесной поверхности может значительно превышать внешнее поле E_0, неверно и в двумерной геометрии не существует сингулярных (острийных) стационарных конфигураций заряженной поверхности проводящей жидкости, обеспечивающих неограниченное локальное усиление электрического поля в точке заострения (излома).

Как следствие, существует предельно допустимое значение возмущения поля на равновесной поверхности, зависящее от величины внешнего поля и параметров среды. Так, например, для найденного в [4,5] класса решений задачи о стационарной конфигурации проводящей жидкости для случая $g = 0$ (т.е. без учета сил тяжести) максимально возможное значение поля на поверхности составляет $7.1\,E_0$.

Следует также отметить, что аналогичная ситуация возникает и для диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом, обеспечивающим ее эквипотенциальность. В этом случае в уравнении баланса сил (1) появится дополнительное слагаемое, ответственное за электростатическое давление вблизи поверхности со стороны жидкости. Очевидно, что вблизи острий это слагаемое будет пренебрежимо малым — вблизи особой точки поверхность будет экранировать электрическое поле, и для описания формы поверхности вполне применимо уравнение (2). А тогда для диэлектрической жидкости, как и для проводящей жидкости, в плоской геометрии не может существовать равновесных острийных структур.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00–02–17428) и INTAS (проект 99–1068).

Список литературы

[1] *Taylor G.I.* // Proc. R. Soc. A. 1964. V. 280. P. 383.
[2] *Pregenzer A.L., Marder B.M.* // J. Appl. Phys. 1986. V. 60. N 11. P. 3821.
[3] *Suvorov V.G., Litvinov E.A.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2000. V. 33. P. 1245.
[4] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990.
[5] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 79.