08

Индуцированные шумом переходы в системе коагулирующих частиц

© В.М. Логинов, О.Э. Лешаков

Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов СО РАН
E-mail: v_loginov@mail.ru

Поступило в Редакцию 16 февраля 2001 г.

Предложены точно решаемые модели системы коагулирующих частиц в стохастической среде. Показано, что в системе возникают индуцированные шумом дополнительные стационарные состояния. Результаты обсуждаются применительно к возможности оценки эффективных параметров среды.

Нелинейные динамические системы, испытывающие влияние внешнего шума, являются предметом интенсивных исследований последнего времени. Особый практический интерес вызывает случай "цветного" шума (шума с конечным корреляционным радиусом), поскольку шумы такого типа часто встречаются в природе и технике. Динамика находящейся в поле такого шума системы имеет весьма интересные с физической точки зрения особенности [1]. Важным, в частности, является возникновение дополнительных стационарных состояний системы, невозможных при полностью детерминированных внешних воздействиях.

В настоящей работе разнообразие индуцированных цветным шумом динамических режимов выявляется при анализе системы коагулирующих частиц в рамках точно решаемых моделей. Источником стохастических воздействий служит совокупное влияние многообразных факторов, как внешних, связанных со средой, так и внутренних. Существенное упрощение задачи достигается, если упомянутые факторы интерпретировать в терминах эффективных источников и полей, действующих на систему коагулирующих частиц. Математически стохастическое влияние учитывается через флуктуации параметров в динамических уравнениях коагуляции.

Ниже будет показано, что величина корреляционного радиуса цветного шума играет роль параметра порядка и весьма нетривиально влияет на установившийся режим коагуляции. Представляется важным и то, что возможна реконструкция параметров эффективной стохастической среды через измеряемые характеристики распределений концентрации коагулирующих частиц.

При изучении процессов коагуляции часто используют феноменологическое уравнение Смолуховского [2]. Оно описывает временну́ю динамику концентрации j-меров C_j и при наличии в системе внешнего источника частиц и зависящей от времени скорости коагуляции имеет вид:

$$\frac{dC_j}{dt} = I_j f(t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{j-1} K(j-n, n; t) C_{j-n} C_n - C_j \sum_{n=1}^{\infty} K(j, n; t) C_n. \qquad (1)$$

Здесь функция $K(x, y; t)$ — ядро (или константа) коагуляции. По своему физическому смыслу эта функция характеризует скорость коагуляции и считается заданной. Первое слагаемое уравнения (1) описывает поступление j-меров в систему, при этом функция $f(t)$ предполагается случайной. Будем считать, что функция $K(j, n; t)$ не зависит от индексов j и n, т.е. $K(j, n; t) = a(t)$, и в систему поступают только мономеры, т.е. $I_j = I\delta_{j,1}$, где $\delta_{j,1}$ — символ Кронекера. Такие ограничения не являются чрезмерно жесткими и часто используются при описании процессов коагуляции в системах с источниками (см., например, [2,3]).

Случайную динамику внешних воздействий моделируем скачкообразным марковским дихотомическим процессом (Д-шумом) $\alpha(t) = \pm 1$ с экспоненциально спадающей корреляционной функцией $K(t) =< \alpha(t)\alpha(t+\tau) >= \exp(-2\nu|\tau|)$. Символ $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций процесса $\alpha(t)$. Для Д-шума значения $\alpha(t) = \pm 1$ равновероятны, $\langle \alpha(t) \rangle = 0$, а моменты времени смены состояний $\alpha(t)$ образуют пуассоновский поток событий [4]). Время $\tau \sim 1/\nu$, с одной стороны, задает характерное время спада корреляций процесса $\alpha(t)$, а с другой — определяет среднее время "жизни" одного из состояний.

Проанализируем поведение счетной концентрации $N = \sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j$. Она является важной обобщенной и измеряемой в эксперименте характеристикой процесса коагуляции. Стохастическое уравнение для счетной концентрации примет (при линейной зависимости $f(t)$ и $a(t)$ от $\alpha(t)$) вид

$$\dot{N} = p(N) + q(N)\alpha(t). \qquad (2)$$

Из-за нелинейности уравнений (1) и (2) статистическое описание процессов коагуляции проведем в рамках кинетических уравнений для вероятностных распределений N. Ограничимся анализом одноточечного распределения $W(N,t)$ счетной концентрации в системе (1) при воздействии марковского Д-шума при произвольных ν. $W(N,t)dN$ есть вероятность того, что значения счетной концентрации в момент времени t попадают в интервал $(N, N + dN)$.

