02;07

Предельная степень поляризации немонохроматического излучения, распространяющегося в волоконном световоде со случайными неоднородностями

© *Г.Б. Малыкин, В.И. Позднякова, И.А. Шерешевский*

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Поступило в Редакцию 12 июля 2000 г.

Посвящена аналитическому исследованию поведения степени поляризации немонохроматического излучения, распространяющегося в ОВС со случайными неоднородностями, при неограниченном возрастании длины световода. Показано, что среднее значение степени поляризации некогерентного излучения, прошедшего через волокно со случайными неоднородностями, стремится к нулю при стремлении длины волокна к бесконечности.

Вопрос об оценке степени поляризации немонохроматического излучения при его распространении в одномодовых волоконных световодах (ОВС) возникает в связи с широким применением оптических волокон в различных перспективных областях. Степень поляризации немонохроматического излучения обусловливает поляризационную чувствительность интерферометрических волоконных датчиков различных физических параметров. В качестве примера можно указать волоконные кольцевые интерферометры (ВКИ) [1–6], дрейф нуля интерференционного сигнала на выходе которых определяется степенью поляризации немонохроматического излучения. Отличие значения степени поляризации немонохроматического излучения от нуля приводит также к ряду нежелательных явлений в длинных линиях связи, созданных на основе ОВС [7].

В литературе высказывались различные, порой противоречивые предположения о величине предельной степени поляризации (см., например, [8–12]). Цель данной работы — показать, что при неограниченном возрастании длины ОВС со случайными неоднородностями степень поляризации немонохроматического излучения стремится к нулю. Рассмотрение будет проведено в рамках математической модели случайных неоднородностей в ОВС, предложенной нами в работе [12].

Вычисление предельного среднего значения квадрата степени поляризации немонохроматического излучения, распространяющегося в ОВС со случайными неоднородностями, проводится на основании результатов, полученных в нашей работе [13]. В [13] показано, что проблема нахождения предела среднего по ансамблю волокон значения степени поляризации сводится к задаче о распределениях (в том числе и совместных) случайных векторов $\mathbf{E}(\lambda, z)$ комплексных амплитуд электрического поля световой волны при различных длинах волн λ и стремления длины волокна z к бесконечности. Заметим, что наряду со случайным вектором $\mathbf{E}(\lambda, z)$, описывающим комплексную амплитуду электрического поля в точке волокна z, можно рассматривать случайный вектор $\mathbf{E}_N(\lambda)$, описывающий поле на выходе волокна, состоящего точно из N случайных отрезков. Естественно предположить, что при больших N статистика вектора $\mathbf{E}_N(\lambda)$ близка к статистике вектора $\mathbf{E}(\lambda, N\langle l\rangle)$, где $\langle l\rangle$ — средняя длина случайных отрезков волокна, на которые, согласно нашей модели [12], разбито волокно и в пределах каждого из которых кручение осей анизотропии считается постоянным. Переход от случайного вектора $\mathbf{E}(\lambda, z)$ к случайному вектору $\mathbf{E}_N(\lambda)$ существенно упрощает анализ, а правомочность такой замены подтверждается численным экспериментом, описанным в [15]. В [13] доказывается, что при $N \to \infty$ распределение случайного комплексного вектора $\mathbf{E}_N(\lambda)$ является равномерным на трехмерной сфере, а предельное совместное распределение векторов $\mathbf{E}_N(\lambda_1)$ и $\mathbf{E}_N(\lambda_2)$ полностью определяется распределением каждого из них, поскольку при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ эти вектора независимы. В данной работе мы покажем, что равенство нулю предельного среднего значения квадрата степени поляризации, а значит и самой степени поляризации, является следствием этих двух утверждений.

Для вычисления среднего значения квадрата степени поляризации мы будем использовать формулу [14]:

$$\langle p_N^2\rangle = 1 - \left\langle \frac{4\det J_N}{\mathrm{tr}^2 J_N} \right\rangle, \tag{1}$$

где J_N — матрица когерентности немонохроматического излучения на выходе волокна, состоящего из N случайных отрезков:

$$J_N = \int J_N(\lambda)d\lambda = \int \mathbf{E}_N(\lambda)\mathbf{E}_N^{\dagger}(\lambda)d\lambda, \tag{2}$$

а † означает эрмитово сопряжение.

