01

Проблема генерации солнечного магнитного поля

© Ю.В. Вандакуров

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург

Поступило в Редакцию 29 марта 2001 г.

Рассматривается процесс генерации неосесимметричного в основном тороидального магнитного поля в конвективной зоне Солнца в предположении, что осуществление этой генерации поля обусловлено снижением энергозатрат на конвективный перенос тепла. Предполагается, что поле антисимметрично относительно экваториальной плоскости и пропорционально синусу или косинусу азимутального угла. Мы показываем, что рост величины поля будет иметь место, если присутствует как радиальный градиент угловой скорости вращения, так и стационарная осесимметричная меридиональная циркуляция вещества. Предполагается, что изменение направления полоидального движения (из-за чего меняется знак генерируемого поля) осуществляется после достижения предельно допустимой величины поля. По-видимому, это связано с возбуждением соответствующей турбулентной вязкости среды. В такой модели возобновление процесса генерации поля связано с изменением знака магнитного поля.

Недавно была высказана гипотеза, что генерация магнитного поля на Солнце обусловлена тем, что происходит формирование состояния с минимальными энергозатратами на конвективный перенос тепла [1]. Иначе говоря, предполагается, что трансформация тепловой энергии в магнитную способствует снижению упомянутых энергозатрат. В связи со сказанным интерес представляют бездиссипативные процессы генерации поля. По мнению Краузе и Рэдлера [2], "имеются основания предполагать, что существуют сферические динамо, связанные с меридиональной циркуляцией; это модификации динамо такого типа, который был предложен Гайлитисом [3]". "В этом случае флуктуативные движения не играют какой-либо роли и могут генерироваться только неосесимметричные магнитные поля". Заметим, что Гайлитис изучал проблему возбуждения поля системой двух стационарных осесимметричных кольцевых вихрей.

Ниже мы изучаем один вариант подобного невязкого взаимодействия между нестационарным неосесимметричным полем и стационарными симметричными относительно экватора распределениями вращения и меридиональной циркуляции, предполагая, что типы симметрии поля и циркуляции противоположны друг другу. Считаем еще, что основное поле является тороидальным, хотя имеется и малая полоидальная составляющая. Как оказывается, рост поля, зависящего от азимутального угла φ по закону $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$, происходит, если присутствуют как радиальный градиент угловой скорости вращения, так и циркуляция, соответствующая медленному всплыванию или погружению вещества вблизи экватора и движению в обратном направлении на высоких широтах. Ниже предполагается, что два последних условия удовлетворяются. Тот факт, что в солнечной конвективной зоне радиальный градиент угловой скорости вращения, вообще говоря, отличен от нуля, подтверждается наблюдениями [4].

Мы представляем все векторные (или скалярные) величины в виде разложений по полной системе ортогональных векторных сферических гармоник $\mathbf{Y}^{(\lambda)}_{J,M}$ (или сферических функций $Y_{J,M}$), являющихся функциями угловых переменных, где $\lambda = 0$ или ± 1, индекс J — неотрицательное целое число, а M — азимутальное число (см. [5]). Коэффициентами рассматриваемых разложений, например в случае гидродинамической скорости $\mathbf{v}$, магнитного поля $\mathbf{B}$ и плотности ρ, являются $v^{(\lambda)}_{J,M} = v^{(\lambda)}_{JM}$, $B^{(\lambda)}_{J,M}$ и $\rho_{J,M}$. Эти величины зависят от радиуса r и времени t, причем r, ϑ, φ образуют сферическую систему координат.

Общие соотношения для обсуждаемых коэффициентов разложений, вытекающие из уравнений равновесия с учетом всех нелинейных сил, рассматривались в работах [6,7]. Те же соотношения можно использовать при изучении уравнения индукции, которое в случае, когда векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ характеризуются упомянутой выше симметрией и среда является идеально проводящей, приводится к следующим уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iM\Omega\right)B^{(0)}_{J,M} = \frac{a}{r}\left\{(J^2-1)^{1/2} f_J D_{J-1,M} - [J(J+2)]^{1/2} g_J D_{J+1,M}\right\},$$
$$J = 1, 3, \ldots \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iM\Omega\right)B^{(-1)}_{J,M} = \frac{a}{r} M(30)^{1/2} v^{(-1)}_{20}\left[f_J B^{(0)}_{J-1,M} + g_J B^{(0)}_{J+1,M}\right],$$
$$J = 2, 4, \ldots \qquad (2)$$

