01;09

Восстановление моделей скалярных систем с запаздыванием по временным рядам

© А.С. Караваев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: mdprokh@ire.san.ru

Поступило в Редакцию 9 января 2001 г.

Предложен новый метод восстановления скалярных систем с запаздыванием по временны́м рядам. Метод отличается простотой, быстродействием и может быть успешно применен для анализа зашумленных данных. Работоспособность метода проиллюстрирована на примере временны́х рядов, полученных в численном эксперименте, в том числе при добавлении шума, и на примере временны́х рядов реальной радиофизической системы.

1. Системы, динамика которых определяется не только текущим состоянием, но и состоянием в прошлом, т. е. системы с запаздыванием представляют собой большой класс динамических систем, для описания которых широко используются модели в виде дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [1–3]. Модельные уравнения могут быть восстановлены по экспериментальным временны́м рядам и использованы для определения параметров исследуемой системы с запаздыванием. В качестве таких моделей для многих физических и биологических систем с задержкой используются дифференциальные уравнения первого порядка с запаздыванием, имеющие следующий общий вид:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f\big(x(t-\tau_0)\big), \tag{1}$$

где x — динамическая переменная, f — нелинейная функция, τ_0 — время запаздывания, ε — безразмерный параметр, характеризующий отношение времени релаксации ко времени запаздывания. Для однозначного определения эволюции системы необходимо задать начальные условия на всем интервале $[x(t_0-\tau_0), x(t_0)]$. Таким образом, система обладает бесконечно большим числом степеней свободы, и для ее однозначного описания необходимо бесконечномерное фазовое пространство. Однако, как было показано в работах [4,5], если спроецировать траекторию, задаваемую уравнением (1), из бесконечномерного фазового пространства в трехмерное пространство $(x(t-\tau_0),\, x(t),\, \dot{x}(t))$, то множество точек, посещаемых системой в этом пространстве, располагается на двумерной поверхности. Сечение этой поверхности плоскостью $\dot{x}(t)=0$ определяет вид нелинейной функции, так как при этом согласно уравнению (1):

$$x(t) = f\big(x(t-\tau_0)\big). \tag{2}$$

Поскольку заранее время задержки τ_0 неизвестно, временно́й ряд проецируется в трехмерные пространства $(x(t-\tau),\, x(t),\, \dot{x}(t))$ с различными значениями τ и для $\dot{x}(t)=0$ строятся сечения $(x(t-\tau),\, x(t))$ этих пространств. Однозначная зависимость (2) в этих сечениях будет иметь место лишь при $\tau=\tau_0$. В качестве количественного критерия при поиске τ_0 могут быть использованы, например, различные меры сложности спроецированного временно́го ряда [4–8] или минимальная ошибка прогноза построенной модели [9,10].

В нашей работе предложен новый метод восстановления скалярных систем с запаздыванием по временны́м рядам, в основе которого лежит статистический анализ производных наблюдаемой динамической переменной в точках ряда. Работа направлена на реконструкцию модельных дифференциальных уравнений вида (1): определение по временно́му ряду времени запаздывания τ_0, нелинейной функции $f(x(t-\tau_0))$ и параметра ε.

2. Предлагаемый метод базируется на следующих соображениях. Продифференцируем модельное уравнение (1) по времени:

$$\varepsilon\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + \frac{df\big(x(t-\tau_0)\big)}{dx(t-\tau_0)}\,\dot{x}(t-\tau_0). \tag{3}$$

Для абсолютного большинства точек хаотической траектории уравнения (1) $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ одновременно в ноль не обращаются (в общем случае для функции $x(t)$ условие $\dot{x}(t)=\ddot{x}(t)=0$ может выполняться либо в точке, которая является точкой перегиба или точкой экстремума, отличного от квадратичного, либо должен быть интервал, на котором динамическая переменная не меняется). Тогда, если $\dot{x}(t)=0$, то $\ddot{x}(t)\neq 0$ и из уравнения (3) следует: $\dot{x}(t-\tau_0)\neq 0$. Это означает, что $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t-\tau_0)$ одновременно в ноль не обращаются. При $\tau\neq\tau_0$ соотношение (3) не выполняется и производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t-\tau_0)$ могут быть равны нулю одновременно. Проведенные рассуждения используются нами для определения по временнóму ряду заранее неизвестного времени запаздывания τ_0. Для этого сначала найдем на траектории точки экстремумов, т.е. точки, для которых $\dot{x}(t) = 0$. Затем для различных значений τ определим по всему временнóму ряду число N ситуаций, при которых $\dot{x}(t) = \dot{x}(t-\tau) = 0$. Построим зависимость $N(\tau)$ (см., например, рис. $1, b$). Абсолютный минимум зависимости $N(\tau)$ будет наблюдаться при $\tau = \tau_0$. Предложенный нами способ определения времени запаздывания отличается простотой и быстродействием. Он требует в десятки раз меньше вычислительных затрат, чем известные методы восстановления систем с запаздыванием, поскольку после необходимого практически для каждого метода определения $\dot{x}(t)$ использует только операции сравнения и сложения, не требуя вычисления ошибки аппроксимации или каких-либо мер сложности движения[1].

