01;03

Модель слабонелинейных стадий формирования периодической структуры на заряженной поверхности проводящей жидкости

© *Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 2 февраля 2001 г.

Проведен сравнительный анализ влияния четырехволновых процессов на динамику границы проводящей жидкости в электрическом поле для случаев плоской и квадратной симметрий задачи. Построена модель начальных стадий формирования периодической системы острий на поверхности жидкометаллических электродов щелевого типа, особенности геометрии которых приводят к вырождению нелинейных трехволновых взаимодействий.

Как известно [1], поверхность проводящей жидкости неустойчива в достаточно сильном электрическом поле. В результате взаимодействия поля и индуцированных им поверхностных зарядов происходит формирование одного либо системы конических острий. Усиление поля вблизи их вершин приводит к интенсивным эмиссионным процессам, что определяет широкое практическое использование жидкометаллических источников заряженных частиц. Картина развития неустойчивости определяется двумя основными факторами: общими свойствами электрогидродинамических процессов и геометрией системы.

Рассмотрим жидкометаллические электроды щелевого типа (elongated, slit type), для которых свободная поверхность жидкости является неограниченной в одном направлении — направлении вдоль щели (ось y нашей системы координат) и ограниченной в поперечном направлении (ось x). Краевые условия на боковых границах жидкости, в частности условия смачивания, определяют исходную конфигурацию поверхности, обладающую плоской симметрией. Эта конфигурация перестает быть равновесной при приложении электрического поля, что дает толчок развитию неустойчивости по оси x. Однако плоская симметрия возмущений поверхности нарушается [2]: формируется цепочка эквидистантных эмитирующих острий вдоль оси y. Характерный размер структуры задается наиболее быстрой пространственной гармоникой. В случае, если величина электрического поля E близка к пороговому для развития неустойчивости значению $E_c = (64\pi^2 g\alpha\rho)^{1/4}$, где g — ускорение поля тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, а ρ — плотность среды, то по оси y будут нарастать возмущения с волновыми числами, близкими к $k_0 = \sqrt{g\rho/\alpha}$ [1].

Итак, в задаче имеется тенденция к развитию возмущений с волновыми векторами, направленными в двух ортогональных направлениях — вдоль осей x и y. Покажем для случая малых надкритичностей, $\varepsilon = (E^2 - E_c^2)/E_c^2 \ll 1$, что именно их нелинейное взаимодействие приводит к взрывному росту возмущений поверхности и впоследствии к формированию периодической системы острий.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной проводящей жидкости бесконечной глубины во внешнем электрическом поле, вектор напряженности которого направлен по оси z нашей системы координат. Потенциал электрического поля φ и потенциал скорости для несжимаемой жидкости Φ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \nabla^2\Phi = 0, \tag{1}$$

которые следует рассматривать совместно с условиями:

$$\Phi_t + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} = \frac{(\nabla\varphi)^2 - E^2}{8\pi\rho} + \frac{\alpha}{\rho}\nabla_\perp \cdot \frac{\nabla_\perp\eta}{\sqrt{1+(\nabla_\perp\eta)^2}} - g\eta, \ z = \eta, \tag{2}$$

$$\eta_t = \Phi_z - \nabla_\perp\eta \cdot \nabla_\perp\Phi, \qquad z = \eta, \tag{3}$$

$$\varphi = 0, \qquad z = \eta, \tag{4}$$

$$\Phi \to 0, \qquad z \to -\infty, \tag{5}$$

$$\varphi \to -Ez, \qquad z \to \infty, \tag{6}$$

где функция $\eta(x, y, t)$ задает форму поверхности жидкости. Уравнение (2) представляет собой нестационарное уравнение Бернулли, в котором учтено влияние поля тяжести, электростатического и капиллярного давлений; уравнение (3) имеет смысл условия непротекания жидкости через ее границу; (4) — это условие эквипотенциальности границы проводящей жидкости; (5) — условие затухания движения жидкости на бесконечной глубине; наконец, (6) — условие однородности поля на бесконечном удалении от поверхности.

Будем для простоты считать, что на боковых сторонах занимаемой жидкостью области заданы периодические граничные условия, а ширина щели равна $2\pi/k_0$. Тогда развиваться могут лишь моды, для которых проекции волновых векторов на ось x кратны k_0. При малых надкритичностях это означает, что неустойчивыми будут лишь гармоники с волновыми векторами $\mathbf{k}_1 = \{k_0, 0\}$ и $\mathbf{k}_2 = \{0, k_0\}$, что соответствует симметрии квадратной решетки. Следует отметить, что в случае бесконечной плоской поверхности жидкости неустойчивыми являются все моды с $|\mathbf{k}| = k_0$, причем нелинейные трехволновые взаимодействия между волнами, векторы которых повернуты относительно друг друга на угол $2\pi/3$, приводят к тому, что развиваются возмущения поверхности с гексагональной симметрией [3]. Особенностью нашей задачи является то, что трехволновые процессы вырождаются, а характер электрогидродинамической неустойчивости на слабонелинейных стадиях ее развития определяется четырехволновыми взаимодействиями.