где

$$f_J = \left[\frac{J+1}{J(2J-1)(2J+1)}\right]^{1/2}, \quad g_J = \left[\frac{J}{(J+1)(2J+1)(2J+3)}\right]^{1/2}, \quad (3)$$

$$D_{J,M} = \frac{\partial}{\partial r} r v_{10}^{(0)} B_{J,M}^{(-1)} - [J(J+1)]^{1/2} v_{10}^{(0)} B_{J,M}^{(+1)} = r^2 B_{J,M}^{(-1)} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{v_{10}^{(0)}}{r}\right], \quad (4)$$

причем $M = \pm 1$, $a = (3/8\pi)^{1/2}$, $\Omega = i(a/r)v_{10}^{(0)}$ — угловая скорость вращения и в уравнении (1) для основной тороидальной составляющей поля опущены члены порядка $(v_{20}^{(+1)}/r)B_{J,M}^{(0)}$.

В уравнениях (1)–(2) присутствуют как быстроосциллирующие (с угловой частотой вращения Ω), так и медленноменяющиеся члены. Частота последних порядка $[i\psi]^{1/2}$, где $\psi = v_{20}^{(-1)}(d\Omega/dr)$. Заметим, что в случае дифференциального по широте вращения угловые частоты быстрых осцилляций обычно отличаются от угловой частоты вращения [8].

Переход к уравнениям, описывающим медленные колебания, можно осуществить при помощи подстановки

$$B_{J,M}^{(\lambda)} = e^{-iM\Omega t} Q_{J,M}^{(\lambda)}. \quad (5)$$

В результате придем к уравнениям с такими же, как в уравнениях (1)–(2), правыми частями, но для медленноменяющихся переменных $Q_{J,M}^{(0)}$ и $Q_{J,M}^{(-1)}$. Например,

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{J,M}^{(-1)} = M \frac{1}{r}\left(\frac{45}{4\pi}\right)^{1/2} v_{20}^{(-1)}\left[f_J Q_{J-1,M}^{(0)} + g_J Q_{J+1,M}^{(0)}\right], \quad M = \pm 1. \quad (6)$$

Это уравнение можно использовать для исключения переменной $Q_{J,M}^{(-1)}$, в результате получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{J,M}^{(0)} = -iM\left(\frac{45}{4\pi}\right)^{1/2} \psi\Big\{(J^2-1)^{1/2} f_J \left[f_{J-1} Q_{J-2,M}^{(0)} + g_{J-1} Q_{J,M}^{(0)}\right]$$
$$- [J(J+2)]^{1/2} g_J \left[f_{J+1} Q_{J,M}^{(0)} + g_{J+1} Q_{J+2,M}^{(0)}\right]\Big\},$$
$$J = 1, 3, \ldots, \qquad M = \pm 1. \quad (7)$$

Видно, что в рассматриваемом приближении радиальная зависимость скорости $v_{20}^{(-1)}$ определяется соотношением

$$\psi = v_{20}^{(-1)} d\Omega/dr = \text{const}, \tag{8}$$

причем условие медленного изменения во времени величин $Q_{J,M}^{(0)}$ удовлетворяется, если $|\psi|^{1/2} \ll \Omega$. Кроме того, опущенные при выводе уравнения (1) малые члены будут много меньше оставленных, если

$$v_{20}^{(+1)}/(r|\psi|^{1/2}) \ll 1. \tag{9}$$

Существенно, что в случае полоидального движения, для которого удовлетворяется соотношение (8), коэффициенты в уравнении (7) являются постоянными величинами, так что вместо исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (7) для коэффициентов $Q_{J,M}^{(0)}(r,t)$, где радиус r просто играет роль параметра задачи. Это обстоятельство свидетельствует о справедливости применения описанной процедуры перехода к медленноменяющимся переменным, несмотря на то что речь идет о среде, вращающейся с различной угловой скоростью на разных глубинах.