Определив время запаздывания τ_0, мы можем восстановить вид нелинейной функции $f(x(t-\tau_0))$, откладывая на плоскости $(x(t-\tau_0), x(t))$ точки, для которых $\dot{x}(t) = 0$. Согласно соотношению (2), построенная таким образом зависимость воспроизведет неизвестную априорно нелинейную функцию. Восстановив $f\big(x(t-\tau_0)\big)$, можно найти и параметр ε, так как из уравнения (1): $\varepsilon = \big(f(x(t-\tau_0)) - x(t)\big)/\dot{x}(t)$.

3. Работоспособность предложенного нами метода продемонстрирована на численных и экспериментальных примерах. Рассмотрим сначала скалярный временнóй ряд (рис. $1, a$), сгенерированный уравнением Маккея–Гласса:

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t-\tau_0)}{1 + x^c(t-\tau_0)} \tag{4}$$

при $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10$ и $\tau_0 = 300$, соответствующих движению на хаотическом аттракторе. Уравнение (4) может быть приведено к виду (1) при введении обозначений: $\varepsilon = 1/b$ и

$$f\big(x(t-\tau_0)\big) = \frac{ax(t-\tau_0)}{b(1 + x^c(t-\tau_0))}. \tag{5}$$

[1] Одновременно с $\dot{x}(t)$ можно определять $\ddot{x}(t)$ и исключать из рассмотрения точки ряда, для которых $\dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0$. Однако проведенные нами исследования свидетельствуют, что для большинства временны́х реализаций систем в режиме развитого хаоса можно ограничиться определением лишь первой производной, поскольку число точек, для которых выполняется условие $\dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0$, либо равно нулю, либо ничтожно мало.

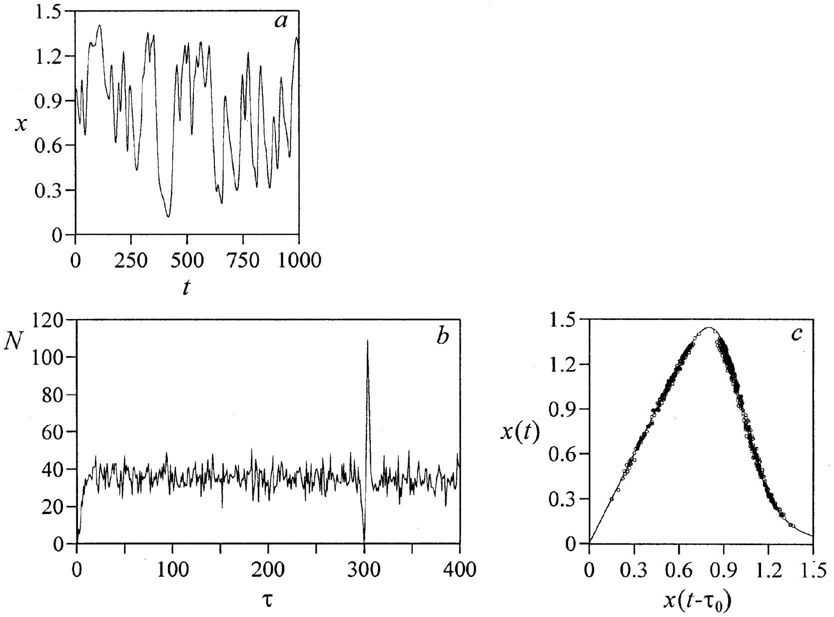

Рис. 1. a — временнóй ряд системы Маккея–Гласса при $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10$, $\tau_0 = 300$; b, d, f — зависимости $N(\tau)$ в отсутствие шума соответственно при 3 и 10%-ном шуме; c, e, g — нелинейная функция (5) (сплошная линия) и восстановленные функции (показаны кружочками на c и точками на e, f) в отсутствие шума при 3 и 10%-ном шуме соответственно.

