01;03;08

Параметрическое усиление волн завихренности в акустически активной среде

© *Н.Е. Молевич*

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П. Королева
E-mail: molevich@mb.ssau.ru

Поступило в Редакцию 28 декабря 2001 г.

Рассмотрено параметрическое взаимодействие акустических волн с вихревыми волнами в газовой среде. Показано, что в термодинамически неравновесном газе параметрический инкремент становится экспоненциальным.

Известно, что акустическое рассеяние на вихревых волнах возможно даже в однородных покоящихся средах. Впервые вынужденное рассеяние звука на флуктуационных вихрях рассмотрено в [1], причем режим рассеяния предполагался стационарным. Кроме того, в исходных уравнениях не учитывалась вторая (объемная) вязкость. Ниже впервые рассмотрено нестационарное рассеяние и найдено время установления стационарного режима. Показано, что в термодинамически неравновесном газе величина второй вязкости существенно влияет на рассматриваемый процесс.

Рассмотрим для определенности процесс вынужденного рассеяния высокочастотного звука ($\omega\tau \gg 1$) на вихревых волнах в колебательно-возбужденном газе с простой экспоненциальной моделью колебательной релаксации молекул:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E_e - E}{\tau(T, p)} + Q, \tag{1}$$

где E, E_e — колебательная энергия (в расчете на одну молекулу) и ее равновесное значение; τ — время колебательной релаксации; Q — мощность источника накачки, поддерживающего стационарную степень неравновесности; $S = Q\tau_0/T_0$; $\tau_0 = \tau(T_0, \rho_0)$; T, T_0, ρ, ρ_0 — температура, плотность и их стационарные значения.

Звуковое поле представим суперпозицией волны накачки (Π_0) и стоксовой рассеянной волны (Π_1):

$$\Pi = \frac{\Pi_0}{2}\exp[i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)] + \frac{\Pi_1}{2}\exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - \omega_1 t)] + \text{c. c.}, \qquad (2)$$

где $\Pi = P'/\rho_0 u_\infty^2$, P' — возмущение давления в акустической волне; u_∞ — замороженная скорость; с. с. — комплексно-сопряженная величина.

Вихревую моду ($\mathbf{W} = \operatorname{rot}\mathbf{V}, \mathbf{V}$ — возмущение скорости) также представим в виде бегущей волны с частотой $\Omega = \omega_0 - \omega_1 \ll \omega_0, \omega_1$ и волновым вектором $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{W}_0 \exp[i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \Omega t)] + \text{c. c.} \qquad (3)$$

Стандартная процедура укорочения [1,2] исходной системы уравнений релаксационной газодинамики приводит к следующим уравнениям, описывающим усиление рассеянной звуковой и вихревой волн в поле заданной диссипирующей волны накачки (распространяющейся вдоль оси X):

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial t} + u_\infty \cos\theta \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + g_1 u_\infty \Pi_1 = A W_0^* \cos\theta \Pi_0,$$

$$\frac{\partial W_0^*}{\partial t} + \alpha_W W_0^* = -iBu_\infty \Pi_1 \Pi_0^*, \qquad (4)$$

$$\Pi_0 = \Pi^{(0)} \exp(-g_0 x),$$

где θ — угол рассеяния звуковой волны;

$$\mathbf{A} = [\mathbf{k}_0 \times \mathbf{k}_1]/2q^2; \mathbf{B} = [\mathbf{k}_0 \times \mathbf{k}_1](k_0 + k_1) g_1 u_\infty^3/\omega_1^2; \alpha_W = i\Omega + \nu q^2;$$

$g_1 = \alpha_\infty + \delta(\omega_1)$; $g_0 = \alpha_0 + \delta(\omega_0)$; $\delta(\omega) = \omega^2(2\nu/3 + \chi/2C_{V\infty})/u_\infty^3$ — вязкостно-теплопроводностный коэффициент поглощения звука; ν, χ — коэффициент кинематической вязкости и температуропроводности; $\alpha_\infty = C_{V0}^2 \xi_0 / 2\rho_0 C_{V\infty}^2 \tau_0^2 u_\infty^3$ — коэффициент поглощения звука (при $\alpha_\infty > 0$), обусловленный наличием в среде релаксационных процессов, формирующих вторую вязкость; $\xi_0 = \tau_0(u_\infty^2 - u_0^2)\rho_0 C_{V\infty}/C_{V0}$ — низкочастотный коэффициент второй вязкости; $C_{P\infty}$, $C_{V\infty}$ — замороженные (высокочастотные) теплоемкости при постоянном давлении и объеме;

$C_{P0} = C_{P\infty} + C_K + S(\tau_T - \tau_\rho)$, $C_{V0} = C_{V\infty} + C_K + S\tau_T$ — равновесные (низкочастотные) теплоемкости в колебательно-возбужденном газе с процессом релаксации в форме (1) [3];

$$\tau_T \partial \ln \tau_0 / \partial \ln T_0; \tau_\rho = \partial \ln \tau_0 / \partial \ln \rho_0;$$

$C_K = dE_e/dT$; $u_0 = (C_{P0}T_0/C_{V0}m)^{1/2}$ — равновесная скорость звука; m — молекулярная масса. Все величины записаны в энергетических единицах.