Поскольку коэффициенты системы уравнений (7) постоянны, ее общее решение записывается в виде $\sum_k A_k \exp(\sigma_k t)$, где $A_k = \text{const}$, k — номер частного решения, а σ_k — корни характеристического уравнения, вытекающего из системы (7), если заменить в ней $\partial/\partial t$ на σ_k. Находя из этой системы безразмерные комплексные собственные значения

$$q_k = \sigma_k^2/[M(45/4\pi)^{1/2}\psi], \tag{10}$$

мы можем затем из соотношения (10) определить квадраты обратных времен роста (если $\sigma_k > 0$) или затухания (при $\sigma_k < 0$) всех k-мод. Мы проводили расчеты, оставляя лишь N коэффициентов $Q_{J,M}^{(0)}$ в уравнениях (7). Например, при $N = 1$ отличен от нуля только коэффициент $Q_{1,M}^{(0)}$ и $k = 1$. В следующем приближении ($N = 2$) появляется еще коэффициент $Q_{3,M}^{(0)}$ и дополнительная мода $k = 2$ и т.д. В таблице приведены решения q_k для моделей, соответствующих числам N от 1 до 4.

N	q_k		$\mathrm{Re}\left[(q_k)^{1/2}_{\max}\right]$
1	$0.0000 + i0.1000$		0.2236
2	$\pm 0.0649 + i0.0417$		0.2665
3	$\pm 0.0799 + i0.0199$	$0.0000 + i0.0359$	0.2847
4	$\pm 0.0824 + i0.0146$	$\pm 0.0250 + i0.0211$	0.2882

Наибольший интерес представляют быстро растущие моды, имеющие положительные и максимальные по величине действительные части квадратного корня $(q_k)^{1/2}$. Эти действительные части в нашем случае отличны от нуля, они обозначены как $\mathrm{Re}[(q_k)^{1/2}_{\max}]$ и приведены в последнем столбце таблицы. Подставляя их в формулу (10), найдем соответствующие положительные значения $\mathrm{Re}(\sigma_k)$. Видно, что эти значения при $N > 3$ выходят на асимптотический уровень, т. е. они перестают зависеть от N. Соответствующее значение является искомым решением задачи. Заметим, однако, что величина $\mathrm{Im}(\sigma_k)$ может существенно зависеть от характера дифференциального вращения по широте.

Следует еще подчеркнуть, что при изменении направления полоидального движения происходит изменение знака генерируемого магнитного поля. Действительно, знаки коэффициентов $v_{20}^{(-1)}$, $B_{J,M}^{(-1)}$ и $D_{J,M}$ однозначно связаны друг с другом. Кроме того, при изменении такого знака происходит переход к другому решению для собственного значения q_k, характеризующемуся наиболее высокой скоростью роста амплитуды общего магнитного поля. Последний же переход сопровождается изменением знака тороидального поля.

Полученные результаты позволяют сделать два важных заключения. Во-первых, колебательно растущая во времени мода присутствует при любых знаках как коэффициента $v_{20}^{(-1)}$, так и радиального градиента угловой скорости вращения $d\Omega/dr$. Во-вторых, характерное время τ наиболее быстро растущих мод поля слабо зависит от числа N оставленных мод, если $N > 3$. Принимая, что $q^{1/2}_{\max} \approx 0.29$, получим

$$\tau \approx 2.5|\psi|^{-1/2}. \tag{11}$$

В основной нижней части солнечной конвективной зоны градиент $d\Omega/dr$ можно приближенно заменить на $0.1\Omega/r$ (см., например, работу [4]), тогда время τ будет порядка длительности солнечного цикла (т. е.

порядка 10 лет) в случае $v_{20}^{(-1)} \sim 10\,\mathrm{cm/s}$. При этом горизонтальные полоидальные скорости будут больше радиальных приблизительно в $|d\ln\rho/d\ln r|$ раз. При таких обстоятельствах условие (9) будет удовлетворяться, если речь идет о нижней половине солнечной конвективной зоны.

