

01;09

О свойствах скейлинга при воздействии одной системы с удвоениями периода на другую при наличии шума

© Ю.В. Гуляев, Ю.В. Капустина, А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: alkuz@sgu.sgu.ru

Поступило в Редакцию 2 июля 2001 г.

Выявлены и проиллюстрированы в численном эксперименте свойства скейлинга, наблюдаемые при воздействии шума в бикритической точке, расположенной на границе хаоса в системе двух однонаправленно связанных подсистем, демонстрирующих удвоения периода.

В последнее время значительное внимание привлекают задачи о синхронизации систем со сложной динамикой, многие ситуации такого рода представляют интерес с теоретической точки зрения, а также для приложений: в системах скрытой коммуникации, для управления хаосом, при исследовании различных феноменов в биологических объектах [1]. Обратимся к одной из заслуживающих внимания ситуаций, когда парциальные системы могут демонстрировать переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Предположим, что одна парциальная система действует на другую, а обратное воздействие отсутствует. В этом случае на пороге хаоса может реализоваться специфический тип сложной динамики, обнаруженный в [2] и названный бикритическим. На плоскости управляющих параметров подсистем имеется бикритическая точка, принадлежащая одновременно границе хаоса в первой и во второй подсистемах. Окрестность этой точки устроена универсальным образом и обладает рядом характерных особенностей, установленных на основании ренормгруппового анализа [3–5]. Бикритическое поведение обнаружено в численных расчетах для неавтономных нелинейных осцилляторов [6] и схем Чуа с однонаправленной связью [7], а также наблюдалось в эксперименте для системы двух неавтономных нелинейных колебательных контуров [2,8]. В реальных системах феномены сложной динамики всегда протекают в присутствии шума, поэтому необходимо

изучить влияние шума на бикритическое поведение. В настоящем сообщении мы устанавливаем свойства самоподобия (скейлинга) для систем с бикритической динамикой в присутствии шума. Данную работу можно рассматривать как обобщение на случай бикритического поведения результатов Крачфилда и др. [9], касающихся влияния шума на переход к хаосу по Фейгенбауму в системах с удвоениями периода.

Простейшей моделью, демонстрирующей бикритическое поведение, является система двух логистических отображений с однонаправленной связью [3–5,10]:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + \gamma \eta_n, \quad y_{n+1} = 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2 + \varepsilon \zeta_n. \quad (1)$$

Здесь x и y — динамические переменные двух подсистем, λ и A — их управляющие параметры, B — параметр связи, γ и ε — амплитуды шума в подсистемах, η_n и ζ_n — случайные последовательности. Согласно результатам работы Кима [5], в отсутствие шума бикритическая точка системы (1) при $B = 0.45$ имеет координаты $\lambda = 1.4011552$ и $A_C = 1.0900943$. Из ренормгруппового анализа следует, что окрестность этой точки характеризуется самоподобным устройством (скейлингом) с масштабными константами $\delta_F = 4.669201$ и $\delta_B = 2.392724$. Если учитывается шум, то степень его воздействия на фрактальную структуру в плоскости параметров и в фазовом пространстве с очевидностью должна возрастать при переходе к рассмотрению более глубоких уровней разрешения, приводя к нарушению свойства самоподобия. Как показано Крачфилдом и др. [9], в случае фейгенбаумовского каскада удвоений периода для наблюдения каждого нового уровня удвоений нужно уменьшить амплитуду шума на фактор $\mu_F = 6.619036 \dots$. Зададимся вопросом, в какое число раз μ_B следует уменьшать интенсивность шума, добавленного во вторую подсистему, чтобы пронаблюдать новый уровень фрактальной структуры, ассоциирующейся с бикритическим поведением?