Пусть на вход волокна подается немонохроматическое излучение $\mathbf{E}_0(\lambda)$, характеризующееся функцией спектральной плотности $B(\lambda) = \mathbf{E}_0^{\dagger}(\lambda)\mathbf{E}_0(\lambda)$. Поскольку мы рассматриваем волокна без потерь, то полная энергия излучения, равная $\int B(\lambda)d\lambda$, сохраняется при распространении излучения в ОВС, и можно считать, что $\int B(\lambda)d\lambda = 1$. В рамках модели [12] вектора излучения на входе и выходе волокна, состоящего из N случайных отрезков, связаны соотношением

$$\mathbf{E}_N(\lambda) = U_N(\lambda)\mathbf{E}_0(\lambda), \tag{3}$$

где $U_N(\lambda)$ — унитарная 2×2 матрица (иначе, матрица Джонса ОВС, состоящего из N случайных отрезков). Учитывая (3), перепишем выражение (2) в виде:

$$J_N = \int U_N(\lambda)\mathbf{E}_0(\lambda)\mathbf{E}_0^{\dagger}(\lambda)U_N^{\dagger}(\lambda)d\lambda. \tag{4}$$

Поскольку след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей, а матрица $U_N(\lambda)$ унитарна, из (4) получаем:

$$\operatorname{tr} J_N = \int \operatorname{tr}\left(\mathbf{E}_0^{\dagger}(\lambda)U_N^{\dagger}(\lambda)U_N(\lambda)\mathbf{E}_0(\dot{\lambda})\right)d\lambda = \int B(\lambda)d\lambda = 1. \tag{5}$$

Таким образом, след матрицы когерентности в любой точке волокна равен единице независимо от конкретной реализации неоднородностей в нем, и для того, чтобы найти предельное среднее значение квадрата степени поляризации излучения, используя формулу (1), необходимо вычислить среднее значение детерминанта матрицы J_N при $N \to \infty$.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ортонормированный базис в пространстве двумерных комплексных векторов, тогда

$$\operatorname{tr} J_N = (J_N\,\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + (J_N\,\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), \tag{6}$$

$$\det J_N = (J_N\,\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)(J_N\,\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) - |(J_N\,\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)|^2. \tag{7}$$

Очевидно, для того чтобы вычислить $\langle \det J_N \rangle$, нужно уметь находить $\langle (J_N\,\mathbf{s},\mathbf{r})(J_N\,\mathbf{u},\mathbf{v}) \rangle$ для произвольных векторов $\mathbf{s}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Рассмотрим билинейную форму:

$$(J_N\,\mathbf{s},\mathbf{r}) = \int \big(\mathbf{s}, \mathbf{E}_N(\lambda)\big)\big(\overline{\mathbf{r}, \mathbf{E}_N(\lambda)}\,\big)d\lambda,$$

и найдем сначала предельное среднее значение для нее.

В силу равномерности распределения вектора $\mathbf{E}_N(\lambda)$ на трехмерной сфере радиуса $B(\lambda)$ при $N \to \infty$ имеем:

$$\langle (J_\infty\,\mathbf{s},\mathbf{r}) \rangle = \int B(\lambda)d\lambda \int\limits_{s^3} (\mathbf{s},\boldsymbol{\nu})(\overline{\mathbf{r},\boldsymbol{\nu}})d\boldsymbol{\nu} = f(\mathbf{s},\mathbf{r}),$$

где s^3 — трехмерная сфера единичного радиуса, а f — некоторая функция двух векторных аргументов. Легко показать, что функция f инвариантна относительно произвольного поворота, задаваемого унитарной матрицей V, т.е. $f(V\mathbf{s},V\mathbf{r}) = f(\mathbf{s},\mathbf{r})$, и, кроме того, она линейна по первому аргументу и антилинейна по второму. Покажем теперь, что $f(\mathbf{s},\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{s},\mathbf{r})$, где $\alpha = \mathrm{const}$. Зафиксировав первый аргумент функции f и используя свойство линейности, получаем, что $f(\mathbf{s},\mathbf{r}) = (g(\mathbf{s}),\mathbf{r})$, где $g(\mathbf{s})$ — линейная функция своего аргумента, которая в конечномерном векторном пространстве представляется квадратной матрицей: $g(\mathbf{s}) = G\mathbf{s}$. Таким образом, $f(\mathbf{s},\mathbf{r}) = (G\mathbf{s},\mathbf{r})$. Воспользовавшись инвариантностью функции f относительно поворота, имеем: $(GV\mathbf{s},V\mathbf{r}) = (V^\dagger GV\mathbf{s},\mathbf{r}) = (G\mathbf{s},\mathbf{r})$, т.е. $G = V^\dagger GV$ для любой унитарной матрицы V. В силу Леммы Шура [16] все собственные числа матрицы G, обладающей таким свойством, совпадают, т.е. $G = \alpha E$, где E — единичная матрица. Итак, $\langle (J_\infty\mathbf{s},\mathbf{r}) \rangle = \alpha(\mathbf{s},\mathbf{r})$, где α — некоторая константа. Чтобы найти эту константу, вычислим предельное среднее значение следа матрицы когерентности. Используя формулу (6), имеем: $\langle \mathrm{tr}\,J_\infty \rangle = 2\alpha$, но, с другой стороны, в силу (5) $\mathrm{tr}\,J_\infty = \mathrm{tr}\,J_0 = 1$. Таким образом, $\alpha = 1/2$, а

$$\langle (J_\infty\mathbf{s},\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{s},\mathbf{r}). \tag{8}$$

