

01;05;08

## **Квантование средней скорости движения тела в периодическом потенциале под действием ультразвукового возмущения**

© В.Л. Попов

Падерборнский университет, Германия  
Институт физики прочности и материаловедения СО РАН  
E-mail: popov@phys.unipaderborn.de

*Поступило в Редакцию 23 января 2001 г.*

Рассмотрено движение тела в периодическом потенциальном рельефе со слабым затуханием. Показано, что в присутствии внешнего периодического воздействия зависимость средней по периоду скорости движения тела от средней силы трения имеет плато, на которых изменение действующей силы не ведет к изменению скорости движения. Скорость, соответствующая плато, пропорциональна частоте приложенного периодического воздействия и может легко регулироваться. Этот эффект может быть использован для создания приводных устройств, обеспечивающих движение со строго заданной и не зависящей от нагрузки скоростью.

Во многих технических приложениях важно использование приводных устройств, обеспечивающих строго контролируемые параметры (силу, скорость и т.д.). Постоянство требуемых параметров обычно достигается путем создания цепей обратной связи. В настоящей работе мы предлагаем принцип, с помощью которого постоянная скорость скольжения в искусственно сформированной трибологической паре (в определенном интервале нагрузок) может быть достигнута с помощью эффекта автоматической подстройки фазы, аналогичный тому, который имеет место при одном из вариантов нестационарного эффекта Джозефсона [1].

Рассмотрим движение тела в периодическом потенциале со слабым затуханием (рис. 1). Уравнение движения тела в таком потенциале

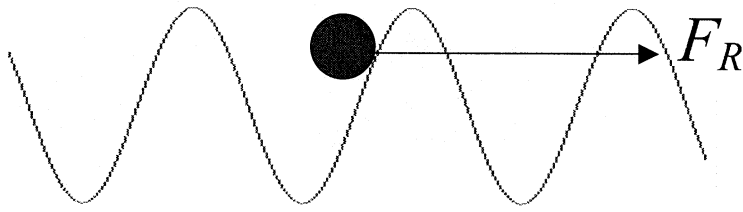


Рис. 1. Движение тела в периодическом потенциальном поле.

имеет вид

$$m\ddot{x} = F_R - \eta\dot{x} - F_0 \sin(2\pi x/a), \quad (1)$$

где  $m$  — масса тела,  $F_R$  — действующая на него сила,  $\eta$  — коэффициент вязкости,  $F_0$  — амплитуда периодической силы,  $a$  — длина волны периодического потенциала. Модель, описываемая уравнением (1), служит хотя и простой, но очень успешной моделью сухого и граничного трения, которая в записанной выше форме или с различными вариациями интенсивно эксплуатировалась в последнее время в физике трения (см., например, [2,3]). С другой стороны, уравнение вида (1), записанное в форме

$$\left(\frac{\hbar C}{2e}\right) \ddot{\varphi} = j - \left(\frac{\hbar}{2eR}\right) \dot{\varphi} - j_0 \sin \varphi, \quad (2)$$

описывает динамику одиночного джозефсоновского контакта, причем  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\varphi$  — разность фаз между контактирующими сверхпроводниками,  $C$ ,  $R$  — соответственно емкость контакта и омическое сопротивление контакта,  $e$  — элементарный заряд,  $j_0$  — максимальный ток контакта [1]. Математическая эквивалентность двух задач означает, что в трибологических системах, микроскопическая модель которых описывается уравнением (1), должны наблюдаться те же эффекты, что и в джозефсоновских контактах. Один из таких эффектов состоит в модификации вольт-амперной характеристики джозефсоновского контакта при воздействии на него внешнего периодического возмущения, состоящей в появлении плато, на которых напряжение строго постоянно (на этом эффекте основан современный квантовый эталон напряжения). Его аналогом в трибологической интерпретации

является возникновение плато постоянной средней скорости движения тела в определенном интервале действующих на него сил. Техническая важность эффекта очевидна: он дает возможность создания приводов, обеспечивающих в определенном интервале нагрузок строго фиксированную среднюю скорость движения, что безусловно может найти многочисленные применения в современной мехатронике. Несмотря на прямую аналогию с эффектом Джозефсона, этот эффект, насколько нам известно, никогда не обсуждался в трибологической литературе. Его математическому анализу и посвящена настоящая статья.

