

01

## Функционал входного сопротивления тонкого электрического вибратора

© В.А. Неганов, Д.С. Клюев, С.В. Медведев

Поволжская государственная академия телекоммуникации  
и информатики, Самара  
E-mail: \_neganov\_@mail.ru

Поступило в Редакцию 10 мая 2001 г.

Получен функционал для входного сопротивления относительно вариации распределения тока в вибраторе. В приближении распределения тока по известному закону кругового синуса получена простая приближенная формула для входного сопротивления симметричного электрического вибратора. Приведены зависимости активной и реактивной составляющих входного сопротивления симметричного вибратора от отношения длины плеча вибратора к длине волны для трех значений диаметра проводника вибратора.

**1. Суть проблемы.** Тонкие электрические вибраторы получили самое широкое распространение как в качестве самостоятельных антенн, так и в виде элементов сложных антенных систем. Обычно входное сопротивление электрического вибратора определяется отношением напряжения к току в точках питания:  $Z = U/I_0$ . Входное сопротивление является важным параметром, определяющим возможность согласования входа антенны в нужной полосе частот. Ток в точке питания  $I_0$  численно можно определить из решения интегродифференциальных уравнений Поклингтона и Харрингтона, а также интегрального уравнения Халлена [1–4]. Однако численное решение указанных выше уравнений, как интегральных уравнений первого рода с фредгольмовскими ядрами, приводит к некорректно поставленным задачам [5]. В результате остается открытым вопрос проверки истинности решения и установления его адекватности рассматриваемой физической задаче. Математически корректно расчет электрического вибратора проводился в [6,7] с помощью сингулярных интегральных уравнений [8,9]. Но и этот метод приводит к достаточно сложной процедуре численного определения распределения тока вдоль электрического вибратора. Известен и эвристический метод эквивалентных схем [2,3], в соответствии с которым вибратору ставится

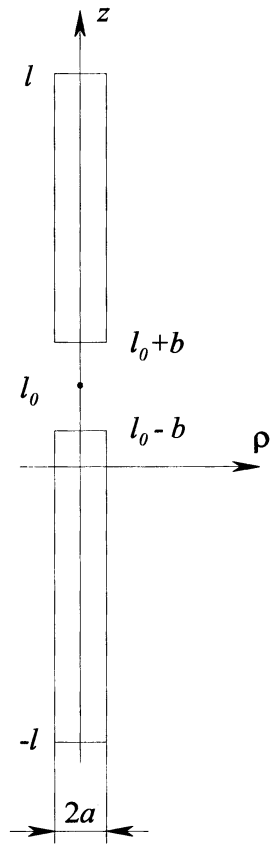


Рис. 1.

в соответствие отрезок разомкнутой на конце двухпроводной линии с потерями, но он имеет ограниченную область применения. Ниже записан функционал входного сопротивления электрического вибратора, позволяющий получать простые аналитические формулы для определения  $Z$ .

**2. Функционал для входного сопротивления.** Рассмотрим тонкий проводник длиной  $2l$  и радиусом  $a$ , возбуждаемый в области разрыва

$z \in [l_0 - b, l_0 + b]$  генератором (рис. 1). Будем исходить из интегро-дифференциального уравнения Поклингтона относительно неизвестного распределения тока  $I$ :

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \int_{-l}^l I(z') \frac{e^{-ikR}}{R} dz' = -\frac{i4\pi k}{Z_c} E^{ext}, \quad (1)$$

где стороннее электрическое поле:

$$E^{ext} = \begin{cases} E_0 & z \in [l_0 - b, l_0 + b], \\ 0 & z \notin [l_0 - b, l_0 + b], \end{cases}$$

$R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$ ,  $k = \omega/c$  — волновое число,  $Z_c$  — характеристическое сопротивление среды, окружающей вибратор.

Перепишем уравнение Поклингтона (1) следующим образом:

$$k^2 \int_{-l}^l I(z') \frac{e^{-ikR}}{R} dz' + \frac{d}{dz} \int_{-l}^l I'(z') \frac{e^{-ikR}}{R} dz' = -\frac{i4\pi k}{Z_c} E^{ext}, \quad (2)$$

где  $I'(z') = \frac{dI}{dz'}$ .