Подсчитав число N одновременных обращений в ноль $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t-\tau)$ при $\tau \in [1, 400]$, построим зависимость $N(\tau)$ (рис. 1, b). Зависимость получена для временнóго ряда, содержащего 10 000 точек и около 600 экстремумов. Для определения по временнóму ряду $\dot{x}(t)$ использовался 5-точечный сглаживающий полином второго порядка. Абсолютный минимум зависимости $N(\tau)$ наблюдается при $\tau = \tau_0 = 300$, причем $N(300) = 0$. При уменьшении длины временнóго ряда и соответственно числа экстремумов этот минимум становится все менее ярко выраженным и, начиная с некоторой длины ряда, имеются $\tau \neq \tau_0$, для которых $N(\tau) = 0$. Результат восстановления нелинейной функции представлен на рис. 1, c кружками. Значение ε, определенное описанным

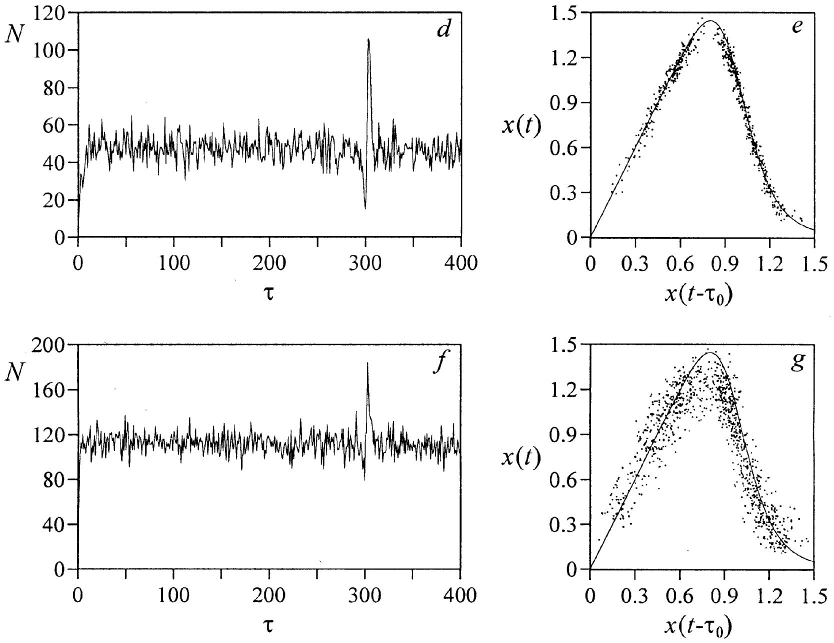

Рис. 1 (*продолжение*).

выше способом и усредненное по всем точкам временно́го ряда, для которых при $\dot{x}(t) \neq 0$ определена $f(x(t-\tau_0))$, имеет величину $\varepsilon = 10.6$ (истинное значение $\varepsilon = 1/b = 10$).

Для исследования возможностей метода при наличии шума рассмотрим ряды, полученные добавлением гауссовского белого шума в уравнение (4). На рис. 1, d–g приведены графики зависимости $N(\tau)$ и результат восстановления нелинейной функции в случае аддитивного шума, имеющего нулевое среднее значение и среднеквадратичное отклонение, составляющее 3 и 10% от среднеквадратичного отклонения исходного ряда. При увеличении уровня шума абсолютный минимум на графике $N(\tau)$ становится все менее ярко выраженным (на рис. 1, d $N_{\min}(\tau) = N(300) = 15$, а на рис. 1, f $N_{\min}(\tau) = N(300) = 79$), а зависимость на плоскости $(x(t-\tau_0), x(t))$ все более однозначной. При уровнях шума свыше 10% $N(\tau_0)$ уже более не является абсолютным минимумом

