02

О фокусировке сферической рентгеновской волны изогнутым кристаллом в схеме Иоганна

© *Т. Чен*

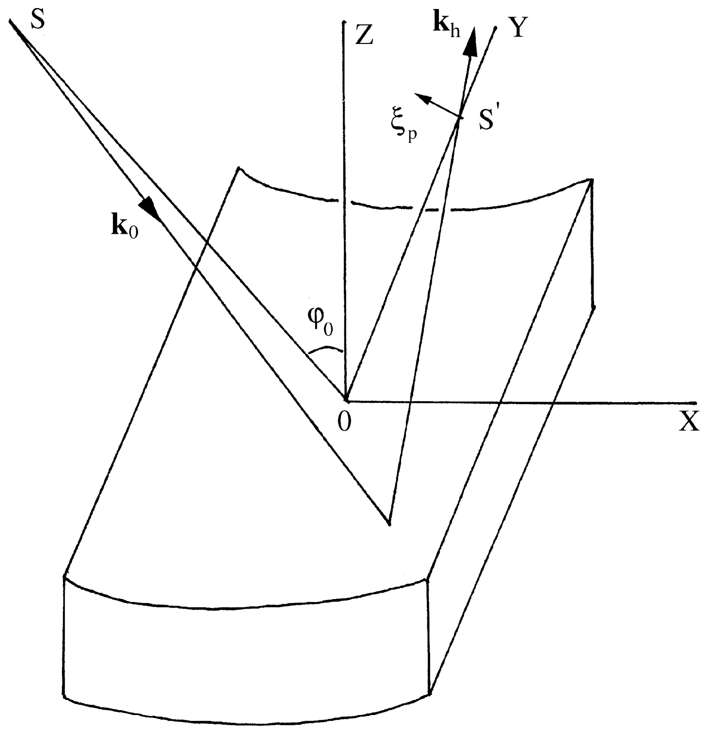
Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова
E-mail: docent 65@mtu-net.ru

Поступило в Редакцию 28 апреля 2001 г.

Рассмотрена фокусировка сферического рентгеновского пучка при его брэгговском отражении от изогнутого кристалла в схеме Иоганна. Показано, что при учете влияния сферической аберрации пучка интенсивность волны в фокусе определяется квадратом модуля функции Эйри.

Фокусировка рентгеновского излучения в схеме Иоганна [1] является одной из наиболее известных и привлекательных возможностей получения пучков с большой светосилой. Особенностью этой схемы является то, что отражающие плоскости изогнутого кристалла в любой точке образуют один и тот же угол с плоскими гармониками падающей сферической волны. В случае, если не предпринять мер по коллимации пучка, сферическая аберрация брэгговски отраженных лучей может стать очень существенной.

В настоящей работе по аналогии с [2] на основе представлений геометрической оптики рассмотрена брэгговская фокусировка сферической рентгеновской волны изогнутым кристаллом (см. рисунок). Предполагается, что дифракционное отражение волны носит когерентный упругий характер, т. е. $\mathbf{k}_0 + \mathbf{h} = \mathbf{k}_h$, $\mathbf{k}_h^2 = \mathbf{k}_0^2 = k^2$. Вектор $\mathbf{h}$ обратной решетки



изогнутого кристалла равен: $\mathbf{h}(h_x, h_y, h_z) = \mathbf{h}_0 - \nabla(\mathbf{h}_0\mathbf{u})$, где $\mathbf{h}_0$ — вектор обратной решетки неизогнутого кристалла, $h_0 = 2k\sin\theta$, θ — брэгговский угол, $\mathbf{u}(-xz/R_x, -yz/Ry \approx 0, x^2/2R_x + y^2/2R_y \approx x^2/2R_x)$.

Учитывались все члены, пропорциональные x^2, где x — координата по оси X точки падения произвольного луча. Тогда направляющие косинусы для волнового вектора $\mathbf{k}_0$ равны:

$$\gamma_{0x} = \sin\varphi_0 + \frac{x}{L_0}\cos^2\varphi_0 - \frac{x^2\cos^2\varphi_0}{L_0^2}\sin\varphi_0$$

$$- \frac{x^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{2L_0^2}\left(\cos\varphi_0 - \frac{L_0}{R_x}\right), \qquad (1)$$

$$\gamma_{0y} = \frac{y}{L_0}\left(1 - \frac{x\sin\varphi_0}{L_0} - \frac{x^2\cos\varphi_0}{2L_0^2}\left(\cos\varphi_0 - \frac{L_0}{R_x}\right)\right) = 0,$$

$$\gamma_{0z} = -\cos\varphi_0 + \frac{x}{L_0}\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + \frac{x^2}{2R_xL_0} - \frac{x^2}{L_0^2}\sin^2\varphi_0\cos\varphi_0$$

$$+ \frac{x^2\cos^2\varphi_0}{2L_0^2}\left(\cos\varphi_0 - \frac{L_0}{R_x}\right),$$

$$h_x = -2k\sin\theta(x\cos\Psi/R_x + \sin\Psi),$$

$$h_y = -2k\sin\theta\cos\Psi\cdot y/R_y \approx 0,$$

$$h_z = 2k\sin\theta(\cos\Psi - \sin\Psi\cdot x/R_x),$$

где Ψ — угол наклона отражающих плоскостей к поверхности кристалла.

Фокусировка в схеме Иоганна является одномерной ($R_y \gg R_x$), т.е. происходит в сагиттальной плоскости $Y = 0$.