Иная ситуация имеет место в подповерхностных слоях солнечной конвективной зоны, где радиальный градиент угловой скорости вращения отрицателен и по абсолютной величине, возможно, почти на 2 порядка больше цитированной выше величины. В таких условиях и при той же величине коэффициента $v_{20}^{(-1)}$ обсуждаемая генерация поля может происходить на порядок быстрее рассмотренной выше. Не исключена возможная связь подобного сравнительно быстро протекающего процесса с квазидвухлетним циклом генерации поля, изучавшимся Беневоленской и Макаровым [9]. В этом случае горизонтальные полоидальные скорости в солнечных подповерхностных слоях могут достигать значений порядка $10\,\mathrm{m/s}$, а условие (9) будет удовлетворяться, если $|d\Omega/dr|$ достаточно велико.

Известно, что движения со скоростями в районе $50\,\mathrm{m/s}$ в слое, ограниченном относительными радиусами 0.97 и 0.999, были обнаружены Гонзалесом Хернандезом и др. [10] при анализе гелиосейсмических данных. Величина наблюдаемых скоростей довольно близка или даже несколько больше цитированной выше.

Итак, выведенные уравнения свидетельствуют о самопроизвольном экспоненциальном росте в основном тороидального магнитного поля в конвективной зоне с ненулевым радиальным градиентом угловой скорости вращения и в присутствии медленной стационарной меридиональной циркуляции, тип которой обсуждался выше. Следует ожидать, что на том этапе, когда поле достигнет предельно допустимой величины, должна будет возбуждаться конвективная магнитная вязкость, способствующая как прекращению роста поля, так и вытеснению магнитного поля в вышерасположенные слои. Однако в нашей модели осуществление трансформации тепловой энергии в магнитную связывается со снижением энергозатрат на конвективный перенос тепла, поэтому следует ожидать возобновления упомянутой трансформации энергии путем изменения (по-видимому, под действием турбулентной вязкости) направления медленной меридиональной циркуляции вещества. При этом изменится также знак генерируемого поля. В итоге, как мы предполагаем, ниже зоны всплывающего магнитного поля может начаться генерация нового поля другого знака. Гипотеза, что такая схема в общих чертах описывает модель солнечного цикла, заслуживает дальнейшего изучения.

Заметим еще, что характерная величина обсуждаемого магнитного поля оценивалась в работах [1,7,11] на основании сравнения с наблюдениями широтных зависимостей скорости вращения. По этим оценкам неосесимметричное тороидальное поле имеет порядок 10 kG. Такая оценка согласуется с той, что общая доля излучаемой Солнцем энергии, переходящей в энергию магнитного поля, составляет около 0.1% [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда "Интеграция" (контракт KO854) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–02–16939).

Список литературы

[1] *Вандакуров Ю.В.* // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 25. С. 868. (*Vandakurov Yu.V.*) // Astron. Letters. 1999. V. 25. P. 758).
[2] *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* // Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. (*Krause F., Rädler K.-X.* Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Berlin: Academic-Verlag, 1980).
[3] *Гайлитис А.* // Магнитная гидродинамика. 1970. Т. 1. С. 19.
[4] *Schou J., Antia H.M., Basu S.* et al. // Astrophys. J. 1998. V. 505. P. 390.
[5] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* // Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. (*Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Khersonskii V.K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1988).
[6] *Вандакуров Ю.В.* // Астрон. журн. 1999. Т. 76. С. 29. (*Vandakurov Yu.V.* // Astron. Reports. 1999. V. 43. P. 24).
[7] *Вандакуров Ю.В.* // Астрон. журн. 2001. Т. 78. С. 253. (*Vandakurov Yu.V.* // Astron. Reports. 2001. V. 45. P. 216).
[8] *Вандакуров Ю.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2001 (в печати).
[9] *Беневоленская Е.Е., Макаров В.И.* // Письма в Астрон. журн. 1992. Т. 18. С. 195.
[10] *González Hernández I., Patrón J., Bogart R.S.* et al. // Astrophys. J. Lett. 1999. V. 510. P. L153.
[11] *Вандакуров Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 10. С. 82. (*Vandakurov Yu.V.* // Technical Physics Letters. 1999. V. 25. P. 415).
[12] *Foukal P.A., Lean J.* // Astrophys. J. 1998. V. 328. P. 347.