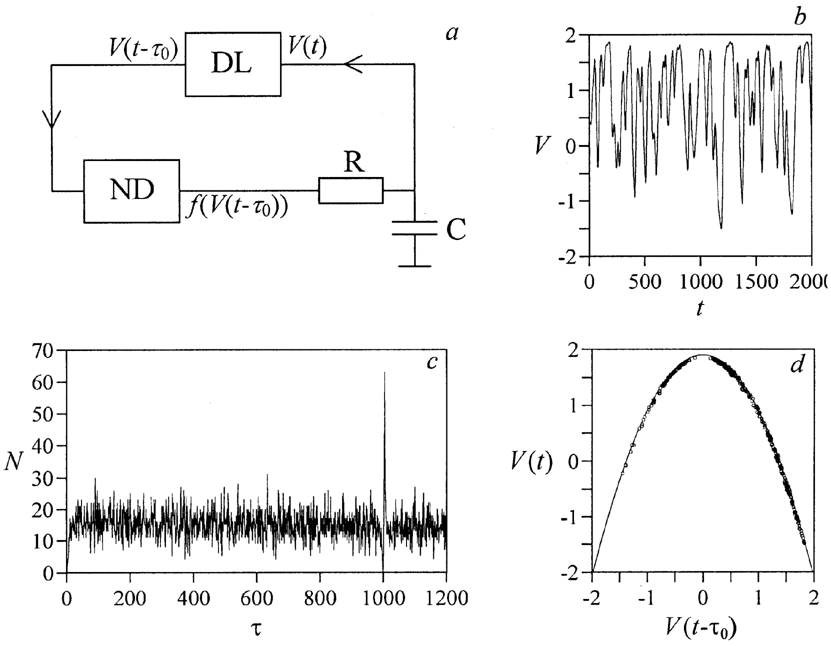

Рис. 2. a — блок-схема генератора с запаздывающей обратной связью (ГЗОС) при численном эксперименте, ND — нелинейный элемент, DL — линия задержки; b, c, d — соответственно временно́й ряд системы (6), зависимость $N(\tau)$ и восстановленная функция (показана кружочками) при $\lambda = 1.9$, $\tau_0 = 1000$, $RC = 10$ (нелинейная функция (7) показана на d сплошной линией); e —блок-схема ГЗОС при натурном эксперименте, ADC и DAC — аналого-цифровой и цифроаналоговый преобразователи; f, g, h — соответственно временно́й ряд экспериментальной системы, зависимость $N(\tau)$ и восстановленная нелинейная функция при $\tau_0 = 4.5\,\mathrm{ms}$, $RC = 0.08\,\mathrm{ms}$.

зависимости $N(\tau)$. Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенный метод является достаточно грубым по отношению к шуму и может быть применен для исследования временны́х рядов реальных систем.

С помощью предложенного нами метода проведем исследование генератора с запаздывающей связью [3]. Для системы, изображенной на

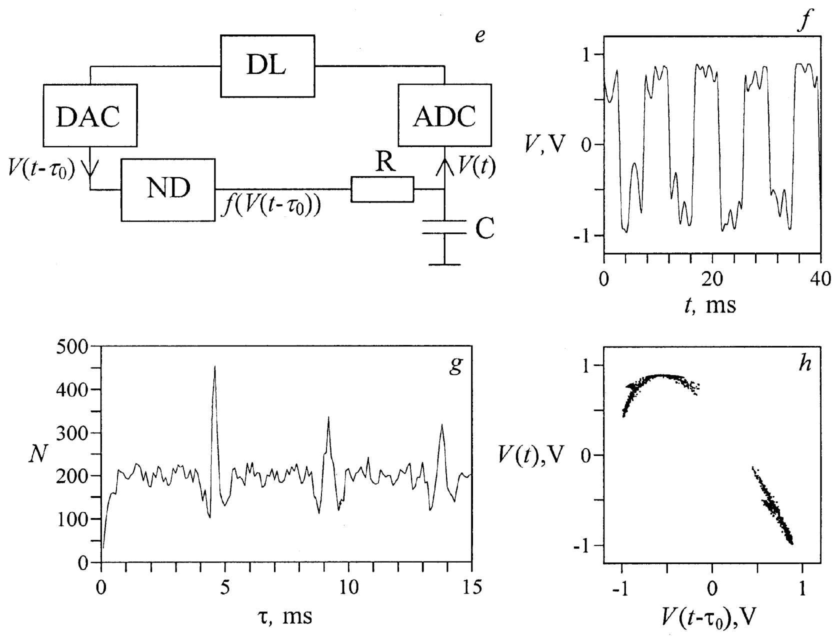

Рис. 2 (*продолжение*).