При выводе (2) были использованы граничные условия для тока на концах вибратора ( $I(l) = I(-l) = 0$ ) и очевидное равенство:

$$\frac{d}{dz} \frac{e^{-ikR}}{R} = -\frac{d}{dz'} \frac{e^{-ikR}}{R}.$$

Далее, умножая соотношение (2) на  $I(z)$  и интегрируя от  $-l$  до  $l$ , получаем равенство:

$$\int_{-l}^l \int_{-l}^l [k^2 I(z)I(z') - I'(z)I'(z')] \frac{e^{-ikR}}{R} dz' dz = -\frac{i4\pi k E_0}{Z_c} \int_{-b}^b I(z) dz, \quad (3)$$

которое для узких зазоров ( $kb \ll 1$ ) переходит в функционал для определения входного сопротивления вибратора:

$$Z = \frac{U}{I_0} = \frac{iZ_c}{4\pi k} \frac{\int_{-l}^l \int_{-l}^l [k^2 I(z)I(z') - I'(z)I'(z')] \frac{e^{-ikR}}{R} dz' dz}{I_0^2}, \quad (4)$$

где  $I_0$  — ток в точке питания  $z = l_0$ ,  $U = 2E_0 b$ .

Нетрудно показать, что соотношение (4) является стационарным функционалом относительно вариации функции  $I(z)$  при наложении на нее условия (2), а значит и уравнения Поклингтона (1).

**3. Формула для входного сопротивления. Численные результаты.** В дальнейшем для простоты рассмотрим симметричный вибратор с  $l_0 = 0$ . В качестве пробной функции возьмем известное приближенное распределение тока в симметричном вибраторе [2,3]:

$$I(z) = \frac{I_0 \sin k(l - |z|)}{\sin kl}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в функционал (4) и воспользовавшись известным представлением [10]:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} J_0(-ia\sqrt{h^2 - k^2}) H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2}) dh, \quad (6)$$

где  $J_0(x)$ ,  $H_0^{(2)}(x)$  — собственно функции Бесселя первого рода нулевого порядка и функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, можно записать следующую приближенную формулу для входного сопротивления:

$$Z = \frac{-Z_c}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_+(\beta) K_-(\beta) J_0(-i\sqrt{\beta^2 - (ka)^2}) H_0^{(2)}(-i\sqrt{\beta^2 - (ka)^2}) d\beta, \quad (7)$$

где

$$K_{\pm}(\beta) = \int_{-kl}^{kl} \{\sin(kl - |t|) + \operatorname{sgn}(t) \cos(kl - |t|)\} e^{\pm i \frac{l}{a} \beta} dt. \quad (8)$$

Заметим, что интегралы (8) могут быть легко взяты аналитически, явный вид их не приведен из-за достаточной громоздкости. Поэтому формула (7) для входного сопротивления вибратора содержит только один интеграл по параметру  $\beta$ , который должен вычисляться численно.

На рис. 2, *a*, *b* приведены зависимости активной и реактивной составляющей входного сопротивления симметричного вибратора от параметра  $l/\lambda$  для трех значений диаметра проводников. Сплошной линией на рис. 2, *b* показана зависимость реактивной составляющей для  $a/l = 1/100$ , точками — для  $a/l = 1/60$ , штриховой линией — для