Физический "механизм" предлагаемого эффекта состоит в следующем. Если тело движется с макроскопически постоянной скоростью в присутствии периодического (в пространстве) потенциала, то его мгновенная скорость и действующая на него сила, вообще говоря, являются периодическими функциями времени с некоторой частотой, зависящей от средней скорости движения. Средние по времени значения силы и скорости при этом очевидно не зависят от "начальной фазы" этих периодических функций, которая может быть произвольной. Ситуация качественно изменяется, если на периодические колебания скорости (или силы) наложить дополнительное внешнее периодическое воздействие с частотой, равной вышеупомянутой "собственной" частоте осцилляций скорости и силы. Ввиду нелинейности динамики системы, наложение внешнего периодического возмущения приведет к появлению в динамике системы производных членов с равной частотой, которые при усреднении по времени не исчезают, причем среднее значение зависит от начальной фазы. Эта зависимость от начальной фазы приводит к тому, что среднее значение силы может изменяться путем подстройки фазы при неизменной средней скорости движения. Отметим, что задача о движении тела в периодическом потенциале со слабым затуханием, как известно, математически эквивалентна задаче о динамике одиночного джозефсоновского контакта, а названный эффект подстройки фазы находит выражение в одном из вариантов нестационарного эффекта Джозефсона [1].

Проиллюстрируем возникновение названного эффекта в частном случае, когда периодическое движение накладывается на движение тела с постоянной скоростью. Эффект имеет место и при более сложных предположениях, однако математически наиболее прост приводимый ниже анализ.

Если двигать тело в периодическом потенциале с постоянной скоростью  $v_0$ , то сила, действующая на тело, является периодической функцией времени

$$F_R = \eta v_0 + F_0 \sin \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t), \quad (3)$$

а ее среднее значение равно  $\overline{F}_R = \eta v_0$ .

Допустим теперь, что на движение с постоянной скоростью  $v_0$  наложено периодическое возмущение с амплитудой  $v_1$ , намного меньшей  $v_0$  ( $v_1 \ll v_0$ ):

$$v = v_0 + v_1 \cos \omega t. \quad (4)$$

Координата тела как функция времени будет теперь равна

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t, \quad (5)$$

а сила, действующая на него, приобретает вид

$$F_R = \eta(v_0 + v_1 \cos \omega t) + F_0 \sin \frac{2\pi}{a} \left( x_0 + v_0 t + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (6)$$

Среднее по времени значение силы при условии  $v_1 \ll v_0$  легко найти, разложив функцию (6) по малому параметру  $v_1/v_0$ :

$$\begin{aligned} F_R = & \eta(v_0 + v_1 \cos \omega t) + F_0 \left\{ \sin \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t) \right. \\ & \left. + \frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t) \cdot \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \right\} = \eta(v_0 + v_1 \cos \omega t) \\ & + F_0 \left\{ \sin \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t) + \frac{2\pi v_1}{a\omega} \left[ \begin{array}{l} \sin \left( \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t) + \omega t \right) \\ - \sin \left( -\frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t) + \omega t \right) \end{array} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Среднее по времени значение первых трех членов тождественно равно нулю. Среднее же значение последнего слагаемого в квадратной скобке равно нулю при  $\omega \neq \frac{2\pi v_0}{a}$  и равно

$$\bar{F}_R = \eta v_0 + F_0 \frac{2\pi v_1}{a\omega} \sin \frac{2\pi}{a} x_0 \quad (8)$$