рис. 2, *a*, модельное уравнение, выведенное из законов Кирхгофа, имеет следующий вид:

$$RC\dot{V}(t) = -V(t) + f\big(V(t-\tau_0)\big), \tag{6}$$

где $V(t)$ и $V(t-\tau_0)$ — напряжения на входе и выходе линии задержки, R и C — сопротивление и емкость элементов фильтра, f — передаточная функция нелинейного элемента, τ_0 — время задержки. Уравнение (6) имеет вид уравнения (1), где $\varepsilon = RC$. Исследуем его временны́е ряды, выбрав в качестве нелинейной функции логистическую функцию с запаздыванием:

$$f\big(V(t-\tau_0)\big) = \lambda - V^2(t-\tau_0), \tag{7}$$

где λ — параметр нелинейности, $0 < \lambda \leqslant 2$. На рис. 2, *b–d* представлены временно́й ряд системы (6), зависимость $N(\tau)$ и восстановленная нелинейная функция для случая $\lambda = 1.9$, $\tau_0 = 1000$, $RC = 10$. Временно́й ряд содержит 10 000 точек и около 400 экстремумов. $N_{\min}(\tau) = N(1000) = 0$. Восстановленная при $\tau_0 = 1000$ нелинейная функция практически совпадает с построенной численно из уравнения (7). Восстановленное значение $\varepsilon = RC$, усредненное по всему ряду, имеет значение $RC = 9.9$. Обратим внимание на то, что значение RC может быть приближенно оценено по величине $\tau_c = \tau_m - \tau_0$, где τ_m — значение, при котором наблюдается абсолютный максимум зависимости $N(\tau)$. С увеличением RC увеличивается характерный временно́й масштаб колебаний и увеличивается временно́й интервал между экстремумами зависимости $x(t)$, что приводит к росту τ_m и τ_c. Меняя в широких пределах значения RC, λ и τ_0, мы получили следующую эмпирическую зависимость: $\tau_e \approx RC/2$, т.е. для приближенной оценки величины RC могут быть непосредственно использованы зависимость $N(\tau)$ и соотношение $RC \approx 2\tau_c$. Заметим, что такая оценка может оказаться точнее других при наличии шума, когда восстановленная по описанной процедуре нелинейная функция оказывается неоднозначной и требуется ее усреднение.

Наконец исследуем временны́е ряды, полученные в натурном эксперименте, реализованном на схеме, представленной на рис. 2, *e*. RC-фильтр и нелинейный элемент, выполненный в виде схемы на транзисторах и имеющий нелинейную характеристику с квадратичным экстремумом, являлись аналоговыми системами, а линия задержки, выполненная на микросхемах, являлась цифровой системой. Связь между аналоговыми и цифровыми элементами схемы обеспечивалась при помощи аналого-цифрового и цифроаналогового преобразователей. На рис. 2, *f* изображен временно́й ряд, полученный при $\tau_0 = 4.5$ ms, $RC = 0.08$ ms и времени выборки 0.1 ms. Временно́й ряд содержит 10 000 точек и около 1400 экстремумов. Минимум зависимости $N(\tau)$ наблюдается при $\tau = 4.4$ ms (рис. 2, *g*). Восстановленная нелинейная функция (рис. 2, *h*) достаточно хорошо качественно воспроизводит передаточную функцию нелинейного элемента. Усредненное по всему временно́му ряду восстановленное значение $RC = 0.11$ ms.

4. Нами предложен и апробирован на различных системах новый метод восстановления скалярных систем с запаздыванием по временны́м рядам. Метод отличается простотой, требует меньше вычислительных затрат, чем другие методы, и может быть успешно применен для анализа достаточно сильно зашумленных данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99–02–17735 и при поддержке U.S. Civilian Research Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union, Award No REC–006.

Список литературы

[1] *Mackey M.C., Glass L.* // Science. 1977. V. 197. P. 287–289.
[2] *Ikeda K.* // Opt. Commun. 1979. V. 30. P. 257–261.
[3] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410–1428.
[4] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 345–349.
[5] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3082–3085.
[6] *Fowler A.C., Kember G.* // Phys. Lett. A. 1993. V. 175. P. 402–408.
[7] *Bünner M.J., Meyer Th., Kittel A.* et al. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 5083–5089.
[8] *Tian Y.-C., Gao F.* // Physica D. 1997. V. 108. P. 113–118.
[9] *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
[10] *Zhou C., Lai C.-H.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 320–323.