01;09

Общие уравнения с малым параметром в теории синтеза токов на произвольных незамкнутых поверхностях

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
E-mail: vav@novsu.ac.ru

Поступило в Редакцию 11 апреля 2001 г.

Решается проблема восстановления пространства токов в самой общей форме для произвольной идеально проводящей ограниченной поверхности. Получены общие уравнения с малым параметром в теории синтеза токов на произвольных незамкнутых поверхностях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим идеально проводящую, ограниченную поверхность S, которая совпадает с частью координатной поверхности в ортогональной криволинейной системе координат. Плотность поверхностного тока обозначим через

$$\mathbf{j}(q_1, q_2) = \mathbf{t}_1 j_1(q_1, q_2) + \mathbf{t}_2 j_2(q_1, q_2), \tag{1}$$

где $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ — орты координатных линий.

Связь между диаграммой направленности $\mathbf{F}$ и током $\mathbf{j}$ выражается соотношениями

$$F_\theta(\theta, \varphi) = \mathbf{i}_\theta \iint\limits_S \mathbf{j} \exp(ik\rho\cos(\gamma))dS, \tag{2}$$

$$F_\varphi(\theta, \varphi) = \mathbf{i}_\varphi \iint\limits_S \mathbf{j} \exp(ik\rho\cos(\gamma))dS, \tag{3}$$

где $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ — орты сферической системы координат r, θ, φ в точке наблюдения; ρ — расстояние между началом системы координат и точкой излучения на поверхности S; γ — угол между направлениями на точки наблюдения и излучения, проведенными из начала координат.

Если известна диаграмма направленности, то соотношения (2) и (3) превращаются в систему интегральных уравнений относительно неизвестного тока вида

$$\begin{cases} K_{11} j_1 + K_{12} j_2 = F_\theta, \\ K_{21} j_1 + K_{22} j_2 = F_\varphi, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$K_{11} j_1 = \iint\limits_S j_1 (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{t}_1) \exp(ik\rho \cos(\gamma)) dS,$$

$$K_{12} j_2 = \iint\limits_S j_2 (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{t}_2) \exp(ik\rho \cos(\gamma)) dS,$$

$$K_{21} j_1 = \iint\limits_S j_1 (\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{t}_1) \exp(ik\rho \cos(\gamma)) dS,$$

$$K_{22} j_2 = \iint\limits_S j_2 (\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{t}_2) \exp(ik\rho \cos(\gamma)) dS.$$

Целью данной работы является разработка методов решения системы (4). Ранее полученные результаты [1] в данной работе обобщаются на случай произвольных поверхностей.

2. Вариационная задача и ее сведение к операторному уравнению. Введем необходимые пространства. Векторная диаграмма направленности $\mathbf{F}(F_\theta, F_\varphi)$ принадлежит прямой сумме пространств L_2. Компоненты поверхностного тока j_n $(n = 1, 2)$ принадлежат гильбертовым пространствам H_n. Плотность тока $\mathbf{j}$ принадлежит прямой сумме этих пространств $\mathbf{j} \in H = H_1 \oplus H_2$. Полагаем, что пространство H может быть определено с помощью положительного симметричного оператора A. Определение оператора A будет дано ниже.

С учетом введенных определений систему уравнений (4) или исходные уравнения синтеза можно записать в виде одного операторного уравнения

$$K\mathbf{j} = \mathbf{F}, \tag{5}$$

где

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

Не всякая диаграмма $\mathbf{F}$ реализуема, поэтому ставится задача нахождения тока $\mathbf{j}$, который реализует близкую диаграмму и одновременно имеет как можно меньшую норму. Иначе требуется минимизировать функционал

$$N(\mathbf{j}) = \alpha[\mathbf{j}]^2 + (K\mathbf{j} - \mathbf{F}, K\mathbf{j} - \mathbf{F}), \tag{6}$$

где α — малый параметр, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L_2 \oplus L_2$, $[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в пространстве H. Справедлива теорема.

Теорема 1. Функционал $N(\mathbf{j})$ достигает минимума на решениях уравнения

$$\alpha A\mathbf{j} + K^*K\mathbf{j} = K^*\mathbf{F}, \tag{7}$$

где K^* — сопряженный оператор, который определяется формулой

$$K^* = \begin{pmatrix} K_{11}^* & K_{21}^* \\ K_{12}^* & K_{22}^* \end{pmatrix}$$

и действует из пространства диаграмм $L_2 \oplus L_2$ в пространство токов H.

