01;10

Стохастическое уравнение эволюции каналированных частиц

© В.П. Кощеев

Сургутский государственный университет
E-mail: koscheev@surgu.wsnet.ru

Поступило в Редакцию 29 января 2001 г.

Стохастическое уравнение эволюции поперечной энергии быстрых заряженных частиц в плоскостных и осевых каналах кристалла получено из условия несохранения адиабатического инварианта.

Стохастическое уравнение эволюции поперечной энергии каналированных частиц необходимо для построения кинетического уравнения типа Фоккера–Планка в пространстве поперечных энергий без использования гипотезы Линдхарда о достижении статистического равновесия [1]. Вывод кинетического уравнения Фоккера–Планка с помощью кинетического уравнения для слабо возмущенных квантовых систем не является вполне удовлетворительным [2], так как исходное уравнение, построенное в рамках теории возмущений, ограничивает область применимости уравнения Фоккера–Планка условием медленного изменения адиабатического инварианта, которым является поперечная энергия каналированных частиц.

Первопричиной регулярного и хаотического движения каналированных частиц является электрический потенциал кристалла, который складывается из кулоновских потенциалов атомных ядер, расположенных в узлах кристаллической решетки, и кулоновских потенциалов атомных электронов

$$U(r)=\sum_n\left(\frac{Ze^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|}-\sum_{j=1}^{Z}\frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{nj}|}\right), \tag{1}$$

где Ze — заряд атомного ядра; $\mathbf{r}_n=\mathbf{r}_{n0}+\delta\mathbf{r}_n$; вектор $\delta\mathbf{r}_n$ определяет положение атомного ядра, смещенного из узла кристаллической решетки благодаря тепловым колебаниям; $\mathbf{r}_{nj}=\mathbf{r}_{n0}+\delta\mathbf{r}_n+\delta\mathbf{r}_{nj}$; вектор $\delta\mathbf{r}_{nj}$ определяет положение j-го электрона по отношению к положению n-го атомного ядра. Вектор $\mathbf{r}_{n0}$ определяет положение n-го узла кристаллической решетки.

Усреднение по независимым тепловым колебаниям атомов кристалла осуществляется с помощью функции распределения Гаусса. Усреднение по квантовым флуктуациям местоположения атомных электронов осуществляется с помощью метода [3], который Бете использовал для вычисления атомного форм-фактора. Эти усреднения производятся по координатам всех ядер и электронов и обозначаются символами $\langle \ldots \rangle_T$ и $\langle \ldots \rangle_e$ соответственно. Движение одной быстрой заряженной частицы в поперечном направлении описывается классическим уравнением движения

$$m\,\frac{d^2\mathbf{r}_\perp}{dt^2} = \mathbf{F}_\perp, \tag{2}$$

где $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ — поперечная координата, $\mathbf{F}_\perp = (F_x, F_y)$ — поперечная сила; $F_x = -\partial U(r)/\partial x$; $U(r) = U(x, y, z)$ — потенциальная энергия каналированной частицы; $m = \gamma m_0$; $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ —лоренц-фактор; $\beta = v/c$; c — скорость света; v — скорость заряженной частицы в направлении оси OZ; m_0 — масса покоя.
Электрический потенциал может быть записан в виде суммы своего среднего значения и флуктуации потенциала

$$U(r) = \overline{U} + \delta U_z(r) + \delta U(r), \tag{3}$$

где $\overline{U}$ — непрерывный потенциал осевого $\overline{U} = \overline{U}(x, y)$ или плоскостного $\overline{U} = \overline{U}(x)$ канала кристалла, усредненный по тепловым колебаниям атомов; $\delta U_z(r) = \langle U \rangle_{e,T} - \overline{U}$ — поправка к непрерывному потенциалу, связанная с дискретностью расположения атомов в оси или плоскости; $\delta U(r) = (U)(r) - \langle U \rangle_{e,T}$ — флуктуация потенциала, вызванная тепловыми колебаниями атомных ядер и квантовыми флуктуациями местоположения атомных электронов.

Рассмотрим сперва случай плоскостного каналирования. Поперечную энергию каналированных частиц запишем в виде

$$\varepsilon = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \overline{U}(x). \tag{4}$$

Скорость изменения поперечной энергии каналированных частиц имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\,[\varepsilon - \overline{U}(x)]} \cdot \delta f, \tag{5}$$

где $\delta f = -\frac{\partial \delta U}{\partial x}$ — флуктуация поперечной силы.

Адиабатический инвариант имеет вид [4]

$$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)} \sqrt{2m[\varepsilon - \overline{U}(x)]} \cdot dx, \tag{6}$$

где $X_{1,2}$ — точки поворота классической траектории каналированных частиц могут быть определены из уравнения $\overline{U}(X_{1,2}) = \varepsilon$.

Период колебаний каналированных частиц в плоскостном канале кристалла определим следующим образом:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{T(\varepsilon)}{2\pi}. \tag{7}$$

Если адиабатический инвариант зависит только от поперечной энергии $I = I(\varepsilon)$, которая не сохраняется со временем $\varepsilon = \varepsilon(t)$, то адабатический инвариант также не сохраняется со временем $I = I[\varepsilon(t)]$.

Определим скорость изменения адиабатического инварианта со временем следующими формулами:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)} \sqrt{\frac{2m}{\varepsilon - \overline{U}(x)}} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot dx. \tag{9}$$

Приравнивая друг к другу правые части этих формул, получим с помощью (5) и (7) уравнение эволюции поперечной энергии каналированных частиц

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{T(\varepsilon)} \int\limits_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)} \delta f \cdot dx, \tag{10}$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{T(\varepsilon)} \big\{ \delta U[X_2(\varepsilon), t] - \delta U[X_1(\varepsilon), t] \big\}. \tag{11}$$

Легко видеть, что поперечная энергия каналированных частиц не сохраняется только тогда, когда правая часть уравнения эволюции является источником флуктуаций. Аналогичным образом может быть построено стохастическое уравнение эволюции поперечной энергии быстрых заряженных частиц в осевых каналах кристалла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{S(\varepsilon)} \iint\limits_{\varepsilon=\overline{U}(x,y)} \frac{d\delta U}{dt} dxdy, \tag{12}$$

где

$$S(\varepsilon) = \iint\limits_{\varepsilon=\overline{U}(x,y)} dxdy.$$

В формуле (12) усреднение производится по области, доступной каналированной частице с поперечной энергией ε. Такого типа усреднение применяется в рамках гипотезы Линдхарда о достижении статистического равновесия [1]. Исходя из стохастических уравнений (10) или (12) может быть легко построено уравнение Фоккера–Планка (см., например, [5] и цит. там лит.).

Список литературы

[1] *Линдхард Й.* // УФН. 1969. Т. 99. В. 2. С. 249–296.
[2] *Базылев В.А., Жеваго Н.К.* Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. М.: Наука, 1987. 269 с.
[3] *Бете Г.* Квантовая механика. М.: Мир, 1965. 333 с.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973. 207 с.
[5] *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. М.: Наука, 1976. 494 с.