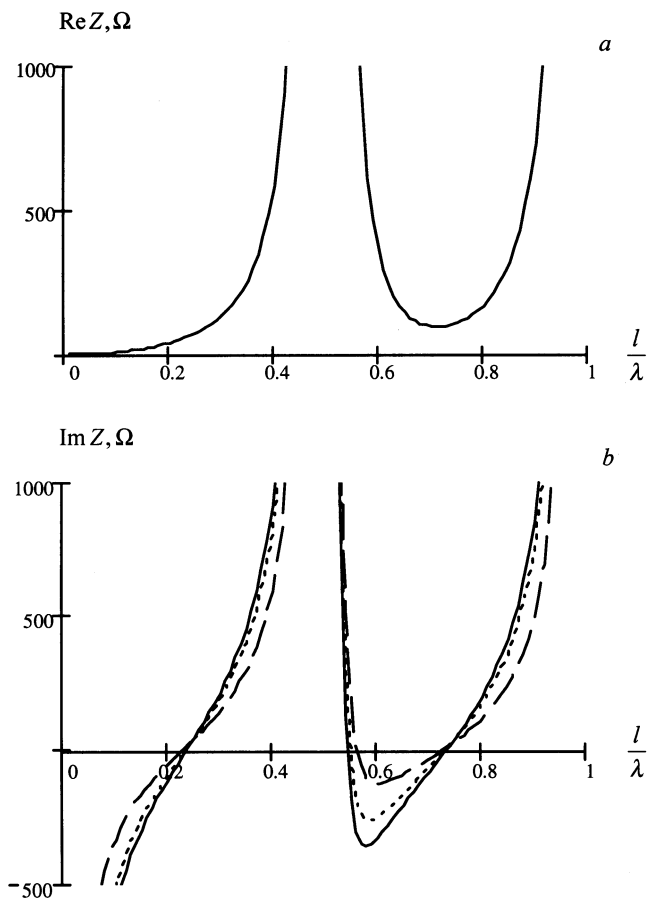


Рис. 2.

$a/l = 1/20$ . Заметим, что зависимости для активной составляющей для данных трех значений параметра  $a/l$  совпадают с графической точностью. Поэтому на рис. 2, *a* приведена только одна зависимость для  $a/l = 1/100$ . При изменении параметра  $l/\lambda$  в пределах от 0 до 1 входное сопротивление имеет три резонансных участка. Первый последовательный резонанс наблюдается в окрестности значения  $l/\lambda = 0.25$ ;

второй параллельный резонанс — при значениях  $l/\lambda$  несколько менее 0.6; третий резонанс наблюдается при  $l/\lambda \approx 0.75$ . Для значений  $l/\lambda < 0.25$  реактивная часть входного сопротивления отрицательна, т.е. она носит емкостный характер. В интервале  $0.25 < l/\lambda < 0.55$  реактивная часть входного сопротивления является положительной и носит индуктивный характер. При  $0.55 < l/\lambda < 0.75$  реактивная часть входного сопротивления опять становится отрицательной и приобретает емкостный характер. В интервале  $l/\lambda > 0.75$  реактивная часть входного сопротивления снова становится положительной, приобретая индуктивный характер.

Приведенные зависимости качественно совпадают с кривыми из [2], где они были рассчитаны методом эквивалентных схем, в соответствии с которым симметричный вибратор заменялся отрезком разомкнутой на конце двухпроводной линии с потерями.

Таким образом, введение стационарного функционала (4) позволило получить аналитическую формулу для входного сопротивления симметричного вибратора. Функционал (4) также может быть использован и для получения входного сопротивления несимметричного вибратора. Необходимо лишь подставить в него соответствующее выражение для распределения тока. Заметим, что при расчете несимметричного вибратора методом эквивалентных схем возникает проблема выбора эквивалентной цепи при его замещении.

## Список литературы

- [1] Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 488 с.
- [2] Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ: Учебник для радиотехнических специальностей вузов. М.: Высш. школа, 1988. 432 с.
- [3] Ерохин Г.А., Чернышёв О.В., Козырев Н.Д. и др. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн: Учебник для вузов / Под ред. Г.А. Ерохина. М.: Радио и связь, 1996. 352 с.
- [4] Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т. 1 / Под ред. В.А. Неганова. М.: Радио и связь, 2000. 509 с.
- [5] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [6] Неганов В.А., Матвеев И.В. // ДАН. 2000. Т. 373. № 1. С. 36–38.

- [7] *Неганов В.А., Матвеев И.В.* // Изв. вуз. Радиофизика. 2000. Т. 43. № 3. С. 335–343.
- [8] *Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П.* Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневых частот. М.: Наука, Физмат, 1996. 304 с.
- [9] *Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П.* Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневых частот. М.: Педагогика-Пресс, 1998. 328 с.
- [10] *Марков Г.П., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.–Л.: Энергия, 1967. 376 с.