

09

## Количество информации как мера синхронизации хаоса

© А.В. Шабунин, В.В. Демидов, В.В. Астахов, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет  
E-mail: valya@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 4 декабря 2000 г.

Вводится характеристика для оценки степени синхронизации хаотических колебаний двух связанных осцилляторов. Проводится ее тестирование на примере двух однонаправленно связанных логистических отображений. Показано, что данная характеристика устойчива не только к действию малого шума, но и к нелинейному искажению исследуемого сигнала.

Синхронизация хаоса — это термин, под которым понимается целый ряд физических явлений: подавление хаотических колебаний под внешним периодическим воздействием [1], переход к идентичным колебаниям в связанных осцилляторах (полная синхронизация хаоса) [2,3] или к идентичным с точностью до временной задержки между колебаниями в подсистемах (lag-synchronization) [4], захват базовой частоты в спектре хаотических колебаний (частотная синхронизация) [5], захват мгновенной фазы колебаний (фазовая синхронизация) [6], детерминированная взаимосвязь между колебаниями подсистем, в том числе и с учетом задержки по времени  $x_1(t) = f(x_2(t - \tau))$  (обобщенная синхронизация) [7]. Неоднозначность терминологии является следствием многообразия проявлений взаимного согласования колебаний при взаимодействии осцилляторов. Для лучшего понимания взаимосвязи между разными видами синхронизации хаоса хотелось бы иметь меру согласованности поведения осцилляторов, которая могла бы количественно выражать степень их синхронизации. Кроме того, выход из режима хаотической синхронизации при изменении параметров системы может происходить постепенно, через последовательность промежуточных этапов. Например, в случае полной хаотической синхронизации процесс ее разрушения сопровождается перемежающимся поведением, когда часть времени колебания осцилляторов синхронны, а часть времени —

нет [8,9]. В этом случае также возникает вопрос о количественном анализе процесса выхода из режима синхронизации хаоса.

Необходимые требования, которым должна удовлетворять количественная мера синхронизации хаоса, по нашему мнению могут быть следующие:

ясный физический смысл, позволяющий интерпретировать получающиеся результаты;

универсальность, т.е. применимость к различным видам согласованного поведения взаимодействующих подсистем;

отсутствие прямой зависимости от конкретного вида рассматриваемой динамической системы, т.е. возможность определить степень синхронизации по временным реализациям колебаний подсистем;

”грубость”, означающая, что малое изменение колебательного режима, вносимый шум и искажения не приведут к значительному изменению полученной степени синхронизации.

С учетом указанных требований представляется, что в качестве меры согласованности поведения можно использовать информацию, которую дает знание состояния одного из осцилляторов для определения состояния второго. Если состояние одного осциллятора однозначно определяет состояние второго, то можно говорить о полной синхронизации, при которой степень синхронизации равна единице. Если, напротив, состояние одного из осцилляторов никак не влияет на состояние второго, то можно говорить об отсутствии синхронизации или нулевой синхронизации. Если перевести эти рассуждения на математический язык, то количественной мерой такой информации будет разность между полной и условной энтропией подсчитанных по реализациям осцилляторов [10]:

$$I = S_x - S_{x|y}. \quad (1)$$

Информация будет равна нулю в случае, если условная энтропия равна безусловной, т.е. когда состояние второго осциллятора ( $y$ ) никак не влияет на распределение для переменной первого осциллятора ( $x$ ) и равна максимальному значению ( $S_x$ ), если состояние второго осциллятора полностью определяет состояние первого ( $S_{x|y} = 0$ ). Нормировав значение информации на безусловную энтропию, получаем функцию, которая равняется нулю в случае полностью независимого поведения осцилляторов и возрастает до единицы при их полном согласовании.

Выражение для расчета степени синхронизации принимает вид:

$$\sigma = \frac{S_x - S_{x|y}}{S_x},$$

где  $S_x = -\int p(x) \ln p(x) dx$ ,  $p(x)$  — плотность вероятности, подсчитанная по реализации  $x(t)$ ,  $S_{x|y} = -\int p(x|y) \ln p(x|y) dx$ ,  $p(x|y)$  — плотность вероятности, подсчитанная по реализации  $x(t)$ , когда состояние второго осциллятора есть  $y$ .

