

Об устойчивости критического состояния в жестких сверхпроводниках с неоднородным профилем температуры

© Н.А. Тайланов, У.Т. Яхшиев

Научно-исследовательский институт прикладной физики Национального университета Узбекистана, 700174 Ташкент, Узбекистан

(Поступила в Редакцию 27 марта 2001 г.)

Рассмотрен вопрос о тепловом и магнитном разрушении критического состояния в жестких сверхпроводниках. Предполагается, что начальное распределение температуры и электрического поля является существенно неоднородным. В квазистационарном приближении определена граница возникновения термомагнитной неустойчивости в сверхпроводнике. Показано, что в отличие от аналогичного критерия для однородного температурного профиля полученный интегральный критерий учитывает влияние каждого участка сверхпроводника на порог возникновения неустойчивости критического состояния.

При исследовании устойчивости критического состояния в жестких сверхпроводниках вопрос о характере распределения температуры $T(x, t)$ и электрического поля $\mathbf{E}(x, t)$ представляет значительный практический интерес [1]. Это в основном обусловлено тем, что тепловое и магнитное разрушения критического состояния за счет джоулевого саморазогрева определяются начальными распределениями температуры или электрического поля. Следовательно, вид температурного профиля может оказать заметное влияние на критерии устойчивости критического состояния по отношению к скачкам магнитного потока в сверхпроводнике. Ранее при изучении данной задачи всегда предполагалось (см., например, [2]), что профили распределения температуры и поля либо однородны, либо слабо зависят от координат. Однако в реальной ситуации физические параметры сверхпроводников могут быть неоднородными как вдоль образца, так и в плоскости поперечного сечения. Такие неоднородности могут возникать по различным физическим причинам. Во-первых, пиннинг вихревой структуры неоднороден из-за существования в сверхпроводнике слабых связей. Во-вторых, неоднородность свойств параметров может быть обусловлена их зависимостью от напряженности магнитного поля \mathbf{H} . Тем не менее от \mathbf{H} зависят многие физические параметры: плотность критического тока \mathbf{j}_c , дифференциальная проводимость σ_d , теплопроводность κ и т.д.

В данной работе рассмотрен вопрос о характере распределения температуры в критическом состоянии сверхпроводника в квазистационарном приближении. Показано, что профиль температуры в образце может быть существенно неоднородным, что в свою очередь должно сказаться на условиях возникновения скачка магнитного потока.

Эволюция тепловых T и электромагнитных \mathbf{E} , \mathbf{H} возмущений в сверхпроводнике описывается нелинейным уравнением теплопроводности [3,4]

$$v(T) \frac{dT}{dt} = \nabla[\kappa(T)\nabla T] + \mathbf{jE}, \quad (1)$$

системой уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{H}}{dt}, \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (3)$$

и уравнением критического состояния

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c(T, \mathbf{H}) + \mathbf{j}_r(\mathbf{E}), \quad (4)$$

где v — теплоемкость, \mathbf{j}_c — критическая плотность тока, \mathbf{j}_r — плотность резистивного тока.

Для описания зависимости $\mathbf{j}_c(T, \mathbf{H})$ воспользуемся моделью критического состояния Бина–Лондона $j = j_0 - a(T - T_0)$ [5], где параметр a характеризует термически активируемое ослабление пиннинга абрикосовских вихрей на дефектах кристаллической решетки [3], j_0 — равновесная плотность тока, T_0 — начальная температура сверхпроводника.

Зависимость $j_r(E)$ в области достаточно сильных электрических полей $E \geq E_f$ может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией $j_r \approx \sigma_f E$; σ_f — эффективная проводимость в режиме вязкого течения потока, E_f — граница линейного участка на ВАХ образца. В области слабых полей $E \leq E_f$ функция $j_r(T)$ нелинейна. Такая нелинейность обусловлена термоактивным крипом потока [6].

Рассмотрим сверхпроводящий образец, помещенный во внешнее магнитное поле $\mathbf{H} = (0, 0, H_e)$, растущее с постоянной скоростью $d\mathbf{H}/dt = \dot{\mathbf{H}} = \text{const}$. Согласно уравнению Максвелла (2), в образце имеется вихревое электрическое поле $\mathbf{E} = (0, E_e, 0)$. Здесь H_e — амплитуда внешнего магнитного поля, E_e — амплитуда фонового электрического поля. Из концепции критического состояния непосредственно следует параллельность плотности тока и электрического поля $\mathbf{j} \parallel \mathbf{E}$.

