01;03

Механизм хаотического перемешивания в элементарном детерминированном потоке

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева РАН, Владивосток
E-mail: prants@mail.ru

Поступило в Редакцию 9 января 2001 г.

На примере элементарной модели взаимодействия точечного вихря с периодическим плоским течением теоретически и численно выявлен типичный механизм хаотического перемешивания пассивной примеси. Хаотический транспорт и перемешивание, возникающие в результате трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболической особой точки, могут иметь далеко идущие последствия в геофизических потоках.

Хаотическое (в смысле экспоненциальной чувствительности к начальным условиям) движение частиц пассивной примеси может возникать в потоках, которые в эйлеровском представлении являются ламинарными. Это явление, называемое лагранжевой турбулентностью или хаотической адвекцией, наблюдалось в лабораторных и численных экспериментах с потоками разного вида (см. обзор [1] и ссылки в нем на работы других авторов). Цель настоящего сообщения состоит в выявлении механизма возникновения хаотического движения частиц пассивной примеси на примере модельной системы, состоящей из точечного вихря, взаимодействующего с двумерным периодическим потоком несжимаемой жидкости. Подобные модели привлекательны для теоретического анализа возникновения хаотической адвекции и могут быть положены в основу понимания процессов перемешивания и транспорта пассивных примесей не только в лабораторных условиях, но и в природных средах. В частности, горизонтальное хаотическое перемешивание в моделях такого типа адекватно объясняет эффективную гомогенизацию тепла и солености как в мезомасштабных структурах океана, так и в мелком море и эстуариях [2].

Поле скоростей двумерного несжимаемого потока задается функцией тока, которая для точечного вихря на фоне потока со стационарной и периодически (с частотой ω) модулированной составляющими имеет следующий безразмерный вид:

$$\Psi = \Psi_0 + \xi\Psi_1 = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \epsilon x + \xi x \sin\tau, \tag{1}$$

где $\tau = \omega t$, x и y — нормированное время и нормированные декартовы координаты, ϵ и ξ — нормированные скорости движения частиц в стационарной и нестационарной составляющих потока соответственно. С помощью функции тока уравнения движения пассивной примеси могут быть записаны в гамильтоновом виде

$$\dot{x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\dot{y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + \epsilon + \xi\sin\tau. \tag{2}$$

В отсутствие возмущения ($\xi = 0$) фазовый портрет динамической системы (2) состоит из коллекции замкнутых и незамкнутых (инфининтных) траекторий, разделенных сепаратрисной петлей, проходящей через седловую особую точку с координатами $(-1/\epsilon;\ 0)$. В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ эта задача без труда интегрируется в квадратурах

$$\epsilon d\tau = \left[1 - \left(\frac{E - \ln\rho}{\epsilon\rho}\right)^2\right]^{-1/2} d\rho, \tag{3}$$

где E — значение сохраняющейся энергии. Возможные движения частиц примеси в системе "вихрь — стационарный поток" очень просты: они либо захватываются вихрем и движутся по периодическим орбитам внутри сепаратрисной петли, либо движутся по инфининтным траекториям в области свободного потока за пределами петли. Отметим, что устойчивый "ус" сепаратрисной петли, по которому изображающая точка приближается к седлу, и неустойчивый "ус", по которому она удаляется от седла, совпадают в интегрируемой автономной системе "вихрь — стационарный поток".

При включении внешнего периодического возмущения даже с очень малой амплитудой ξ происходит расщепление невозмущенной сепаратрисы [3]. Для системы (2) с полутора степенями свободы условие расщепления сводится к анализу интеграла Пуанкаре

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{\Psi_0, \Psi_1\} \left[x_s(\tau - \alpha), y_s(\tau - \alpha)\right] d\tau, \tag{4}$$

где $\{\Psi_0, \Psi_1\}$ — скобка Пуассона стационарной функции тока Ψ_0 и периодического возмущения Ψ_1 из выражения (1), $x_s(\tau - \alpha)$ и $y_s(\tau - \alpha)$ — решение на сепаратрисе, параметризуемое вещественным числом α. Если функция $I(\alpha)$ имеет простые нули, то при малых $\xi \neq 0$ устойчивые и неустойчивые многообразия седловой особой точки пересекаются трансверсально (см. доказательство в [4]). Прямое вычисление интеграла (4) дает периодическую функцию

$$I(\alpha) = \sin\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_s \cos\tau d\tau - \cos\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_s \sin\tau d\tau, \tag{5}$$

которая, очевидно, имеет нули, являющиеся простыми при $\dot{x}_s(\tau) \neq 0$. Трансверсальное пересечение многообразий приводит к формированию гомоклинной структуры в окрестности седловой точки невозмущенной системы. Представление о сложности этой структуры дает рис. 1, на котором изображен фрагмент сечения Пуанкаре в моменты времени

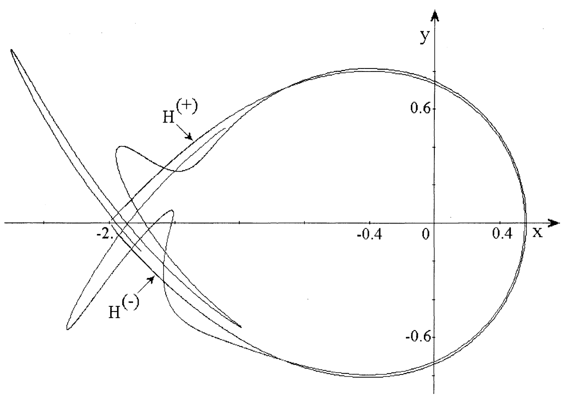

Рис. 1. Трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий седла — зародыш гомоклинного хаоса ($\epsilon = 0.5$, $\xi = 0.01$).