Уравнение вида (2) хорошо знакомо в теории индуцированных шумом фазовых переходов, и точное стационарное решение $W_s(N)$ для случая, когда $\alpha(t)$ — марковский Д-шум, известно (см., например, [1,5]). Распределение $W_s(N) \equiv 0$ за пределами носителя, который представляет собой замкнутый интервал $0 \leqslant N \leqslant N_b$, границы которого задаются устойчивыми стационарными состояниями, определяемыми из уравнения (2) при $\alpha = \pm 1$ и $\dot{N} = 0$.

1. Стохастический источник, постоянное ядро $a(t) = \text{const} = a$. Рассмотрим типичную ситуацию, когда мономеры поступают в систему с постоянной интенсивностью в случайные промежутки времени: $f(t) = \frac{1}{2}(1 + \alpha(t))$, тогда в (2) $p(N) = \frac{1}{2}(I - a(t)N^2)$, $q(N) = \frac{I}{2}$.

Приведем (в безразмерных параметрах $\varepsilon = 4\nu/a$, $\kappa = 2I/a$) решение для $W_s(N)$:

$$W_s(N) = CN^{-2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2N}\right) (\sqrt{\kappa} - N)^{\frac{\varepsilon}{4\sqrt{\kappa}} - 1} (\sqrt{\kappa} + N)^{-\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{\kappa}} + 1\right)}, \qquad (3)$$

где C — нормировочная постоянная. Параметры ε и κ сравнивают характерную частоту включений и частоту поступления частиц из источника с частотой процессов коагуляции. Распределение $W_s(N)$ задано на промежутке $N \in [0, N_b]$, $N_b = \sqrt{\kappa}$.

Важным следствием решения (3) является разбиение фазового пространства параметров системы на области с существенно различными "геометрическими" образами стационарной плотности вероятности. Структура фазовой плоскости определяется соотношениями параметров ε и κ, в зависимости от чего может реализоваться несколько типов стационарных распределений: монотонное, одномодовое (распределение с одним максимумом) или распределение с двумя экстремумами (максимумом и минимумом) (рис. 1). Экстремумы распределения $W_s(N)$ задаются соотношениями

$$N_1 = \frac{\nu}{a} = \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{и} \qquad N_2 = \sqrt{\frac{I}{a}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}. \qquad (4)$$

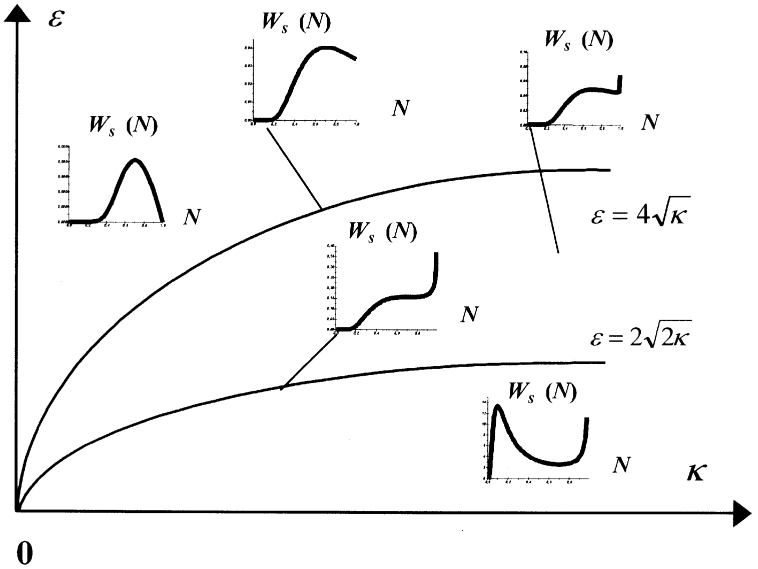

Рис. 1.

Обращает на себя внимание то, что экстремальные значения $W_s(N)$ (т.е. измеряемые значения N) определяются разными параметрами. При увеличении частоты включений (выключений) источника система перемещается из нижней области фазовой диаграммы, где максимальное значение $W_s(N)$ определяется частотой, в верхнюю, где та же величина определяется интенсивностью источника. При этом система претерпевает серию "геометрических" переходов для функции $W_s(N)$, т.е. в системе реализуются различные варианты ее макроскопического поведения (происходят индуцированные шумом фазовые переходы). Выявленная цепочка переходов от распределения с минимумом внутри носителя к прямо противоположной ситуации — к распределению с максимумом физически означает, что в системе коагулирующих частиц за счет изменения частоты включения стохастического источника частиц можно эффективно влиять на средний размер формируемых кластеров, величина которого связана с положением максимума распределения.