Соответствующие тепловые и электродинамические граничные условия к (1)–(4) имеют вид

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 + w_0(T(0) - T_0) = 0, \quad T(L) = T_0, \\ \left(\frac{dE}{dx}\right)_0 = 0, \quad E(L) = 0. \quad (5)$$

Для плоской геометрии задачи (рис. 1) распределение магнитного поля при учете граничных условий

$H(0) = H_e$, $H(L) = 0$ имеет вид $H(x) = H_e(L - x)$, где $L = cH_e/4\pi j_c$ — глубина проникновения магнитного потока в образец, w_0 — коэффициент теплоотдачи в охладитель при равновесной температуре T_0 .

Подробное обсуждение условий применимости системы уравнений (1)–(4) для описания динамики развития термомагнитных возмущений достаточно хорошо изложено в литературе [1].

В квазистационарном приближении в уравнениях (1)–(4) можно пренебречь членами, содержащими производные по времени. Это означает, что теплоотвод с поверхности образца компенсирует диссипацию энергии, возникающую при вязком течении магнитного потока с эффективной проводимостью σ_f . В этом приближении решение уравнения (2) имеет вид

$$E = \frac{\dot{H}}{c}(L - x). \quad (6)$$

Подставляя последнее решение в (1), получим следующее неоднородное уравнение для распределения температуры $T(x, t)$:

$$\frac{d^2\Theta}{d\rho^2} - \rho\Theta = f(\rho). \quad (7)$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$f(\rho) = -[1 + r\omega\rho] \frac{j_0}{aT_0}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \rho = \frac{L - x}{r}$$

и безразмерные параметры $\omega = \sigma_f \dot{H} / c j_0$, $r = (c\kappa / aHL^2)^{1/3}$, где r — характеризует пространственный масштаб неоднородности температурного профиля в образце.

Решением уравнения (7) служат функции Эйри, выражающиеся через функции Бесселя порядка 1/3 [7],

$$\Theta(\rho) = C_1 \rho^{1/2} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} \right) + C_2 \rho^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} \right) + \Theta_0(\rho),$$

$$\begin{aligned} \Theta_0(\rho) &= \rho^{1/2} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} \right) \\ &\times \int_0^\rho [1 + r\omega\rho_1] \rho_1^{3/2} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho_1^{3/2} \right) d\rho_1 - \rho^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} \right) \\ &\times \int_0^\rho [1 + r\omega\rho_1] \rho_1^{3/2} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho_1^{3/2} \right) d\rho_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются с помощью граничных условий и равны

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = \frac{-w_0 L \Theta(0) + \kappa \left. \frac{d\Theta}{d\rho} \right|_{\rho=L/r}}{\left[w_0 \left(\frac{L}{r} \right)^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho^{-3/2} \right) - 2 \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} \right) \right) \right] \Big|_{\rho=L/r}}.$$

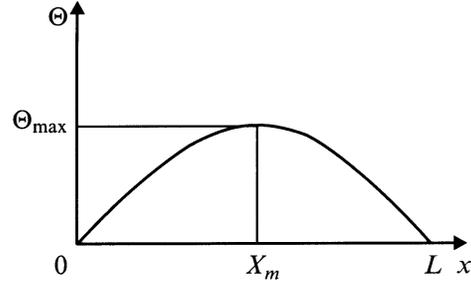


Рис. 1. Распределение температуры для изотермической ситуации.

Согласно уравнению Максвелла (2), параметр неоднородности температурного профиля можно представить в виде

$$\alpha = \frac{r}{L} = \left[\frac{4\pi v j_0}{aH_e^2} \frac{H_e}{\dot{H} t_\kappa} \right]^{1/3}. \quad (9)$$

Очевидно, $\alpha \sim 1$ вблизи порога скачка потока, когда $aH_e^2/4\pi v j_0 \sim 1$ даже в условиях квазистационарного разогрева $\dot{H} t_\kappa / H_e \ll 1$; $t_\kappa = vL^2/\kappa$ — характерное время тепловой задачи.

Оценим величины максимального разогрева Θ_m для изотермической ситуации $w_0 = \kappa/L \geq 1$. Представим решение (7) в виде

$$\Theta(x) = \Theta_m - \rho_0 \frac{(x - x_m)^2}{2} \quad (10)$$

вблизи точки максимума температуры $x = x_m$ (рис. 1).