$2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ для пучка траекторий, стартующих при $\tau = 0$ из малой окрестности вблизи седла при $\xi = 0.01$. Это типичная гомоклинная структура для гамильтоновых систем (см., например, [5]), содержащая бесконечное множество траекторий как периодических, так и случайных и являющаяся зародышем формирования в детерминированном потоке стохастического слоя, имеющего место при любом сколь угодно малом возмущении. С увеличением возмущения ξ происходит расширение этого слоя, заполняющего постепенно все энергетически доступное фазовое пространство.

Именно трансверсальное пересечение устойчивого $H^{(+)}$ и неустойчивого $H^{(-)}$ многообразий является механизмом, приводящим к многократному растягиванию и складыванию элемента фазовой жидкости, что в свою очередь, приводит к эффективному перемешиванию. Характерное время перемешивания, так называемое время расщепления корреляций (статистическая характеристика процесса), обратно пропорционально максимальному показателю Ляпунова λ — чисто динамической характеристике. Выполненные, но не приведенные здесь вычисления λ и топографических λ-карт по алгоритму, предложенному в [6], дают количественные характеристики динамического хаоса в зависимости от начальных условий и величины возмущения ξ.

Для иллюстрации сходства динамики адвектирующих частиц с отображением типа подковы [5] мы вычислили эволюцию ансамбля этих частиц в областях ламинарного и турбулентного потока (в лагранжевом смысле). Эволюция малого пятна, состоящего из $\sim 10^4$ трасеров, в окрестности седловой точки изображена на рис. 2 в последовательные моменты времени $\tau = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$. Очевидная деформация растяжения пятна с последующими складываниями типична для отображения подковы. Периметр пятна экспоненциально растет с течением времени, тогда как его площадь (инвариант гамильтоновой системы) остается неизменной. Это приводит к существенному ускорению скорости обычной турбулентной диффузии примеси (если она, вообще, существует), поскольку в результате хаотической адвекции существенно увеличивается граница раздела вещества примеси и жидкости.

Движение частиц пассивной примеси в нестационарном потоке существенно зависит от их начальных положений. При умеренных значениях величины возмущения ξ вокруг вихря сохраняется ядро, состоящее из замкнутых мгновенных линий тока, которым на сечении Пуанкаре отвечают инвариантные кривые. Движение частиц в этой

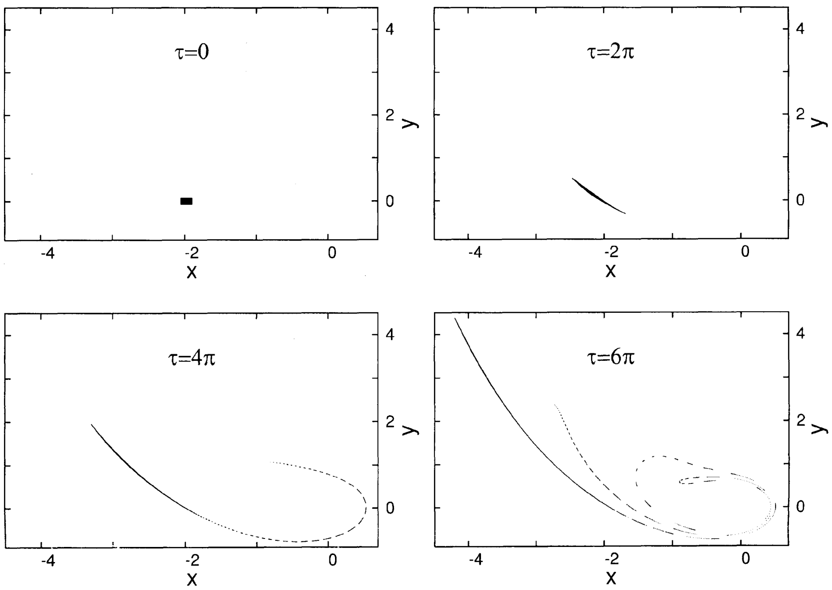

Рис. 2. Растекание фазовой капли пассивной примеси в хаотической области потока ($\epsilon = 0.5$, $\epsilon = 0.1$).

области строго периодическое. Для находящихся в ядре частиц имеются своего рода барьеры, препятствующие их проникновению в область свободного потока. Вблизи сепаратрисной петли инвариантные кривые разрушаются, образуя инвариантные канторовы множества — канторы, движение на которых похоже на движение по инвариантным кривым за тем исключением, что канторы имеют щели, сквозь которые трасеры могут диффундировать из области вблизи ядра в область свободного потока. Такое нетривиальное перемещение трасеров имеет далеко идущие последствия для геофизичсеких потоков, поскольку осуществляет аномальный перенос загрязнений, тепла и других пассивных примесей в вихревых структурах океана и атмосферы.

Мы благодарны В.Ф. Козлову, обратившему наше внимание на эту задачу, и М.И. Улейскому за помощь в численных расчетах.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы "Мировой океан" (проект "Моделирование изменчивости и гидрофизических полей").

Список литературы

[1] *Aref H.* // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1990. V. 333. P. 273–288.
[2] *Козлов В.Ф., Кошель К.В.* // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 1. С. 137–144.
[3] *Poincaré H.* // Acta. Math. 1890. T. 13. P. 1–270.
[4] *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 432 с.
[5] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
[6] *Коньков Л.Е., Пранц С.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. В. 11. С. 801–806.