Перепишем уравнения для систем с однонаправленной связью с учетом шума, добавленного только во вторую подсистему, в следующей обобщенной форме:

$$x_{n+1} = G(x_n), \quad y_{n+1} = F(x_n, y_n) + \varepsilon V(x_n, y_n) \eta_n. \quad (2)$$

(Для модели (1) $G(x) = 1 - \lambda x^2$, $U(x) = 1$, $F(x, y) = 1 - Ay^2 - Bx^2$, $V(x, y) = 1$.) Стохастическое отображение (2) описывает эволюцию

за один шаг дискретного времени. Применяя его дважды, получим отображение для двух шагов. Предполагая, что параметр шума мал ($\varepsilon < 1$), пренебрегаем членами выше первого порядка по ε . Используя замену переменных $x \rightarrow x/\alpha$, $y \rightarrow y/\beta$, получаем:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \alpha G(G(x_n/\alpha)), \\ y_{n+2} &= \beta F(G(x_n/\alpha), F(x_n/\alpha, y_n/\beta)) \\ &+ \beta \varepsilon \left[F'_y(G(x_n/\alpha), F(x_n/\alpha, y_n/\beta)) V(x_n/\alpha, y_n/\beta) \eta_n \right. \\ &\left. + V(G(x_n/\alpha), F(x_n/\alpha, y_n/\beta)) \eta_{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Считая, что элементы случайной последовательности n_n независимы ("белый шум"), мы можем переопределить воздействующий на систему случайный процесс так, чтобы переписать уравнения (3) в форме, аналогичной (2):

$$x_{n+2} = G_1(x_n), \quad y_{n+2} = F_1(x_n, y_n) + \varepsilon V_1(x_n, y_n) \eta_n. \quad (4)$$

Далее описанную процедуру можно повторять многократно, что приводит к последовательности функциональных соотношений

$$\begin{aligned} G_{k+1}(x) &= \alpha G_k(G_k(x/\alpha)), \\ F_{k+1}(x, y) &= \beta F_k(G_k(x/\alpha), F_k(x/\alpha, y/\beta)), \\ V_{k+1}(x, y) &= |\beta| \left[(F'_{k,y}(G_k(x/\alpha), F_k(x/\alpha, y/\beta)) V_k(x/\alpha, y/\beta))^2 \right. \\ &\left. + (V_k(G_k(x/\alpha), F_k(x/\alpha, y/\beta)))^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где индекс y обозначает производную функции F по второму аргументу.

В бикритической точке при выборе констант перенормировки $\alpha = -2.502907\dots$ и $\beta = -1.505318\dots$ функции $G_k(x)$ и $F_k(x, y)$ сходятся к предельным функциям $g(x)$ и $f(x, y)$, которые удовлетворяют системе уравнений [3,4]:

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha g(g(x/\alpha)), \\ f(x, y) &= \beta f(g(x/\alpha), f(x/\alpha, y/\beta)). \end{aligned} \quad (6)$$

Первое уравнение совпадает с известным уравнением Фейгенбаума–Цвитановича [11]. Результаты численного решения второго уравнения (6) приводятся в [3,4].

Что касается функции, которая фигурирует как амплитуда случайного возмущения, то при $k \rightarrow \infty$ она будет вести себя асимптотически как $V_k(x, y) \cong \sqrt{\Theta^k} \Psi(x, y)$. Здесь $\Theta = \mu_B^2$ есть наибольшее собственное число, а Ψ — соответствующая собственная функция для линейного функционального уравнения

$$\Theta \Psi(x, y) = \beta^2 \left[\left(f'_y(g(x/\alpha), f(x/\alpha, y/\beta)) \right)^2 \Psi(x/\alpha, y/\beta) + \Psi(g(x/\alpha), f(x/\alpha, y/\beta)) \right]. \quad (7)$$

Используя известные данные для функций g и f [11,4], можно реализовать функциональное преобразование в правой части (7) в виде компьютерной программы. Неизвестная функция $\Psi(x, y)$ представляется таблицей своих значений в узлах прямоугольной сетки на квадрате $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ и полиномиальной интерполяцией четвертого порядка между узлами. Задав произвольные случайные начальные условия для $\Psi(x, y)$, будем выполнять раз за разом функциональное преобразование, нормируя получаемую функцию на единицу в начале координат, $\Psi^0(x, y) = \Psi(x, y)/\Psi(0, 0)$. Эта операция повторяется до тех пор, пока величина $\Psi(0, 0)$ (перед нормализацией) сойдется к определенному пределу. В результате этих вычислений было получено значение новой константы $\mu_B = 2.713708 \dots$