Аппроксимируя решение (10) вблизи точки $x_m = L/2$ с помощью тепловых граничных условий, нетрудно определить постоянный коэффициент $\rho_0 = (8/L^2)\Theta_m$ и получить выражение для температуры

$$\Theta(x) = \Theta_m \left[1 - \frac{4}{L^2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Подставляя последнее решение в уравнение (7), можно оценить максимальный разогрев сверхпроводника при скачке магнитного потока

$$\Theta_m = \frac{\left[j_0 + \frac{\sigma_f \dot{H}}{c} (L - x_m) \right] \frac{\dot{H}}{c\kappa T_0} (L - x_m)}{\frac{\gamma}{L^2} - \frac{a\dot{H}}{c\kappa} (L - x_m)}. \quad (12)$$

В типичной ситуации, когда $\gamma/L^2 \ll (a\dot{H}/c\kappa)(L - x_m)$, для Θ_m имеем

$$\Theta_m \approx \left[j_0 + \frac{\sigma_f \dot{H}}{c} (L - x_m) \right] \frac{\dot{H} L^2}{c\kappa T_0} (L - x_m). \quad (13)$$

Здесь постоянный параметр $\gamma \sim 1$ (например, для параболического профиля температуры $\gamma \sim 8$). Легко убедиться, что для типичных значений параметров $j_0 = 10^6$ A/cm², $\dot{H} = 10^4$ G/s, $L = 0.1$ см разогрев достаточно слаб: $\Theta_m \ll 1$. В ситуации слабого охлаждения

$w_0 = 1 - 10 \text{ erg}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K})$ образца величина Θ_m имеет порядок

$$\Theta_m \approx \frac{\dot{H} j_0 L^2}{c w_0 T_0} \approx 0.5,$$

т.е. разогрев может достигать величины $\delta T_m = T_0 \Theta_m \sim 2 \text{ K}$. Видно, что в случае слабого охлаждения образца разогрев может оказаться весьма значительным, что должно влиять на условия возникновения термомангнитной неустойчивости критического состояния в сверхпроводнике.

С этой целью исследуем устойчивость критического состояния по отношению к малым тепловым δT и электромагнитным флуктуациям δE в квазистационарном приближении. Представим решение системы (1)–(4) в виде

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T(x) + \exp\left(\frac{\lambda t}{t_\varkappa}\right) \delta T\left(\frac{x}{L}\right), \\ E(x, t) &= E(x) + \exp\left(\frac{\lambda t}{t_\varkappa}\right) \delta E\left(\frac{x}{L}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $T(x)$ и $E(x)$ — решения исходной системы, полученные в квазистационарном приближении, описывающие распределения фоновой температуры и фонового электрического поля в образце; λ — подлежащее определению собственное число задачи. Граница неустойчивости определяется областью параметров, для которых $\text{Re } \lambda \geq 0$. Из решения (14) видно, что характерное время развития тепловых и электромагнитных возмущений t_j — порядка t_\varkappa/λ . Линеаризуя систему (1)–(4) по малым ($\delta T/T(x)$, $\delta E/E(x) \ll 1$) возмущениям, получаем в квазистационарном приближении следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} v \frac{\lambda}{t_\varkappa} \delta T &= \frac{\varkappa}{L^2} \frac{d^2 \delta T}{dx^2} + [j(x) + \sigma_f E(x)] \delta E - a E(x) \delta T, \\ \frac{1}{L^2} \frac{d^2 \delta E}{dx^2} &= \frac{4\pi\lambda}{c^2 t_\varkappa} [\sigma_f \delta E - a \delta T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Исключив из последнего уравнения системы (15) переменную δT и подставляя в первое, получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами для определения распределения электрического поля δE в виде

$$\frac{d^4 \delta E}{dz^4} - \left[\lambda(1 + \tau) + \frac{E(z)}{E_\varkappa} \right] \frac{d^2 \delta E}{dz^2} + [\lambda\tau - B(z)] \delta E = 0. \quad (16)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$z = x/L, \quad B(z) = (4\pi a L^2 / c^2 v) j(z),$$

