01;03

Нелинейное дисперсионное соотношение для электрокапиллярных волн на заряженной поверхности диэлектрической жидкости

© *Н.М. Зубарев*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 5 февраля 2001 г.

Показано, что задача о профиле прогрессивной электрокапиллярной волны на границе диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом, экранирующим поле над жидкостью, допускает аналитическое решение. Это позволило получить и проанализировать точное выражение для нелинейного дисперсионного соотношения, связывающего частоту, волновое число и амплитуду волны.

Дисперсионное соотношение для электрокапиллярных волн на границе глубокой диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом имеет следующий вид [1,2]:

$$\omega_0^2(k) = \frac{\alpha}{\rho} k^3 - \frac{P}{4\pi\rho} k^2, \qquad P = E^2 + E'^2, \tag{1}$$

где E и E' — напряженности электрического поля в жидкости и соответственно над жидкостью, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, k — волновое число, а ω_0 — частота. В этом выражении мы пренебрегли влиянием силы тяжести, что возможно при выполнении условий: $P \gg 8\pi\sqrt{g\alpha\rho}$ и $k \gg 4\pi\rho g/P$, где g — ускорение свободного падения. Отметим, что основанный на анализе соотношения (1) подход к исследованию эволюции заряженной поверхности жидкости применим лишь в случае возмущений границы малой амплитуды: $A \ll k^{-1}$. Для волн с конечной амплитудой основной нелинейный эффект заключается в зависимости дисперсионного соотношения от A (см., например, [3]):

$$\omega = \omega(k, A).$$

В настоящей работе мы покажем, что в случае, когда поверхностный заряд полностью экранирует поле над границей [4,5], т. е. $E' = 0$, задача о профиле нелинейной волны может быть решена аналитически, что позволит нам найти точное выражение для нелинейного дисперсионного соотношения и затем провести его анализ.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной диэлектрической жидкости, занимающей область, ограниченную свободной поверхностью $y = \eta(x, t)$. Потенциал электрического поля в среде $\varphi(x, y, t)$ и потенциал скорости жидкости $\Phi(x, y, t)$ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \tag{2}$$

которые следует решать совместно с кинематическим и динамическим граничными условиями:

$$\eta_t = \Phi_y - \eta_x \Phi_x, \quad y = \eta(x, t), \tag{3}$$

$$\Phi_t + \frac{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}{2} + \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - E^2}{8\pi\rho} = \frac{\alpha\eta_{xx}}{\rho(1 + \eta_x^2)^{3/2}}, \quad y = \eta(x, t), \tag{4}$$

условием эквипотенциальности поверхности жидкости при наличии свободного поверхностного заряда:

$$\varphi = 0, \quad y = \eta(x, t), \tag{5}$$

а также условиями однородности электрического поля и затухания поля скоростей на бесконечном удалении от поверхности:

$$\varphi \to -Ey, \quad \Phi \to 0, \quad y \to -\infty. \tag{6}$$

Уравнения, описывающие прогрессивную электрокапиллярную волну (волну, профиль которой не меняется в связанной с волной системе координат), получаются из уравнений электрогидродинамики (2)–(6) при помощи следующих подстановок:

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(x', y), \quad \Phi(x, y, t) = \Phi'(x', y) + Cx', \quad \eta(x, t) = \eta(x'),$$

где $x' = x - Ct$, а постоянная C имеет смысл скорости движения волны по направлению оси x. Удобно ввести функцию тока $\Psi(x', y)$, гармонически сопряженную к потенциалу Φ':

$$\Psi_{x'} = -\Phi'_y, \quad \Psi_y = \Phi'_{x'}.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Psi_{x'x'} + \Psi_{yy} = 0 \tag{7}$$

со следующими граничными условиями:

$$\Psi = 0, \quad y = \eta(x'), \tag{8}$$

$$\Psi \to -Cy, \quad y \to -\infty. \tag{9}$$

Как несложно заметить, уравнения (7)–(9) с точностью до констант совпадают с уравнениями для потенциала электрического поля (2), (5), (6). Как следствие, существует функциональная связь между потенциалами Ψ и φ:

$$\varphi/E = \Psi/C.$$

А в таком случае форма волны в движущейся системе координат $\{x', y\}$ задается получаемым из условия (4) уравнением

$$\frac{\Psi_{x'}^2 + \Psi_y^2 - C^2}{2} = \frac{\alpha' \eta_{x'x'}}{\rho(1 + \eta_{x'}^2)^{3/2}}, \quad y = \eta(x'), \tag{10}$$