Перейдем к компьютерным иллюстрациям. На рис. 1 показана карта ляпуновского показателя второй подсистемы на плоскости управляющих параметров подсистем λ и A . На карте градации серого цвета кодируют величину ляпуновского показателя: светлые области отвечают периодическим режимам, а черные — хаосу. Значения амплитуд шума $\gamma = 0$ и $\varepsilon = 0.005$. Представленные в нижнем и верхнем ряду фрагменты увеличены в $\delta_F = 4.669201$ и $\delta_B = 2.392724$ раз относительно бикритической точки $\lambda_C = 1.4011552$ и $A_C = 1.0900943$. Верхний ряд иллюстрирует скейлинг в случае, когда амплитуда шума пересчитывается в $\mu_B = 2.713708$ раз. Нижний ряд рисунков демонстрирует отсутствие подобия мелкомасштабной структуры на плоскости параметров в ситуации, когда амплитуда шума не меняется при переходе от картинке к картинке.

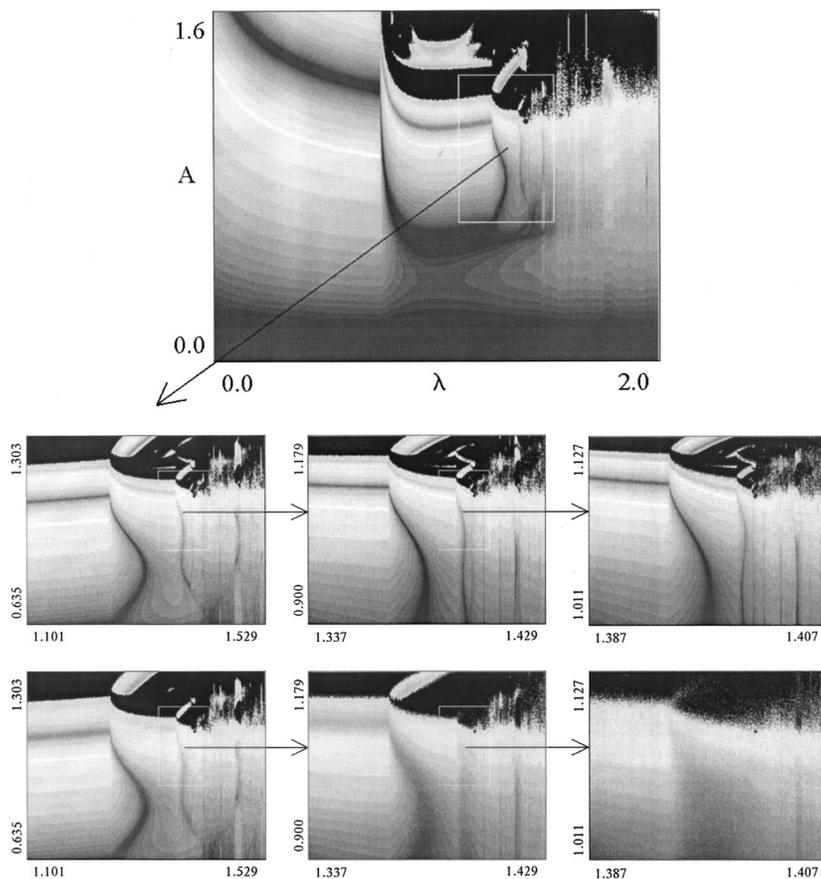


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей и ее фрагменты.