$$j(z) = \sigma_f E(z) - a [T(z) - T_0], \quad E(z) = (\dot{H} L / c) (1 - z),$$

$$\tau = 4\pi \sigma_f \varkappa / c^2 v, \quad E_\varkappa = \varkappa / a L^2,$$

$$v = v_0 (T/T_0)^3, \quad \varkappa = \varkappa_0 (T/T_0).$$

Следует иметь в виду, что переменные $T(z)$ и $E(z)$ берутся из решения (8) с заменой $\rho = (L/r)(1 - z)$. Поставим соответствующие граничные условия к уравнению (16), воспользовавшись связью между δT и δE из системы (15),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta E}{dz^2} \Big|_{z=1} &= 0, \quad \frac{d^3 \delta E}{dz^3} \Big|_{z=0} = -W \left[\frac{d^2 \delta E}{dz^2} - \lambda\tau \delta E \right] \Big|_{z=0}, \\ \delta E|_{z=1} &= 0, \quad \frac{d\delta E}{dz} \Big|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$W = w_0 L / \varkappa$ — безразмерный тепловой импеданс.

Условие существования нетривиального решения уравнения (16) совместно с граничными условиями (17) позволяет определить границу возникновения термомангнитной неустойчивости критического состояния в сверхпроводящем образце. Сложный вид последнего не позволяет отыскать аналитическое решение в замкнутом виде. Ограничимся здесь рассмотрением процесса развития термомангнитной неустойчивости в адиабатическом приближении, выполняющемся в жестких сверхпроводниках с малой теплопроводностью. Адиабатический характер развития неустойчивости приводит к преимущественному распространению диффузии магнитного потока D_m по сравнению с диффузией тепла D_t в образце, или $\tau = D_t / D_m \ll 1$ [1]. В этом случае, как видно из решения (14), характерное время развития возмущений t_j температуры и электромагнитного поля должно удовлетворять неравенствам $t_j \ll t_\varkappa$ ($\lambda \gg 1$) и $t_j \gg t_m$ ($\lambda\tau \ll 1$), где $t_\varkappa = L^2 / D_t$ и $t_m = L^2 / D_m$ — времена тепловой и магнитной диффузии; $D_t = \varkappa / v$ и $D_m = c^2 / 4\pi \sigma_f$ — коэффициенты тепловой и магнитной диффузии соответственно.

В этом приближении ($\tau \ll 1$, $\lambda\tau \ll 1$, $\lambda \gg 1$) оказывается возможным понизить порядок уравнения (16) на два

$$\frac{d^2 \delta E}{dz^2} + \left[\left(\lambda - \frac{E(z)}{E_\varkappa} \right) \tau - \left(1 - \tau - \frac{E(z)}{\lambda E_\varkappa} \right) B(z) \right] \delta E = 0. \quad (18)$$

Заметим, что при переходе к предельному уравнению (18) мы оставили только члены порядка $\tau^{1/2}$, так как $\lambda\tau \sim \tau^{1/2}$.

В приближении $\tau \ll 1$ порог возникновения неустойчивости слабо зависит от тепловых условий на поверхности образца. При этом тепловыми условиями на границах токнесущего слоя ($z = 0$, $z = 1$) можно пренебречь, и в качестве граничных условий к (18) необходимо оставить электродинамические

$$\delta E|_{z=1} = 0, \quad \frac{d\delta E}{dz} \Big|_{z=0} = 0,$$

так как условие ”адиабатичности” развития неустойчивости в жестком сверхпроводнике обуславливает слабую зависимость границы ее возникновения от условий теплоотвода на поверхности образца [1].

Умножив уравнение (18) на δE и проинтегрировав по переменной z в интервале $0 < z < 1$, получим выражение

$$(1 - \tau) \int_0^1 B(z) \delta E^2 dz + \tau \int_0^1 E_{\mathcal{X}}^{-1} E(z) \delta E^2 dz + \int_0^1 \left(\frac{d\delta E}{dz} \right)^2 dz = \lambda \tau \int_0^1 \delta E^2 dz + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 E_{\mathcal{X}}^{-1} B(z) E(z) \delta E^2 dz, \quad (19)$$

которое приведено с учетом равенства

$$\int_0^1 \frac{d^2 \delta E}{dz^2} \delta E dz = \delta E(z) \left(\frac{d\delta E}{dz} \right) - \int_0^1 \left(\frac{\delta E}{dz} \right)^2 dz = - \int_0^1 \left(\frac{\delta E}{dz} \right)^2 dz$$

