

01

Диагностика фазовой синхронизации по одномерным временным рядам

© Н.Б. Янсон, А.Г. Баланов, В.С. Анищенко, П.В.Е. Мак-Клинтон

Ланкастерский университет, физический факультет, Ланкастер, LA1 4YB, Великобритания

Саратовский государственный университет

E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 10 мая 2001 г.

Предложен новый метод диагностики наличия или отсутствия фазовой синхронизации между несколькими взаимодействующими колебательными процессами, позволяющий ограничиться для этой цели лишь одномерным временным рядом. Метод основан на введении полярной системы координат в отображении временного возврата и исследовании динамики углов в этой системе координат. Работоспособность метода продемонстрирована на примерах реализаций, отражающих динамику двух и трех взаимодействующих процессов в присутствии шума.

Явление синхронизации широко распространено в природе и технике [1]. В настоящее время убедительно показано, что это фундаментальное явление играет принципиальную роль во многих биологических процессах [2].

Для простейшего случая двух взаимодействующих автоколебательных систем с периодическими колебаниями в отсутствие шума под синхронизацией понимается явление, когда базовые частоты колебаний, будучи изначально несоизмеримыми, в результате взаимодействия становятся рационально связанными, т.е. относятся друг к другу как n/m , где m и n — целые числа [3,4]. Тогда для мгновенных фаз колебаний $\varphi_{1,2}$ всегда будет выполняться условие "захвата фаз" $m\varphi_1 - n\varphi_2 = \text{const}$. Очевидно, что в этом идеальном случае наличие или отсутствие синхронизации может быть легко установлено путем прямого анализа спектра колебаний одной из взаимодействующих систем. Однако ситуация серьезно усложняется в присутствии шума, когда из-за флуктуаций условие "захвата фаз" будет систематически нарушаться, и становится возможной лишь так называемая "эффективная" синхронизация [5]. Из-за нарушений условия фазового захвата ("сбоев фаз") средние

частоты колебаний уже могут и не быть рационально связанными [6], что делает диагностику синхронизации по спектру неэффективной. Однако остается возможным оценивать фазовые соотношения колебаний взаимодействующих систем. Исследование фазовых соотношений для диагностики синхронности хорошо зарекомендовало себя не только в случае периодических колебаний, но и для хаотических [7] и даже стохастических систем [8,9]. Однако часто выделение сигналов с разных взаимодействующих подсистем весьма затруднено. Эта проблема становится особенно актуальной, когда речь идет о живых системах, в которых зачастую невозможно напрямую снимать сигналы со всех взаимодействующих подсистем.

В данной работе мы предлагаем метод диагностики фазовой синхронизации (или ее отсутствия), используя только один сигнал из системы связанных осцилляторов. Метод заключается в анализе отображения времен "возврата" T_i сигнала к некоторому пороговому уровню.

Рассмотрим сначала простейший случай взаимодействия двух систем. Пусть на некоторую квазигармоническую (с колебаниями, близкими к гармоническим) автоколебательную систему, колебания которой характеризуются амплитудой R и собственной частотой ω_0 , действует слабый гармонический сигнал амплитуды r и частоты Ω . Если предположить, что $r \ll R$, то результирующие колебания будут с высокой точностью описываться следующей формулой:

$$x(t) = R \sin(\omega t) + r \sin(\Omega t). \quad (1)$$

При этом частота ω будет совпадать с ω_0 в отсутствие синхронизации и может слегка сдвинуться относительно ω_0 в ту или иную сторону в случае, если синхронизация имеет место. Определим время возврата T_i как временной интервал между двумя последовательными пересечениями в одном направлении сигналом $x(t)$ порогового значения $x = 0$. Чтобы найти их, необходимо найти все моменты t_i пересечения сигналом нулевого уровня. Очевидно, что в общем случае трансцендентное уравнение $x(t) = 0$ может не иметь аналитического решения. Однако, если учесть, что амплитуда первого члена значительно превышает амплитуду второго, то можно предположить, что истинные моменты пересечения t_i будут близки к моментам времени $t_k^* = \pi k / \omega$, в которых $\sin(\omega t)$ принимает нулевые значения. Тогда мы можем разложить правую часть (1) в ряд Тейлора относительно значений t_k^* и пренебречь нелинейными членами. Чтобы найти моменты пересечения сигналом уровня $x = 0$ только в