где мы ввели эффективное поверхностное натяжение:

$$\alpha' = \frac{4\pi\rho C^2}{E^2 + 4\pi\rho C^2}\,\alpha. \tag{11}$$

Уравнения (7)–(10) совпадают с уравнениями, описывающими форму прогрессивной капиллярной волны [6], а также с точностью постоянных множителей равновесную конфигурацию заряженной поверхности жидкого металла [7,8]. Эта система уравнений допускает широкий класс точных периодических решений [6], используя которые можно найти зависимость амплитуды возмущений поверхности $A = \frac{1}{2}(\eta_{\max} - \eta_{\min})$ от волнового числа k, скорости волны C и параметров системы:

$$A = \left(\frac{4\alpha'^2}{C^4\rho^2} - \frac{4}{k^2}\right)^{1/2}.$$

Подставляя сюда выражение (11) для коэффициента α' и полагая, что $C = \omega/k$ (величина C является фазовой скоростью волны), находим точное выражение для нелинейного дисперсионного соотношения:

$$\omega^2(k, A) = \frac{\alpha k^3}{\rho\sqrt{1 + A^2k^2/4}} - \frac{E^2k^2}{4\pi\rho}. \tag{12}$$

Видно, что в пределе бесконечно малых амплитуд, $A \to 0$, это выражение переходит в линейное дисперсионное соотношение (1). Из (1) ясно, что $\omega_0^2 < 0$ при $k < k_0 = E^2/(4\pi\alpha)$, и, следовательно, развивается апериодическая электрогидродинамическая неустойчивость изначально плоской поверхности жидкости. Если же выполняется условие $k > k_0$, то частота ω_0 будет мнимой, что соответствует распространению линейных диспергирующих волн. Рассмотрим теперь, что вносит учет зависимости от A, т. е. учет нелинейности, в понимание характера динамики свободной заряженной поверхности диэлектрической жидкости. Из (12) несложно получить: при фиксированном волновом числе $k > k_0$ максимальное значение амплитуды соответствует волне с $\omega = 0$, причем

$$A_{\max}(k) = \left(\frac{64\pi^2\alpha^2}{E^4} - \frac{4}{k^2}\right)^{1/2}.$$

Если амплитуда превысит это значение, то будет $\omega^2 < 0$, что приводит к некорректно поставленной задаче в контексте волнового распространения. Кроме того, это означает, что амплитуда возмущений поверхности может неограниченно нарастать со временем, что соответствует взрывной электрогидродинамической неустойчивости. Это обобщает простейший линейный критерий развития неустойчивости плоской поверхности жидкости, $k < k_0$, на случай возмущений конечной амплитуды. Отметим также, что при любых значениях волновых чисел справедливо: $A_{\max}(k) < 8\pi\alpha E^{-2}$. Как следствие, уравнения (2)–(6) допускают волновые решения лишь при $k > k_0$ и $A < 2/k_0$. С использованием (12) можно провести качественный анализ устойчивости подобных решений. Для случая сравнительно небольших амплитуд можно представить (12) в виде ряда (разложение Стокса):

$$\omega(k, A) = \omega_0(k) + \omega_2(k)A^2,$$

где ω_0 определяется выражением (1), а ω_2 — выражением

$$\omega_2(k) = -\frac{\alpha k^5}{16\omega_0(k)\rho}.$$

Критерием развития модуляционной неустойчивости для волн малой амплитуды является [3]: $\omega_0''\omega_2 < 0$, где $\omega'' = d^2\omega/dk^2$. Несложно обнаружить, что в нашем случае волновой пакет устойчив при $k_0 < k < 4k_0/3$ и неустойчив при $k > 4k_0/3$.

Таким образом, анализ нелинейного дисперсионного соотношения (12) позволил сформулировать ряд выводов, касающихся устойчивости заряженной поверхности диэлектрической жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды, а также области существования волновых решений уравнений электродинамики. Более подробный анализ динамики возмущений поверхности возможен с использованием конформного отображения занимаемой жидкостью области в полуплоскость (см., например, [9]). В частности, если пренебречь капиллярными эффектами, подобная техника редуцирует исходные уравнения движения (2)–(6) к интегрируемому уравнению лапласовского роста [10].]

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00–02–17428) и INTAS (проект 99–1068).

Список литературы

[1] *Melcher J.R.* Field-coupled Surface Waves. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1963.
[2] *Горьков Л.П., Черникова Д.М.* // ДАН СССР. 1976. Т. 228. В. 4. С. 829.
[3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
[4] *Володин В.П., Хайкин М.С., Эдельман В.С.* // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. В. 10. С. 707.
[5] *Шикин В., Лейдерер П.* // ФНТ. 1997. Т. 23. В. 5/6. С. 624.
[6] *Crapper G.D.* // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 532.
[7] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 79.
[8] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990.
[9] *Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* // Phys. Lett. A. 1996. V. 221. P. 73.
[10] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71. В. 9. С. 534.