2. Постоянный источник $f(t) = \text{const} = I_0$, ***стохастическое ядро***. Рассмотрим систему коагулирующих частиц, в которой неста-

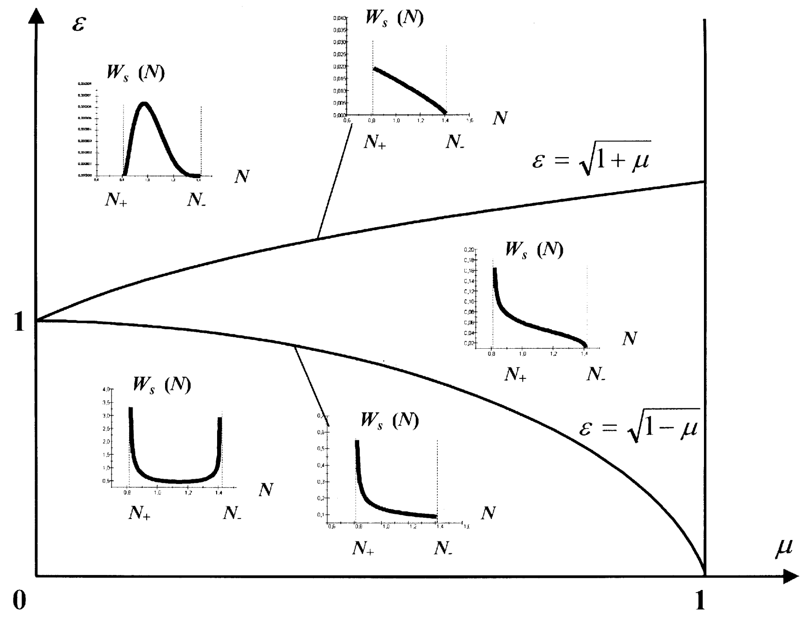

Рис. 2.

ционарность внешних условий вызывает скачкообразные флуктуации ядра коагуляции, например, через включение дополнительных механизмов агрегации, в частности инерционного осаждения, турбулентной коагуляции и т. д. (см. [6]). Примем $a = a(t) = (a_0 + a_1\alpha(t))$, где $\alpha(t)$ — рассмотренный выше Д-шум. Из физических соображений следует соотношение $a_1 \leqslant a_0$. Стационарное решение для $W_s(N)$ в безразмерных параметрах $\kappa = 2I_0/a_0$, $\varepsilon = \nu/a_0$, $\mu = a_1/a_0$ имеет вид

$$W_s = C\,\frac{N^2(N-N_+)^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa(1+\mu)}}-1}(N_- - N)^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa(1-\mu)}}-1}}{(N+N_+)^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa(1+\mu)}}+1}(N_- + N)^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa(1-\mu)}}+1}}, \tag{5}$$

где $N_\pm = \sqrt{\frac{\kappa}{1\pm\mu}}$. Параметр μ характеризует "кинетическую контрастность" процессов коагуляции при разных значениях $\alpha(t)$. Очевидно, $\mu \leqslant 1$. Значение $\mu = 1$ отвечает максимальной контрастности, т. е. ситуации, когда процесс коагуляции имеет динамику "включений–

выключений". Распределение задано на промежутке $N \in [N_+, N_-]$. Здесь левая граничная точка отлична от нуля. Как видно из решения (6), внешний шум и в этом случае порождает разбиение фазового пространства параметров на области, в которых система имеет различные макроскопические состояния (рис. 2).

В заключение отметим, что описание воздействия стохастической среды на коагулирующую систему в терминах эффективных источников частиц (а также стоков и эффективных флуктуаций ядра) достаточно физично, особенно для атмосферной коагуляции. Это представляется важным с точки зрения получения содержательной информации о состоянии внешней среды, учитывая сложность его оценки экспериментальными методами (см. (4)). Дополнительный интерес представляет возможность решения обратных задач, например определение константы коагуляции по известным ν, I и наблюдаемым значениям N. Кроме того, зависимость установившегося значения счетной концентрации от средней частоты процесса $\alpha(t)$ указывает на определенные возможности по управлению средним размером формируемых кластеров.

Список литературы

[1] *Хорстхемке В., Лефевер Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 397 с.

[2] *Волощук В.М.* Кинетическая теория коагуляции. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. С. 284.

[3] *Лушников А.А., Пискунов В.Н., Осидзе И.Г.* // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 3. С. 679–682.

[4] *Bourret R., Frisch U., Pouquet A.* // Physica. 1973. V. 65. N 2. P. 409–415.

[5] *Loginov V.M.* // Acta Physica Polonica. 1996. V. B 27. N 3. P. 693–735.

[6] *Довгалюк Ю.А., Ивлев Л.С.* Физика водных и других атмосферных аэрозолей. С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 1998.