Предложенная мера синхронизации хаоса была использована нами для исследования процесса выхода из режима полной синхронизации хаоса в системе двух однонаправленно связанных логистических отображений:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad (2)$$

$$y_{n+1} = \lambda [y_n + \gamma(x_n - y_n)] (1 - [y_n + \gamma(x_n - y_n)]), \quad (3)$$

где  $x_n$ ,  $y_n$  — динамические переменные,  $\gamma$  — параметр связи. Уравнения (2) и (3) описывают воздействующую и откликающуюся системы соответственно. Связь устанавливается посредством включения переменной ведущей системы в соответствующую переменную ведомой.

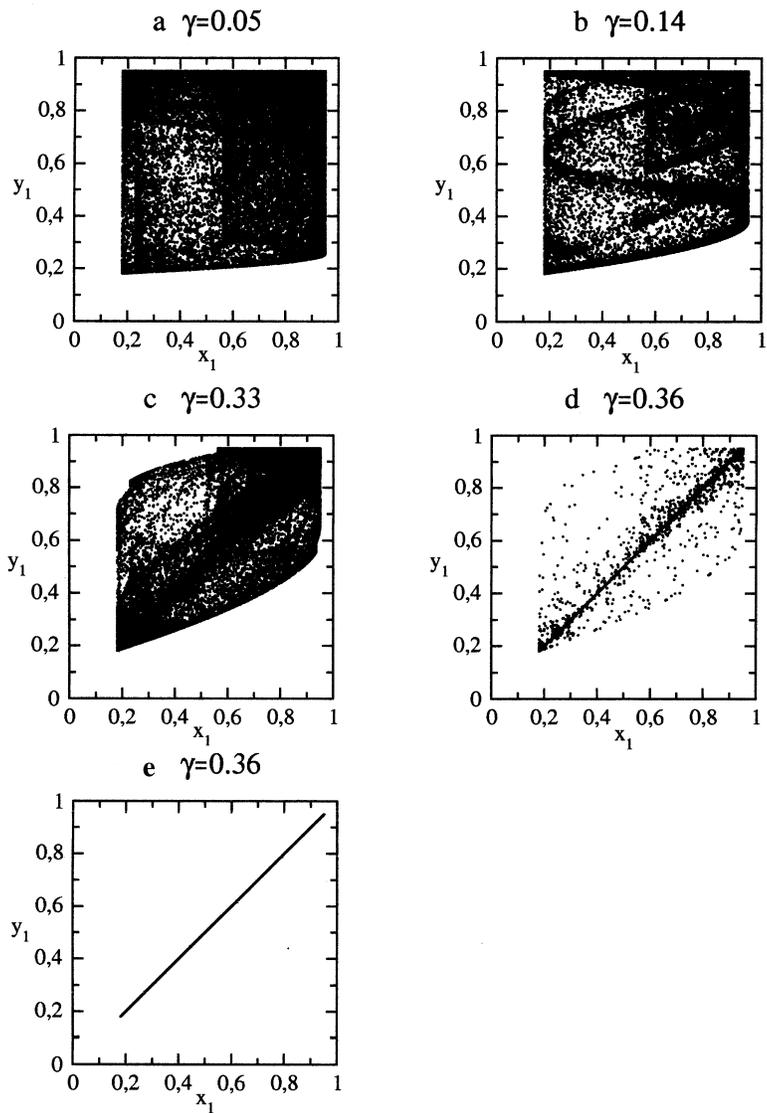
Каждое из отображений — система, которая при увеличении параметра  $\lambda$  демонстрирует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Связанные отображения характеризуются более сложной динамикой. Здесь возможно сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, т. е. наблюдается явление мультистабильности. В некотором диапазоне значений параметра связи система демонстрирует синхронное поведение, при котором колебания подсистем идентичны:  $x_n = y_n$ . В области хаоса для каждого значения параметра  $\lambda$  существует критическое значение коэффициента связи, ниже которого синхронизация хаотических колебаний разрушается. Устойчивость синхронного режима определяется трансверсальным показателем Ляпунова, который для системы (2), (3) равен:

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} + \ln |1 - \gamma|, \quad (4)$$