Коэффициент второй вязкости ξ_0 при условии $S(C_{V\infty}\tau_\rho + \tau_T) + C_K < 0$ становится в колебательно-возбужденном газе отрицательным [3]. В результате инвертируется также коэффициент α_∞, и при g_0, $g_1 < 0$ подобная среда является акустически активной. Звук в ней усиливается, а не поглощается.

Для рассеяния под углом $\theta < \pi/2$ зададим краевые условия для системы (4) в виде $\Pi^{(0)} = \text{const}$, $\Pi_1(0, t) = P_1(t)$, $W(x, 0) = 0$, $\Pi_1(x, 0) = 0$. В результате (применив двойное преобразование Лапласа по t и x к системе (4)) получим

$$\Pi_1(x, t) = P_1(y)\exp(-g_1 x/\cos\theta)\eta(y) - \frac{1}{2}\int_0^t P_1(t - t')\frac{Z(x, t')}{y'}$$

$$\times \exp(-\alpha_W y' - g_1 x/\cos\theta) \cdot J_1[Z(x, t')]\eta(y')dt', \tag{5}$$

$$\mathbf{W}_0^* = -i\mathbf{B}u_\infty \Pi^{(0)*}\int_0^t P_1(t - t') \cdot \exp(-\alpha_W y' - g_1 x/\cos\theta - g_0 x)$$

$$\times J_0[Z(x, t')]\eta(y')dt', \tag{6}$$

где

$$y = t - x/u_\infty \cos\theta; \quad y' = y(x, t');$$

$Z(x, t) = \left\{2i\mathbf{BA}|\Pi^{(0)}|^2 y[1 - \exp(-2g_0 x)]/g_0\right\}^{1/2}$; J_n — функция Бесселя первого рода порядка n; η — единичная функция Хевисайда.

Стационарный режим рассеяния устанавливается при $t \geqslant |t_{St}|$, где

$$t_{St} = -\frac{i\mathbf{BA}|\Pi^{(0)}|^2}{2\alpha^2 w g_0}[1 - \exp(-2g_0 x)] + \frac{x}{u_\infty \cos\theta} \tag{7}$$

— комплексное время, при котором подынтегральное выражение в (5) становится максимально большим.

Подстановка (7) в подынтегральное выражение (5), (6) и использование метода перевала (при $Z \gg 1$) позволяет записать стационарные инкременты усиления интенсивностей вихревой и стоксовой рассеянной компоненты звука:

$$G_1 = -\frac{2g_1 x}{\cos\theta} - \frac{|\mathbf{AB}||\Pi^{(0)}|^2\Omega[1-\exp(-2g_0 x)]}{(\Omega^2+\nu^2 q^4)g_0} \cdot \operatorname{sign} g_1, \qquad (8)$$

$$G_W = G_1 - 2g_0 x.$$

При $g_0 x \ll 1$ и $g_1 > 0$ выражение (8) совпадает с приводимым в [1], где полагалось просто $g_1 = \delta$. В такой среде стоксового рассеяния в прямом направлении не происходит. Можно показать, что при достаточно больших $|\Pi^{(0)}|^2$ стоксовое рассеяние здесь возможно только в обратном направлении ($\pi/2 < 0 < \pi$), а антистоксовое — в прямом ($\theta < \pi/2$). Параметрический инкремент в поглощающей среде линеен, причем длина нелинейного взаимодействия ограничена величиной $x \sim g_0^{-1}$.

Отрицательная вторая вязкость кардинально меняет свойства рассматриваемого процесса рассеяния. Согласно (8) в акустически активной среде этот процесс не имеет порога. При больших интенсивностях накачки (или больших x) параметрический инкремент стоксового рассеяния (в прямом направлении) становится экспоненциальным, вместо линейного. То же самое происходит с параметрическим инкрементом антистоксового рассеяния, но в обратном направлении.

Оценим G_W при характерных параметрах рассматриваемой задачи: интенсивность волны накачки $I_0 = 1\mathrm{OW/m^2}$, $\theta = 15^\circ$, $\nu = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2}/S$, $k_0 = 300\,\mathrm{m^{-1}}$, нормальные условия газовой среды. Получаем $G_W = 30$ при $g_0 x \approx -2.4$. При таком параметрическом инкременте интенсивность вихревой компоненты, развиваемой из теплового шума, станет сравнимой с I_0. Таким образом, распространение мощной звуковой волны в акустически активной среде может сопровождаться интенсивным вихреобразованием.

В заключение отметим, что процесс вынужденного рассеяния звука на температурных волнах также описывается (с точностью до обозначений) системой, подобной (4) [2]. Поэтому отмеченные выше особенности вынужденного рассеяния звука в акустически активной среде должны проявляться и в этом случае. Этот вопрос будет исследован отдельно.

Список литературы

[1] *Пушкина Н.И., Хохлов Р.В.* // Акустический журн. 1971. Т. 17. № 1. С. 167–169.
[2] *Бункин Ф.В., Воляк К.И., Ляхов Г.А.* // Акустический журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 607–613.
[3] *Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 5. С. 941–943.