одном направлении, будем искать каждый второй нуль получившегося разложения:

$$t_i \approx -\frac{r}{R\omega} \sin \frac{2\pi i \Omega}{\omega} + \frac{2\pi i}{\omega}. \quad (2)$$

Используя это разложение, немедленно находим времена возврата T_i :

$$T_i = t_{i+1} - t_i = 2\frac{r}{R\omega} \cos(\Psi_i + \pi\xi) \sin \pi\xi + \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3)$$

где $\xi = \Omega/\omega$, а $\Psi_i = 2\pi i \Omega/\omega$. Отметим, что ξ имеет смысл числа вращения и отражает число колебаний системы, приходящихся на одно колебание воздействия, а Ψ_i представляет мгновенную фазу сигнала воздействия в момент времени $2\pi i/\omega$, т.е. в некотором стробоскопическом сечении. Введем полярную систему координат в отображение $T_{i+1}(T_i)$, для чего поместим центр в точку $(2\pi/\omega; 2\pi/\omega)$. Тогда углы ϕ_i будут связаны с временами возврата следующей формулой:

$$\phi_i = \operatorname{arctg} \left(\frac{T_{i+1} - \frac{2\pi}{\omega}}{T_i - \frac{2\pi}{\omega}} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим динамику углов ϕ_i . Используя (3), находим

$$\operatorname{tg} \phi_i = \cos 2\pi\xi - \operatorname{tg}(\Psi_i + \pi\xi) \sin 2\pi\xi. \quad (5)$$

Выражение (5) показывает, что угол поворота во введенной полярной системе координат напрямую связан с фазой внешнего воздействия в фиксированные моменты времени $2\pi i/\omega$, когда фаза собственных колебаний изменяется на 2π . Последнее есть определение так называемой относительной фазы, в последнее время широко используемой для диагностики синхронизации по двум измеряемым сигналам [10].

Аналогичным образом найдя выражение для $\operatorname{ctg} \phi_{i-1}$ и сложив его с формулой (5), получаем отображение для мгновенных углов отображения времен возврата:

$$\phi_i = \operatorname{arctg}(2 \cos 2\pi\xi - \operatorname{ctg} \phi_{i-1}). \quad (6)$$

Полученное отображение принадлежит к классу отображений на окружности топологической степени 1, которые традиционно применяются для описания динамики разности фаз взаимодействующих

осцилляторов. Основной характеристикой таких отображений является число вращения ν , характеризующее соотношение основных временных масштабов колебаний осцилляторов. Вычислим его для полученного отображения:

$$\nu_\phi = \frac{1}{2\pi} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\phi_0 - \phi_i}{i} = \xi,$$

т.е. для отображения (6) число вращения точно равно отношению частот взаимодействующих осцилляторов или числу вращения изучаемой системы под воздействием.

Рассмотрим теперь случай, когда на квазигармоническую автоколебательную систему действует n гармонических сигналов, каждый из которых характеризуется частотами Ω_i и амплитудами A_i , где $i = 1, 2, \dots, n$. Потребуем, чтобы, как и прежде, амплитуды сигналов воздействия были значительно меньше амплитуды колебаний автоколебательной системы: $A_i \ll R$, $i = 1, 2, \dots, n$. В этом случае колебания системы $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = R \sin \omega t + \sum_{j=1}^n A_j \sin \Omega_j t, \quad A_j \ll R. \quad (7)$$