при

$$\omega = \frac{2\pi v_0}{a}. \quad (9)$$

Таким образом, при определенной частоте внешнего периодического воздействия средняя сила, действующая на тело, может принимать любое значение в интервале

$$\eta v_0 - \left| F_0 \frac{2\pi v_1}{a\omega} \right| < \bar{F}_R < \eta v_0 + \left| F_0 \frac{2\pi v_1}{a\omega} \right| \quad (10)$$

при неизменной средней скорости движения тела. Изменение силы происходит за счет автоматической подстройки начальной фазы  $2\pi x_0/a$  в соответствии с уравнением (8). При превышении силой максимального значения из интервала (10) скорость возрастает с ростом силы. Нетрудно, однако, убедиться, что при всех скоростях

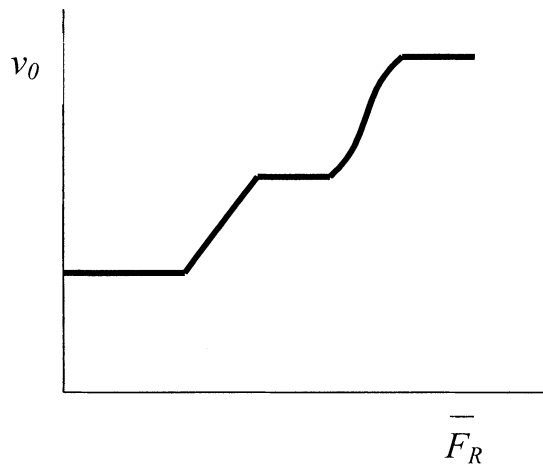
$$v_0 = \frac{a\omega}{2\pi} n, \quad (11)$$

где  $n$  — целое число, имеются плато, на которых сила может в определенных пределах изменяться без изменения скорости движения.

Зависимость средней скорости движения тела от средней приложенной силы, таким образом, качественно будет иметь вид, представленный на рис. 2.

Сделанное выше предположение о малости амплитуды возмущения важно только для осуществимости проведенного выше расчета, основанного на разложении в ряд Тейлора. Оно, как известно из физики джозефсоновских контактов, никак не сказывается на самом эффекте квантования скорости.

”Квантованные” значения скорости на плато зависимости скорости от силы воздействия, согласно (11), зависят только от частоты внешнего периодического воздействия и длины волны потенциального рельефа. Они, таким образом, могут устанавливаться с высокой точностью и легко контролироваться путем изменения частоты.



**Рис. 2.** Схематическое изображение зависимости средней скорости скольжения от среднего значения силы трения при наличии внешнего периодического воздействия.

Описанный эффект может быть использован для создания приводных устройств со строго фиксированной и легко регулируемой скоростью приводимого в движение тела. Примером системы, в которой описанный эффект может быть реализован экспериментально, является контакт двух пластин, на которых искусственным образом нанесен периодический (относительно трансляций или ротаций) микрорельеф. Под действием звуковой волны достаточной амплитуды, действующей на одно из контактирующих тел, система приобретет характеристику "скорость–сила" вида, представленного на рис. 2, с плато при значениях скорости, определяемых выражением (10), где  $a$  — период нанесенного микрорельефа. Например, при периоде микрорельефа  $1 \mu\text{m}$  и желаемой скорости, соответствующей плато, равной  $1 \text{ m/s}$ , частота воздействия должна быть равна  $1 \text{ MHz}$ . Этот пример показывает, что при имеющихся технических возможностях нанесения регулярных микрорельефов и доступных частотных интервалах источников ультразвука создание приводов с контролируемой скоростью движения в технически значимых интервалах скоростей не представляет трудности.

## Список литературы

- [1] *Barone A., Paterno G.* Physics and Applications of the Josephson Effect. Wiley & Sons, 1982
- [2] *Zaloz V., Urbakh M., Klafter J.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. N 6. P. 1227.
- [3] *Zaloz V., Urbakh M., Klafter J.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. N 24. P. 4823.