Доказательство. Пусть $\mathbf{j}$ — решение уравнения (7), а $\mathbf{h}$ — произвольный элемент из H. Рассмотрим разность

$$N(\mathbf{j}+\mathbf{h}) - N(\mathbf{j}) = \alpha[\mathbf{j}+\mathbf{h}, \mathbf{j}+\mathbf{h}] + (K\mathbf{j} + K\mathbf{h} - \mathbf{F}, K\mathbf{j} + K\mathbf{h} - \mathbf{F})$$
$$- \alpha[\mathbf{j}, \mathbf{j}] - (K\mathbf{j} - \mathbf{F}, K\mathbf{j} - \mathbf{F}) \tag{8}$$

и преобразуем ее с учетом определения сопряженного оператора

$$N(\mathbf{j}+\mathbf{h}) - N(\mathbf{j}) = \alpha[\mathbf{h}, \mathbf{h}] + (K\mathbf{h}, K\mathbf{h}) + (\mathbf{h}, \alpha A\mathbf{j} + K^*K\mathbf{j} - K^*\mathbf{F})$$
$$+ (\alpha A\mathbf{j} + K^*K\mathbf{j} - K^*\mathbf{F}, \mathbf{h}). \tag{9}$$

Учитывая, что ток удовлетворяет уравнению (7), из (9) получим

$$N(\mathbf{j}+\mathbf{h}) = N(\mathbf{j}) + \alpha[\mathbf{h}]^2 + (K\mathbf{h}, K\mathbf{h}). \tag{10}$$

Так как вторoе и третье слагаемые в (10) являются неотрицательными величинами, то функционал $N(\mathbf{j})$ достигает минимума на решении уравнения (7). Теорема доказана.

А теперь обратимся к уравнению (7). Умножим обе части на A^{-1}:

$$\alpha\mathbf{j} + A^{-1}K^*K\mathbf{j} = A^{-1}K^*\mathbf{F}. \tag{11}$$

Уравнение (11) является уравнением Фредгольма второго рода с положительным оператором в силу соотношения

$$[A^{-1}K^*K\mathbf{j}, \mathbf{j}] = (AA^{-1}K^*K\mathbf{j}, \mathbf{j}) = (K^*K\mathbf{j}, \mathbf{j}) = (K\mathbf{j}, K\mathbf{j}).$$

Поэтому справедлива теорема.

Теорема 2. Для любой диаграммы $\mathbf{F}$ уравнения (11) и (7) имеют единственное решение $\mathbf{j}$, и это решение доставляет минимум функционалу $N(\mathbf{j})$.

Отметим, что теория уравнений Фредгольма второго рода с малым параметром развита достаточно полно. Результаты этой теории применимы к уравнениям (11) и (7). Отметим два важных предложения [2].

Предложение 1. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной диаграммы направленности $\mathbf{F}$ в классе токов

$$[\mathbf{j}]^2 \leqslant \varepsilon$$

существует единственный ток $\mathbf{j}_0$, доставляющий минимум функционалу

$$P(\mathbf{j}) = (K\mathbf{j} - \mathbf{F}, K\mathbf{j} - \mathbf{F}),$$

т. е. создающий диаграмму, наиболее близкую к заданной.

Предложение 2. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной диаграммы направленности $\mathbf{F}$ в классе токов, удовлетворяющих условию

$$P(\mathbf{j}) \leqslant \varepsilon,$$

существует единственный ток $\mathbf{j}_0$ с минимальной нормой.

Доказательство этих предложений легко получается из результатов работы [2]. Таким образом, к произвольной диаграмме направленности $\mathbf{F}$ можно приблизиться с любой наперед заданной точностью; существует единственный ток с минимальной нормой, осуществляющий приближение к диаграмме; и этот ток находится из решения уравнения (7).

3. Уравнение анализа и пространства токов. Остается решить вопрос выбора пространства токов. Для этого известны два способа. В первом методе пространство выбирается из условия ограниченности поля в ближней зоне [1]. Однако пространство токов можно также определить на основе уравнения анализа. Оказывается, оба результата приводят к одному и тому же результату. Воспользуемся вторым подходом.