Обозначим $\Omega_j/\omega = \xi_j$ и $\beta_j = (A_j/A_1) (\sin \pi \xi_j / \sin \pi \xi_1)$, при этом будем считать, что $\beta_1 = 1$. Тогда, проделав те же выкладки, что и при выводе (6), получим отображение углов времен возврата для произвольного числа взаимодействующих процессов:

$$\phi_i = \arctg \left(2 \cos 2\pi \xi_1 - \text{ctg } \phi_{i-1} + 2 \frac{\sum_{j=2}^n \beta_j \cos(2\pi i \xi_j + \pi \xi_j) (\cos 2\pi \xi_j - \cos 2\pi \xi_1)}{\sum_{j=1}^n \beta_j \cos(2\pi i \xi_j + \pi \xi_j)} \right). \quad (8)$$

Полученное выражение (8) описывает динамику углов отображения времен возврата квазипериодических колебаний, характеризующихся n независимыми частотами. Таким колебаниям в фазовом пространстве исходной системы соответствуют n -мерный тор-аттрактор.

В данной работе мы рассмотрим случай $n = 1$ и $n = 2$ на примере колебаний генератора Ван дер Поля под периодическим и квазипериодическим воздействиями в присутствии шума.

Чтобы проверить, как будет работать наш метод в случае нестационарных колебаний, рассмотрим динамику неавтономного генератора Ван дер Поля, собственная частота которого находится под воздействием медленных флуктуаций:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; & \dot{y} &= \epsilon(1 - x^2)y - \omega^2 x + C \sin \Omega t; \\ \omega &= \omega_0 + \frac{D_\eta}{\tau} \eta(t); & \dot{\eta} &= -\frac{\eta}{\tau} + \mu(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$, $C = 1$, $\Omega = 0.333$. $\mu(t)$ — гауссов белый шум ($\langle \mu(t) \rangle = 0$, $\langle \mu(t)^2 \rangle = 1$), $\eta(t)$ — ”цветной” шум с интенсивностью D_η и временем корреляции $\tau = 200$.

В отсутствие медленных флуктуаций $D_\eta = 0$ в неавтономной системе будет наблюдаться синхронизация 1:3, когда на три периода собственных колебаний генератора будет приходиться один период колебаний воздействующего сигнала. При этом будет выполняться условие ”захвата фаз” $\Phi_0(t) - 3\Phi_f(t) = \text{const}$, где $\Phi_0(t)$ — мгновенная фаза колебаний осциллятора, а $\Phi_f(t)$ — фаза воздействия.

С увеличением интенсивности D_η режим синхронизации сменится режимом так называемой ”эффективности синхронизации”, когда условие захвата фаз будет выполняться на конечных, но достаточно длительных временах (обычно больше $10^2 - 10^3$ характерных периодов колебаний). Дальнейшее увеличение интенсивности флуктуаций разрушает синхронизацию.

Рис. 1, *a* иллюстрирует спектры колебаний, соответствующие вышеупомянутым режимам: темным выделен спектр, соответствующий значению $D_\eta = 0.1$, белым — для $D_\eta = 0.7$. Очевидно, что эти спектры очень похожи, более того, отношения частот пиков, соответствующих собственным колебаниям и воздействию, очень близки, будучи равными 2.96 в случае эффективной синхронизации и 3.05 в ее отсутствие. Таким образом, спектр не позволяет диагностировать синхронизацию в данной системе. Однако информацию о наличии или отсутствии фазовой синхронизации можно получить из анализа поведения во времени разности фаз воздействия и автоколебаний. На рис. 1, *b* изображено изменение разности фаз колебаний $\Phi_0(t) - 3\Phi_f(t)$