и граничных условий. Правая часть равенства (19) имеет минимум при $\lambda = \lambda_c$

$$\lambda_c = \tau^{-1/2} \left[\frac{\int_0^1 E_{\mathcal{X}}^{-1} B(z) E(z) \delta E^2 dz}{\int_0^1 \delta E^2 dz} \right]^{1/2}.$$

Тогда соотношение (19) можно переписать в виде

$$(1 - \tau) \int_0^1 B(z) n_E^2 dz + \tau \int_0^1 E_{\mathcal{X}}^{-1} E(z) n_E^2 dz + \frac{\int_0^1 \left(\frac{d\delta E}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^1 \delta E^2 dz} = 2 \left[\int_0^1 E_{\mathcal{X}}^{-1} B(z) E(z) n_E^2 dz \right]^{1/2}, \quad (20)$$

введя нормированный на единицу вектор

$$n_E^2 = \frac{\delta E^2}{\int_0^1 \delta E^2 dz}, \quad \int_0^1 n_E^2 dz = 1.$$

Поскольку конкретный вид функции $\delta E(z)$ нам неизвестен, попытаемся, следуя идее работы [8], получить интегральную оценку инкремента нарастания неустойчивости и нижнюю границу ее возникновения. В выражении (20) поведение подынтегральной функции в основном определяется множителем $E = (\dot{H}L/c)(1 - z)$, равным нулю при $z = 1$ (остальные сомножители меняются более плавно). Поэтому максимум функции достигается при $z = 0$. Отсюда получаем верхнюю оценку для λ_c

$$\lambda_c \leq \frac{B(0)E(0)}{E_{\mathcal{X}}} \times 1. \quad (21)$$

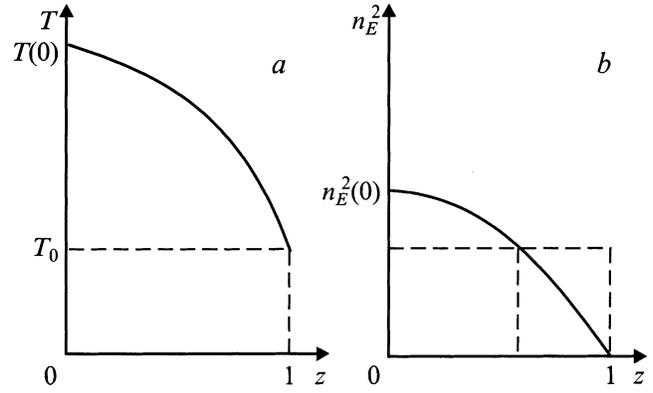


Рис. 2. Графики функции $T(z)$ (a) и $n_E^2(z)$ (b).

Очевидно, $\lambda_c \gg 1$, $\lambda_c \tau \ll 1$ при $\tau \ll 1$. Численная оценка дает значение $\lambda_c \approx 10-10^2$ для $\tau = 10^{-3}$. Следует заметить, что при определении границы неустойчивости критического состояния в соотношении (20) можно опустить члены порядка $\tau^{1/2} \ll 1$, так как в жестких сверхпроводниках влияние нормальных токов несущественно, т.е. $\sigma_f E(z) \ll j_c(T(z))$.

Исходя из (20) и (21), можно записать критерий возникновения неустойчивости в следующем виде:

$$\int_0^1 B(z) n_E^2 dz \geq \frac{\int_0^1 \left(\frac{d\delta E}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^1 \delta E^2 dz}. \quad (22)$$

Выполнение последнего существенно связано с видом граничных условий и характером зависимости функций $j(z)$, $E(z)$, $T(z)$ и $n_E^2(z)$. На рис. 2, a, b приведены графики функций $T(z)$ и $n_E^2(z)$. Неравенство (22) можно усилить справа, воспользовавшись соотношением

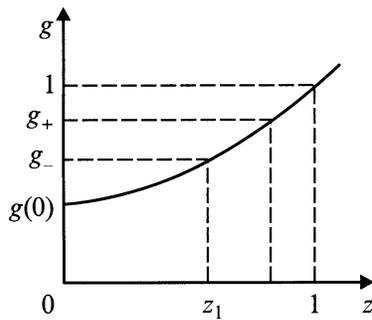
$$\int_0^1 \left(\frac{d\delta E}{dz} \right)^2 dz \geq \frac{\pi^2}{4} \tau \int_0^1 \delta E^2 dz, \quad (23)$$

которое легко доказать с помощью разложения функции $\delta E(z)$ в ряд Фурье

$$\delta E(z) = A_m \cos \frac{\pi z(2m+1)}{2}.$$

Попытаемся усилить неравенство (22) слева. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 g(z) (n_E^2 - 1) dz = \int_0^{z_1} g(z) (n_E^2 - 1) dz + \int_{z_1}^0 g(z) (n_E^2 - 1) dz.$$

Рис. 3. График функции $g(z)$.