Теперь найдем $\langle (J_\infty\mathbf{s},\mathbf{r})(J_\infty\mathbf{u},\mathbf{v}) \rangle$.

$$(J_N\,\mathbf{s},\mathbf{r})(J_N\,\mathbf{u},\mathbf{v})$$
$$= \iint \big(\mathbf{s},\mathbf{E}_N(\lambda_1)\big)\big(\overline{\mathbf{r},\mathbf{E}_N(\lambda_1)}\big)\big(\mathbf{u},\mathbf{E}_N(\lambda_2)\big)\big(\overline{\mathbf{v},\mathbf{E}_N(\lambda_2)}\big)d\lambda_1 d\lambda_2.$$

В силу независимости векторов $\mathbf{E}_N(\lambda_1)$ и $\mathbf{E}_N(\lambda_2)$ при $N \to \infty$, а также равномерности их предельных распределений имеем:

$$\langle (J_\infty \mathbf{s}, \mathbf{r})(J_\infty \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$$

$$= \iint B(\lambda_1)B(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \int\limits_{s^3}\int\limits_{s^3} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\nu})(\overline{\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}})(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})(\overline{\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}}) d\boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{\eta}$$

$$= \Big(\int B(\lambda)d\lambda \Big)^2 \int\limits_{s^3} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\nu})(\overline{\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}}) d\boldsymbol{\nu} \int\limits_{s^3} (\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})(\overline{\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}}) d\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{4}(\mathbf{s}, \mathbf{r})(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Применяя полученный результат к соотношению (7) и учитывая, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — ортонормированные вектора, получаем, что $\langle \det J_\infty \rangle = 1/4$. Таким образом, из (1) следует, что $\langle p_\infty^2 \rangle = 0$, а поскольку $\langle p_\infty \rangle \leqslant \sqrt{\langle p_\infty^2 \rangle}$, то и $\langle p_\infty \rangle = 0$.

Более детальный анализ [13,17] показывает, что стремление к нулю среднего квадрата степени поляризации при больших длинах волокна z хорошо описывается асимптотической формулой

$$\langle p^2(z) \rangle \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{z}}.$$

К сожалению, для остаточного члена этой формулы, зависящего от параметров ОВС, не удается получить простое аналитическое выражение.

Работа частично поддержана грантами № 00–15–96732 и 00–02–17344 РФФИ.

Список литературы

[1] *Burns W.K., Moeller R.P.* // J. Lightwave Techn. 1984. V.LT-2. N 4. P. 430–435.

[2] *Козел С.М., Листвин В.Н., Шаталин С.В., Юшкайтис Р.В.* // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61. В. 6. С. 1259–1299.

[3] *Малыкин Г.Б.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 7. С. 817–824.

[4] *Малыкин Г.Б., Нефедов И.М., Шерешевский И.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. № 11. С. 1437–1480.

[5] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* // Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 84. № 1. С. 145–151.

[6] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* // Оптика и спектроскопия. 1999. Т. 86. № 3. С. 513–521.

[7] *Poole C.D.* // Opt. Lett. 1988. V. 13. N 8. P. 687–689.
[8] *Burns W.K., Moeller R.P., Chen C.L.* // J. Lightwave Techn. 1983. V. LT-1. N 1. P. 44–49.
[9] *Залогин А.Н., Козел С.М., Листвин В.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 2. С. 243–245.
[10] *Малыкин Г.Б.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. № 11-12. С. 993–997.
[11] *Малыкин Г.Б., Нефедов И.М., Шерешевский И.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. № 10. С. 1311–1320.
[12] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И., Шерешевский И.А.* // Оптика и спектроскопия. 1997. Т. 83. № 5. С. 843–852.
[13] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И., Шерешевский И.А.* // Об асимптотике степени поляризации немонохроматического излучения, распространяющегося в волоконном световоде со случайными неоднородностями. Препринт ИПФ РАН № 528. Н. Новгород, 2000. 40 с.
[14] *Mandel L., Wolf E.* // Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge: Univ. Press, 1995. 1166 p.
[15] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И., Шерешевский И.А.* // Оптика и спектроскопия. 2000. Т. 88. № 3. С. 477–491.
[16] *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980. Т. 1. 455 с.; Т. 2. 395 с. (Barut A., Raczka R.) // Theory of group representations and applications. PWN–Polish Scientific Publishers. Warszawa, 1977).
[17] *Rashleigh S.C.* // J. Lightwave Techn. 1983. V. LT-1. N 2. P. 312–331.