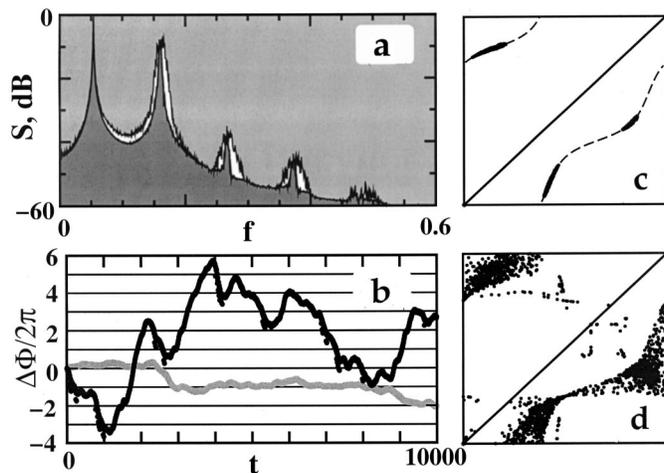


Рис. 1. *a* — спектры мощности, рассчитанные по временным рядам системы (9) для двух значений интенсивности шума; *b* — разность фаз между воздействием и откликом системы (9) для двух значений интенсивности шума; *c*, *d* — отображение углов отображения времен возврата для двух значений интенсивности шума.

во времени при $D_\eta = 0.1$ (серый цвет) и $D_\eta = 0.7$ (черный цвет). Можно видеть, что "плато" захвата фаз в первом случае превышает 10^3 характерных периодов собственных колебаний генератора Ван дер Поля, т.е. режим эффективной синхронизации имеет место. Во втором же случае участки захвата фаз практически отсутствуют. Применим теперь описанную выше методику, для чего, зафиксировав плоскость сечения $x = 0$, извлечем сначала времена возврата фазовой траектории в заданную плоскость для каждого из значений интенсивности флуктуаций. Вводя полярную систему координат в отображение времен возврата и получив последовательность его углов времен возврата, построим их отображение. На рис. 1, *c* приведено отображение углов времен возврата для $D_\eta = 0.1$, на рис. 1, *d* — для $D_\eta = 0.7$. В первом случае (рис. 1, *c*) на графике легко можно выделить три группы точек, лежащих на одной одномерной кривой, что свидетельствует о фазовой синхронизации 1:3. В то же время отображение на рис. 1, *d* выглядит хаотично и не имеет никакой выраженной структуры, что можно характеризовать как

отсутствие фазовой синхронизации. Все вышесказанное свидетельствует о том, что предлагаемый метод может быть эффективен даже в случае нестационарных колебаний.

Чтобы проиллюстрировать, как можно использовать этот метод для выявления фазовой динамики трех независимых процессов, рассмотрим пример, когда на автоколебательную систему в присутствии шума действуют два гармонических сигнала:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= \epsilon(1 - x^2)y - \omega_0^2 x + C_1 \sin \Omega_1 t + C_2 \sin \Omega_2 t + \sqrt{D}\mu(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Данные уравнения описывают неавтономный генератор Ван дер Поля, находящийся под квазипериодическим воздействием с характерными частотами $\Omega_1 = 0.5$ и $\Omega_2 = 0.1$ и амплитудами $C_1 = 0.1$ и $C_2 = 0.1$, при этом $D = 0.0001$ определяет интенсивность аддитивного белого шума. Параметры были подобраны так, чтобы в системе наблюдалась синхронизация 1:2 между одним из воздействий и автоколебательной системой, а также синхронизация 1:5 между самими воздействиями.

На рис. 2, *a* изображен фрагмент последовательности времен возврата в плоскость $x = 0$ фазовой траектории системы (10), соответствующее отображение углов времен возврата представлено на рис. 2, *b*. Можно видеть, что на рис. 2, *b* все точки сосредоточены в двух "облаках", что свидетельствует о синхронизации 1:2 между собственными колебаниями генератора и внешним воздействием с большей частотой. Последнее также подтверждается тем, что упомянутые облака точек лежат точно на кривой, являющейся функцией последования отображения (6), для значения $\xi = 1/2$. Таким образом, несмотря на то, что в данном примере имеет место взаимодействие уже трех колебательных процессов, наш метод позволяет выявить синхронность между двумя процессами с наибольшими характерными частотами. Однако по отображению на рис. 2, *b* нельзя ничего сказать о синхронности двух описанных процессов с третьим, являющимся воздействием с самой низкой частотой. Чтобы определить синхронность или ее отсутствие между ним и первым воздействием, была проделана следующая процедура. Из последовательности времен возврата (рис. 2, *a*) были извлечены локальные максимумы (на рисунке соединены кривой), для которых, как прежде для времен возврата, были введены углы. Эта процедура, в сущности, исключает из рассмотрения один процесс,