Уравнение анализа имеет вид [3]

$$\left[\operatorname{grad}_P \iint\limits_S \left(\operatorname{grad}_Q \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}, \mathbf{j}\right) dS \right.$$
$$\left. - k^2 \iint\limits_S \mathbf{j}\, \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}\, dS, \mathbf{n}\right] = i\omega\varepsilon[\mathbf{E}^0, \mathbf{n}], \qquad (12)$$

где $\mathbf{E}^0$ — первичное электрическое поле, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, R — расстояние между точкой излучения Q и точкой наблюдения P, ω — круговая частота, ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

В результате анализа уравнения (12) можно выделить главный сингулярный оператор в виде

$$A\mathbf{j} = -\operatorname{grad}_\tau, \operatorname{div} \iint\limits_S \mathbf{j}\, \frac{\exp(-R)}{R}\, dS$$
$$+ \mathbf{t}_1 \iint\limits_S j_1 \frac{\exp(-R)}{R}\, dS + \mathbf{t}_2 \iint\limits_S j_2 \frac{\exp(-R)}{R}\, dS. \qquad (13)$$

Здесь τ означает взятие тангенциальной составляющей.

Теорема 3. Оператор A является симметричным и положительным. Доказательство. Вначале докажем симметричность и положительность оператора, представленного вторым слагаемым (13):

$$A_1 j_1 = \iint\limits_S j_1 \frac{\exp(-R)}{R}\, dS. \qquad (14)$$

Для этого воспользуемся известным разложением функции Грина в интеграл Фурье

$$\frac{\exp(-R)}{R}$$
$$= \frac{1}{2\pi^3} \iiint\limits_{R^3} \frac{\exp[-i\chi_1(x-x') - i\chi_2(y-y') - i\chi_3(z-z')]}{\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2}\, d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3, \qquad (15)$$

где $x = x(q_1, q_2)$, $y = y(q_1, q_2)$, $z = z(q_1, q_2)$ — точка наблюдения на поверхности S, а $x' = x'(q_1', q_2')$, $y' = y'(q_1', q_2')$, $z' = z'(q_1', q_2')$ — точка излучения на поверхности S.

Из (14) и (15) получим

$$(A_1 j_1, j_1) = \frac{1}{2\pi^3} \iiint\limits_{R^3} \frac{|\tilde{j}_1|^2}{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2} \, d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3, \tag{16}$$

где

$$\tilde{j}_1 = \iint\limits_S j_1(i\chi_1 x' + i\chi_2 y' + i\chi_3 z') \, dS.$$

А из (16) следует как положительность, так и симметричность.

Оператор, определяемый первым слагаемым в (13), в общем случае является неограниченным. Поэтому его нужно рассмотреть на плотном множестве функций, обращающихся в нуль на границе, провести интегрирование по частям и, наконец, использовать представление функции Грина (15). Этим путем можно доказать симметричность и положительность указанного оператора, а следовательно, и всего оператора (13). Теорема доказана.

4. Уравнение синтеза с малым параметром. Таким образом, в работе получено новое уравнение с малым параметром вида

$$\alpha A\mathbf{j} + K^* K\mathbf{j} = K^*\mathbf{F}, \tag{17}$$

где интегро-дифференциальный оператор A определяется по формуле

$$A\mathbf{j} = -\operatorname{grad}_\tau \operatorname{div} \iint\limits_S \mathbf{j} \frac{\exp(-R)}{R} \, dS$$
$$+ \mathbf{t}_1 \iint\limits_S j_1 \frac{\exp(-R)}{R} \, dS + \mathbf{t}_2 \iint\limits_S j_2 \frac{\exp(-R)}{R} \, dS.$$

Оператор A является симметричным и положительным. Ток $\mathbf{j}$ при решении (17) ищется как элемент энергетического пространства оператора A. Он обладает нужным поведением на ребре, так как носителем информации о свойствах тока является именно этот оператор.

Список литературы

[1] *Эминов С.И.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 14. С. 97–102.
[2] *Сахнович Л.А.* // Успехи математических наук. 1980. Т. 35. В. 4(214). С. 69–129.
[3] *Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пимнов Ю.В.* // ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 96–100.