Состояние системы однозначно определяется парой функций $\eta(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t) = \Phi|_{z=\eta}$ [4]. Представим возмущение формы поверхности η в виде:

$$\eta(\mathbf{r}, t) = A_1(t)e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + A_2(t)e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}} + A_1'(t)e^{2i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + A_2'(t)e^{2i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}$$

$$+ A_1''(t)e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} + A_2''(t)e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} + \text{к. с.},$$

а возмущение потенциала скорости на границе жидкости ψ в виде:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = B_1(t)e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + B_2(t)e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}} + B_1'(t)e^{2i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + B_2'(t)e^{2i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}$$

$$+ B_1''(t)e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} + B_2''(t)e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} + \text{к. с.},$$

где мы учли нелинейные взаимодействия основных пространственных гармоник k_0 со вторыми гармониками $2k_0$ и с комбинационными гармониками $\sqrt{2}k_0$.

Подставляя эти соотношения в исходные уравнения, находим, что при малых ε амплитуды гармоник $2k_0$ и $\sqrt{2}k_0$ выражаются через параметры порядка A_1 и A_2:

$$k_0 B_j = A_{jt}, \quad 2k_0 B_j' = A_{jt}', \quad \sqrt{2}k_0 B_j'' = A_{jt}'',$$

$$A_j' = 2k_0 A_j^2, \quad A_1'' = k_0 \alpha A_1 A_2, \quad A_2'' = k_0 \alpha A_1 A_2^*,$$

где $j = 1, 2$, а $\alpha = 8\sqrt{2} + 10$. Динамика поверхности жидкости при этом определяется следующими амплитудными уравнениями:

$$A_{1tt} = \varepsilon A_1 + s A_1 |A_1|^2 + \sigma A_1 |A_2|^2, \tag{7}$$

$$A_{2tt} = \varepsilon A_2 + s A_2 |A_2|^2 + \sigma A_2 |A_1|^2, \tag{8}$$

где мы перешли к безразмерным величинам при помощи замен $A_j \to A_j/k_0$ и $t \to t/\sqrt{2gk_0}$, а также ввели обозначения: $s = 11/4$ и $\sigma = 32\sqrt{2} + 65/2$. Данные уравнения получены с учетом квадратичных и кубических нелинейностей в уравнениях движения (1)–(6).

Примечательно, что коэффициент σ перед перекрестными членами в (7) и (8) более чем на один порядок превышает коэффициент s перед однородными членами ($\sigma/s \approx 28.3$). Это одначает, что вклад нелинейных взаимодействий $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_2$, ответственных за развитие одномерных структур, пренебрежимо мал по сравнению со вкладом взаимодействия $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_2$. Как следствие, квадратная структура возмущений поверхности на нелинейных стадиях развития неустойчивости более выгодна, чем одномерная, соответствующая условию $A_1 = 0$ либо $A_2 = 0$.

Из уравнений видно, что вследствие четырехволновых процессов временна́я эволюция амплитуд A_1 и A_2 носит взрывной характер — они неограниченно нарастают за конечное время с асимптотиками

$$|A_1| \to |A_2| \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\sigma}(t_c - t)}, \quad t \to t_c,$$

где t_c — момент "взрыва", т.е. уже в простейшей модели (7) и (8), где нелинейность учитывается лишь в первом неисчезающем порядке, прослеживается тенденция к появлению сингулярностей в решениях уравнений электрогидродинамики.

Таким образом, в настоящей работе построена модель развития электрогидродинамической неустойчивости заряженной поверхности жидкого металла в щелевом эмиттере, в соответствии с которой нелинейное взаимодействие продольных и поперечных щели поверхностных волн приводит к взрывному росту периодической системы возмущений поверхности, впоследствии превращающихся в цепочку эквидистантных эмитирующих острий, наблюдаемых в экспериментах [2].

Авторы благодарны В.Г. Суворову, любезно указавшему на публикацию [2], а также Н.Б. Волкову за интерес к работе.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект номер 00–02–17428) и INTAS (проект номер 99–1068).

Список литературы

[1] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. В. 4. С. 350.
[2] *Mitterauer J.* // Appl. Surf. Sci. 1995. V. 87/88. P. 79–90.
[3] *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // Phys. Lett. A. 2000. V. 272. P. 119–123.
[4] *Захаров В.Е.* // ПМТФ. 1968. В. 2. С. 86–94.