Последнее выражение представим в виде,

$$\int_0^1 g(z) (n_E^2 - 1) dz = (g_+ - g_-) \int_0^1 g(z) (n_E^2 - 1) dz,$$

вынося за знак интеграла промежуточные значения функции g_- в области $z < z_1$ и $g > g_-$ в области $z_1 < z < 1$. Очевидно (рис. 3)

$$\int_0^1 g(z) (n_E^2 - 1) dz \leq 0$$

или

$$\int_0^1 g(z) n_E^2 dz \leq \int_0^1 g(z) dz. \quad (24)$$

Принимая во внимание последнее неравенство, критерий возникновения термомагнитной неустойчивости можно представить в виде

$$\int_0^1 B(z) dz \geq \frac{\pi^2}{4} \tau. \quad (25)$$

Видно, что в отличие от аналогичного критерия для однородного температурного профиля неравенство (25) носит интегральный характер, учитывая влияние каждого участка сверхпроводника на порог возникновения неустойчивости сверхпроводящего состояния. Выполнение условия (25) означает, что малые флуктуации температуры δT и электрического поля δE в сверхпроводнике экспоненциально нарастают со временем. Наиболее вероятным результатом развития такой неустойчивости в этой ситуации может быть переход из критического состояния в резистивное.

В заключение заметим, что применяемое в работе описание критического состояния базируется на микроскопической теории БКШ. Далее используется континуальное приближение и предполагается, что физические характеристики системы слабо меняются на масштабах, соответствующих среднему расстоянию d между вихрями. Условие континуальности имеет вид $L \gg d$.

Еще одно ограничение возникает в связи с возможным перегревом сверхпроводника выше критической температуры T_c , когда система уравнений (1)–(4) неприменима. Такая ситуация реализуется, если выполнено условие $j_c(T_0, E_e) \geq a(T_c - T_0)$.

Критерий применимости квазистационарного приближения имеет вид

$$v \frac{dT}{dt} \left(\varkappa \frac{d^2 T}{dx^2} \right)^{-1} = \frac{\dot{H} t_\varkappa}{H_e} \ll \frac{\gamma}{3}.$$

Воспользовавшись этим критерием, нетрудно оценить скорость изменения электрического поля

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\dot{H} t_\varkappa}{H_e} \right)^2 \frac{L H_e}{c t_\varkappa^2},$$

температуры

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\dot{H} t_\varkappa}{H_e} \right)^2 \frac{T_0}{t_\varkappa}$$

и плотности тока

$$\frac{dj}{dt} = \left(\frac{\dot{H} t_\varkappa}{H_e} \right)^2 \frac{j_0}{t_\varkappa}.$$

Видно, что они малы и могут быть отброшены как члены второго порядка малости по параметру квазистационарности.

Список литературы

- [1] Р.Г. Минц, А.Л. Рахманов. Неустойчивости в сверхпроводниках. Наука, М. (1984). 361 с.
- [2] А. Кемпбелл, Дж. Иветс. Критические токи в сверхпроводниках. Мир, М. (1975). 175 с.
- [3] И.Л. Максимов, Ю.Н. Масаков, Н.А. Тайланов. ФТТ **28**, 8, 2323 (1986).
- [4] Н.А. Тайланов, У.Т. Яхшиев. Письма в ЖТФ **26**, 20, 8 (2000).
- [5] С.Р. Bean. Phys. Rev. Lett. **8**, 6, 250 (1962).
- [6] А.Н. Ларкин, Ю.Н. Овчинников. ЖЭТФ **49**, 2, 2337 (1981).
- [7] Д.С. Кузнецов. Специальные функции. Наука, М. (1965). 472 с.
- [8] Ю.Н. Маков, Ю.А. Степанянц. Океанология **23**, 2, 63 (1983).