Рассматривая симметричную дифракцию, когда $\Psi = 0$, $\varphi_0 = \pi/2 - \theta$, в случае произвольного расстояния L_0 от источника сферической волны до кристалла получаем:

$$\Delta\theta = \left| -\frac{x}{R_x} + \frac{x\sin\theta}{L_0} - \frac{x^2(2\sin^2\theta - 1)}{2R_xL_0\cos\theta} - \frac{x^2\sin\theta\cos\theta}{L_0^2} \right.$$

$$\left. + \frac{x^2\sin\theta}{2R_x^2\cos\theta} + \frac{x^2\sin^2\theta}{2L_0^2\cos\theta}\left(\sin\theta - \frac{L_0}{R_x}\right)\right|, \tag{2}$$

где $\Delta\theta = |\chi_{hr}|/\sin 2\theta$ — полуширина кривой брэгговского отражения, χ_{hr} — рентгеновская поляризуемость. Когда $L_0 \neq R_x\sin\theta$, сферической аберрацией можно пренебречь, отбросив в (2) квадратичные по x члены. Тогда из (2) имеем, что размер x_{eff} области на поверхности кристалла, в пределе которой дифрагированный парциальный луч не "выходит" за границу области полного отражения, равен:

$$x_{eff} = \Delta\theta\left|\sin\theta/L_0 - 1/R_x\right|^{-1}, \qquad L_0 \neq R_x\sin\theta. \tag{3}$$

Для схемы Иоганна, когда $L_0 = R_x\sin\theta$, получаем:

$$x_{eff}^{Johann} = R_x\sqrt{2\Delta\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}, \qquad L_0 = R_x\sin\theta. \tag{4}$$

Из (3), (4) видно, что схема Иоганна позволяет получить выигрыш в светосиле на 2–3 порядка по сравнению с другими схемами, так как $x_{eff}^{Johann} \sim (\Delta\theta)^{1/2}$. Однако рост светосилы сопровождается увеличением сферической аберрации отраженных лучей. Оценка падения интенсивности в фокусе, вызванного сферической аберрацией в схеме Иоганна, дает при отражении (220) излучения CuK_α от кристалла кремния, изогнутого с радиусом изгиба $R_x \cong 1\,\mathrm{m}$, величину $\sim 10^2$ раз.

Используя рентгено-дифракционный принцип Гюйгенса–Френеля и разлагая фазу сферической волны до членов $\sim x^3$, получим, что амплитуда $E_h(\xi_p)$ дифрагированной волны в фокусе описывается функцией Эйри:

$$E_h(\xi_p) \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{(3A_2)^{1/3}}\,\Phi\left(\frac{A_1}{\{3A_2\}^{1/3}}\right), \tag{5}$$

где

$$\Phi(t) = \left(\sqrt{\pi}\right)^{-1}\int\limits_0^{+\infty}\cos\left(\frac{u^3}{3}+ut\right)du$$

$$= \left(2\sqrt{\pi}\right)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\left(ut+u^3/3\right)\right\}du$$

— функция Эйри,

$$A_1 = -k\xi_p/R_x, \qquad A_2 = -k\cos\theta/2R_x^2 < 0.$$

Интенсивность $I_n(\xi_p) = |E_h(\xi_p)|^2$ дифрагированной волны в фокусе обращается в нуль при $t_{\min} = -2.33811$, т. е. там же, где равна нулю функция Эйри. При $t < 0$ функция Эйри $\Phi(t)$ имеет колебательный характер, а при $t > 0$ $\Phi(t)$ монотонно убывает. Из (5) следует, что учет влияния сферической аберрации в схеме Иоганна приводит к несовпадению положения геометрического фокуса ($\xi_p = 0$) и максимума интенсивности сфокусированной волны. Наибольший максимум функции Эйри, равный 0.9494, достигается при значении аргумента $t_{\max} = -1.02$. Для отражения (220) излучения CuK_α от кристалла кремния, $R_x \cong 1\,\mathrm{m}$, координата максимума интенсивности равна $\xi_p^{\max} = -0.1\,\mu\mathrm{m}$. Учтем, что $\Phi(-2.34) = -0.0024$, $\Phi(4.00) = 0.0016866$. Тогда пространственная ширина максимума интенсивности $\Delta\xi \approx 0.6\,\mu\mathrm{m}$ для тех же параметров, что и выше. Ширина фокуса на полувысоте интенсивности

$\gtrsim 0.1\,\mu$m. Дифракционное уширение без учета сферической аберрации, рассчитанное по формуле $\Delta\xi = \lambda R_x/x_{eff}$, взятой из работ [3,4] дает $\Delta\xi \approx 1.5 \cdot 10^{-2}\,\mu$m. В работах [3,4] авторами получено выражение для интенсивности дифрагированной волны в фокусе $I_h \sim (\sin t/t)^2$, которое не учитывает эффекта сферической аберрации. При этом для фазы падающей сферической волны использовано параболическое приближение и сделано допущение об ограничении размера области x_{eff} на поверхности кристалла длиной, начиная с которой становится сущестенным влияние аберрации на фокусировку.

Таким образом, в настоящей работе показано, что увеличение светосилы, достигаемое в схеме Иоганна, сопровождается ростом сферической аберрации дифрагированного пучка. Аналитическое выражение для распределения интенсивности в фокусе, полученное нами, отличается от формулы существовавшей ранее в теории брэгговской фокусировки, и учитывает эффект сферической аберрации.

Список литературы

[1] *Johann H.* // Z. Physik. 1931. Bd 60. S. 185.
[2] *Чен Т., Бушуев В.А., Кузьмин Р.Н.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 10. С. 60–63.
[3] *Габриелян К.Т., Чуховский Ф.Н., Пинскер З.Г.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. № 1. С. 3–11.
[4] *Габриелян К.Т., Чуховский Ф.Н., Пискунов Д.И.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. В. 3(9). С. 834–846 .