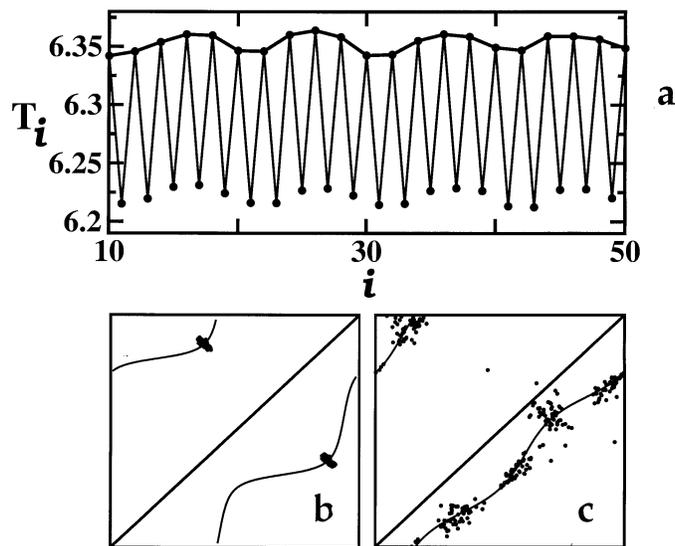


Рис. 2. *a* — зависимость времени возврата от номера возврата для системы (10); *b* — отображение углов отображения времен возврата системы (10); *c* — отображение углов отображения максимумов времен возврата системы (10).

имеющий самую высокую частоту, в данном случае это собственные колебания осциллятора Ван дер Поля. Отображение полученных углов приведено на рис. 2, *c*. Очевидно, что точки этого отображения также лежат на одномерной кривой, которая может быть с хорошей точностью описана аналитической формулой (6). Количество облаков точек свидетельствует о синхронизации 1:5 между воздействиями. Таким образом, в данном случае метод позволяет оценить синхронность каждой из последовательных пар взаимодействующих процессов. Что касается синхронности большего числа взаимодействующих процессов, авторы предполагают, что в ряде случаев для этой цели было бы полезным повторение процедуры извлечения локальных максимумов, однако в рамках данной работы детальное изучение этого вопроса проведено не было.

В данной работе был предложен метод, позволяющий оценить синхронность нескольких взаимодействующих процессов, используя

только одномерный временной ряд. Построена теория данного метода на случай слабого взаимодействия, показана работоспособность метода на нестационарных и зашумленных данных, полученных с помощью численного моделирования. Авторы считают, что этот метод может быть полезен в целом ряде практических приложений, когда невозможно извлечь сигналы сразу со всех взаимодействующих автоколебательных систем.

Работа была поддержана U.S. Civilian Research Development Foundation (грант N REC 006), а также грантами Engineering and Physical Sciences Research Council (UK) и Medical Research Council (UK).

Список литературы

- [1] *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
- [2] *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
- [3] *Van der Pol B.* // *Radio Rev.* 1920. V. 1. P. 701–710.
- [4] *Андронов А.А., Витт А.А.* К теории захватывания Ван дер Поля. // Собрание тр. А.А. Андропова. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
- [5] *Малахов А.Н.* Флуктуация в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
- [6] *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
- [7] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. P. 1804–1807.
- [8] *Neiman A., Silchenko A., Anishchenko V.S., Schimansky-Geier L.* // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58. P. 7118–7125.
- [9] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. 368 с.
- [10] *Schäfer C., Rosenblum M.G., Kurths J., Abel H.-H.* // *Nature.* 1998. V. 392. P. 239–240.