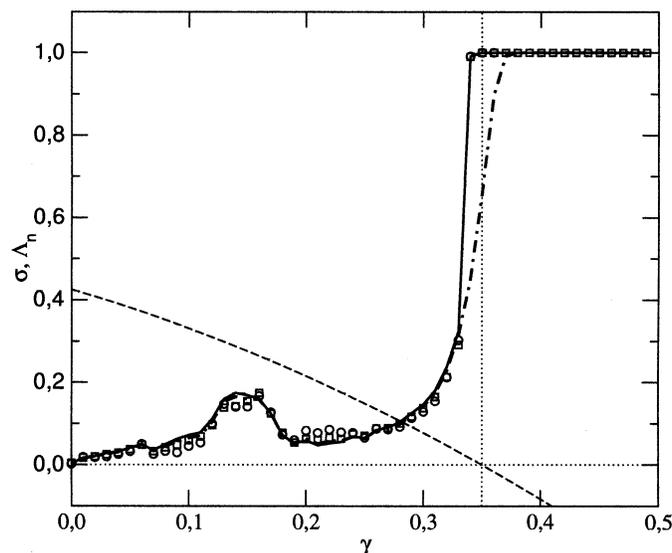
где  $\Lambda_{\parallel}$  — показатель Ляпунова в направлении, тангенциальном к симметричному подпространству  $x = y$ . Синхронные колебания будут трансверсально устойчивы, если трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен, и неустойчивы в противоположном случае. Из (4)

видно, что при  $0 < \gamma < 1$  трансверсальный показатель Ляпунова всегда меньше тангенциального показателя Ляпунова. Поскольку для регулярных режимов показатель Ляпунова отрицателен, то синхронные периодические колебания будут существовать при любой связи. В случае хаотических колебаний тангенциальный показатель Ляпунова положителен и формула (4) дает критическое значение параметра  $\gamma$ , определяющее границу зоны синхронизации. При пересечении этой границы в системе происходит бифуркация прорыва (blowout bifurcation) [11] и синхронные хаотические колебания сменяются несинхронными. Однако отрицательность трансверсального показателя Ляпунова не гарантирует "грубость" режима синхронизации, т. е. что такой режим сохранится при малом внешнем шуме или малой неидентичности подсистем. Если в хаотическом аттракторе присутствуют предельные траектории, для которых трансверсальный показатель Ляпунова положителен, то в системе наблюдается "пузырящееся поведение" (bubbling phenomenon), когда при добавлении сколь угодно малого шума возникает перемежаемость между синхронным и несинхронным поведением [8,9,11].

Описанные явления наблюдаются для рассматриваемой системы. Мы исследовали поведение системы (2), (3) при изменении параметра связи  $\gamma$ , зафиксировав параметр парциальной системы  $\lambda = 3.8$ . Данное значение  $\lambda$  соответствует существованию в системе развитого хаоса, образом которого является одноленточный хаотический аттрактор. В области значений параметра  $0.38 < \gamma < 1$  наблюдается грубый режим полной синхронизации хаоса. При уменьшении связи, в интервале значений  $0.35 < \gamma < 0.38$  режим синхронизации хаоса перестает быть грубым. Синхронные колебания наблюдаются после длительного переходного процесса в системе без шума. Добавление в систему сколь угодно малого шума ведет к перемежающемуся поведению. Временная реализация  $x$ - $y$  представляет собой длительную "ламинарную фазу" синхронного поведения и случайные "турбулентные всплески" траектории в сторону от симметричного подпространства. В литературе такое поведение получило название on-off перемежаемость, а соответствующий аттрактор — bubbling аттрактор. Данный тип поведения представлен на рис. 1, *d, e*. Здесь на рис. 1, *d* показан аттрактор в присутствии шума малой амплитуды ( $\sim 0.00001$ ), на рис. 1, *e* — при отсутствии шума. При дальнейшем уменьшении связи вблизи значения  $\gamma = 0.35$  трансверсальный показатель Ляпунова становится положительным. Происходит бифуркация прорыва. Хаотическая синхронизация перестает наблюдаться в системе.



**Рис. 1.** Проекция фазовых портретов при различных значениях параметра связи.



**Рис. 2.** Зависимость степени хаотической синхронизации от значения параметра связи.

Соответствующие фазовые портреты представлены на рис. 1, *a–c*. При уменьшении связи аттрактор "разбухает" и при  $\gamma < 0.05$  фазовый портрет представляет собой область, напоминающую квадрат (рис. 1, *a*).