Благодаря универсальности, ассоциирующейся с ренормгрупповым подходом, свойства скейлинга по отношению к шуму оказываются в значительной степени не зависящими от закона распределения и корреляционных свойств воздействующего шума (ср. [12]). Для представленных здесь иллюстраций был использован простейший бинарный шум, однако аналогичные результаты получаются и при задании других

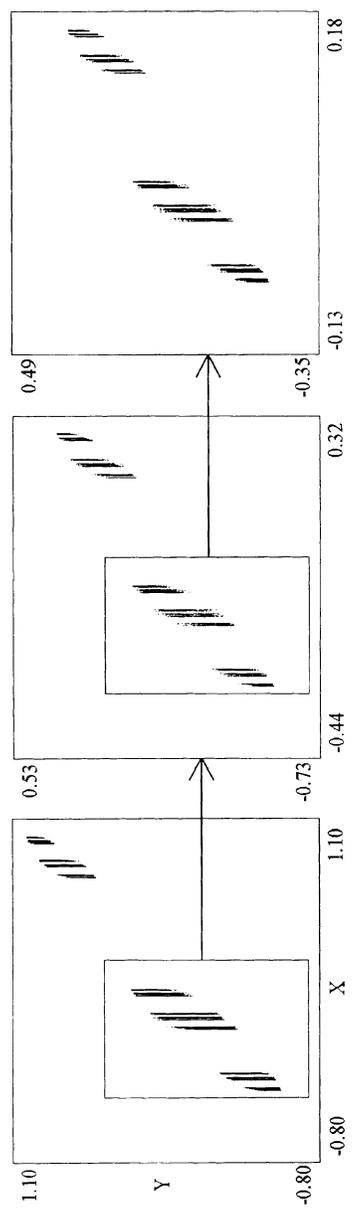


Рис. 2. Скейлинг на фазовом портрете

законов распределения (по крайней мере для шумовых воздействий ограниченной амплитуды).

Рис. 2 иллюстрирует скейлинг в фазовом пространстве. На исходном рисунке показан фазовый портрет аттрактора системы (2) при $\gamma = 0$ и $\varepsilon = 0.0015$. Для двух увеличенных фрагментов аттрактора пересчет масштаба по оси x осуществлен с константой $\alpha_F = -2.502907$, найденной Фейгенбаумом для традиционных удвоений периода [11], а по оси y — с константой $\beta = -1.505318$ [3,4]. Пересчет амплитуды шума при переходе от картинке к картинке производился с фактором $\mu_B = 2.713708$. Можно видеть, что скейлинг выполняется с достаточно хорошей точностью.

Приведенные иллюстрации соответствуют случаю отсутствия шума в первой подсистеме. Однако, как вытекает из ренормгруппового анализа и подтверждается компьютерными иллюстрациями, свойства скейлинга реализуются и в том случае, если шум действует в обеих подсистемах. При этом для наблюдения каждого следующего уровня фрактальной структуры нужно уменьшать амплитуду источника шума в первой подсистеме на фактор Кратчфилда μ_F , а во второй подсистеме — на фактор μ_B . В силу универсальности свойства скейлинга по отношению к шуму в реальных системах, демонстрирующих бикритичность, будут такими же, как и в модельной системе (1).

Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований 00–02–17509 и 01–02–06388. Авторы также благодарят за поддержку Американский фонд гражданских исследований и развития (грант REC–006).

Список литературы

- [1] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
- [2] *Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П.* и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 3. С. 619–622.
- [3] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 7. С. 788–792.
- [4] *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // Int. J. Bifurcations & Chaos. 1991. V. 1. N 4. P. 839–848.
- [5] *Kim S.Y.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. N 6. P. 6585–6592.
- [6] *Kim S.-Y., Lim W.* // Phys. Rev. E63. 2001. N 3. 036223.

- [7] *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* et al. // *Int. J. Bifurcations & Chaos.* 1996. V. 6. N 1. P. 119–148.
- [8] *Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б.* // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* 1992. Т. 35. № 1. С. 39–44.
- [9] *Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnich J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 46. P. 933–935.
- [10] *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // *Int. J. Bifurcations & Chaos.* 1993. V. 3. N 1. P. 139–152.
- [11] *Feigenbaum M.J.* // *J. Sta. Phys.* 1979. V. 21. N 6. P. 669–706.
- [12] *Fiel D.* // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1987. V. 20. P. 3209–3217.