Описанные изменения динамики системы хорошо диагностируются посредством введенной нами функции  $S$ . Соответствующие зависимости представлены на рис. 2. Здесь построены зависимости степени синхронизации от параметра связи в системе без шума (сплошная линия) и при малом добавлении шума (штрихпунктирная линия). При отсутствии шума спад характеристики начинается сразу после смены знака трансверсального показателя Ляпунова. Для наглядности на том же рисунке построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от параметра связи (штриховая линия), горизонтальная и вертикальная пунктирные линии, отмечающие переход этого показателя через ноль. Степень синхронизации резко уменьшается от 1 при  $\gamma = 0.35$  до  $\approx 0.15$  при  $\gamma = 0.3$ . Затем при уменьшении связи идет плавное уменьшение степени синхронизации до  $\approx 0.05$  при  $\gamma = 0.2$ , затем следует

участок локального повышения степени синхронизации с характерным максимумом  $S \simeq 0.17$  при  $\gamma = 0.14$ , после которого наблюдается монотонный спад уровня синхронизации до нуля при нулевой связи. Отмеченное локальное повышение степени синхронизации при  $\gamma = 0.14$  является следствием перестройки структуры аттрактора, наблюдавшимся при данной связи. На рис. 1, *b* хорошо видно, что аттрактор при этой связи характеризуется не равномерным распределением фазовых точек, а включает в себя область, по всей видимости соответствующую неустойчивому квазипериодическому движению, на котором траектория проводит значительную часть времени.

При добавлении в систему малого шума ( $\sim 0.00001$ ) быстрый спад степени синхронизации начинается значительно раньше по связи (штрихпунктирная линия на рис. 2), что отражает начало пузырящегося поведения в системе. Существенная разность в значениях степени синхронизации для системы с шумом и системы без шума наблюдается только в этой области, до  $\gamma \simeq 0.34$ . В других интервалах значения параметра связи степени синхронизации в системе без шума и с очень малым шумом практически равны (рис. 2). Таким образом, существенная зависимость степени синхронизации от шума возникает только как результат негрубости самого режима синхронизации хаоса, а не как проявление неустойчивости введенной нами характеристики.

Введенная нами характеристика устойчива не только к действию шума, но и к нелинейному искажению исследуемых сигналов. Для иллюстрации этого мы изменил временную реализацию, по которой производился подсчет уровня синхронизации, добавив туда нелинейное слагаемое:

$$x \rightarrow x + \delta x^2,$$

где  $\delta$  — параметр нелинейности. Результаты расчетов для  $\delta = 0.05$  и  $\delta = 0.2$  приведены на рис. 2. Из рисунка видно, что точки, рассчитанные с добавлением нелинейного слагаемого (обозначенные кружочками и квадратами соответственно), ложатся на кривую исходной зависимости. Следствием такой инвариантности к нелинейным искажениям является применимость указанной характеристики к исследованию обобщенной синхронизации вида  $x_n = f(y_n)$  при детерминированном характере функции  $f$ .

Заключение. В настоящей работе нами предложена характеристика, дающая количественную оценку степени синхронизации хаотических ко-

лебаний двух связанных осцилляторов. Проведено тестирование данной характеристики на примере двух однонаправленно связанных логистических отображений, демонстрирующих явления полной синхронизации хаоса и пузырящееся поведение при ее разрушении. Показано, что введенная характеристика устойчива к действию малого шума и нелинейных искажений анализируемого сигнала. В дальнейшем предполагается рассмотреть применимость характеристики степени синхронизации при изучении других типов синхронизации (фазовая синхронизация) и сравнить ее с характеристикой, построенной на базе функции когерентности [12].

Авторы выражают признательность Российскому фонду фундаментальных исследований (грант 00–02–17512) и Фонду развития гражданских исследований (CRDF, грант REC–006) за частичное финансирование данной работы.

## Список литературы

- [1] Дудник Е.Н., Кузнецов Ю.И., Минакова И.И., Романовский Ю.М. // Вестник Московского университета. 1983. Сер. 3. Т. 24. № 4. С. 84–87.
- [2] Fujisaka H., Yamada T. // Progress of theoretical physics. 1983. V. 69. N 1. P. 32–47.
- [3] Абраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1050–1060.
- [4] Rosenblyum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 4193–4196.
- [5] Анищенко В., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. В. 2. С. 338–351.
- [6] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Physical Review Letters. 1996. V. 76. N 11. P. 1804–1807.
- [7] Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 4528–4535.
- [8] Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. // Physical Review Letters. 1997. V. 79. N 6. P. 1014–1017.
- [9] Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. N 5. P. 5620–5628.
- [10] Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
- [11] Ashvin P., Beuescu J., Stewart I. // Physics Letters A. 1994. N 193. P. 126–139.
- [12] Анищенко В.С., Астахов В.В., Николаев В.В., Шабунин А.В. // Радиотехника и электроника, 2000. Т. 45. № 2. С. 196–203.