Кейновский осциллятор

© Ф.М. Гашимзаде, А.М. Бабаев

Институт физики Академии наук Азербайджана,
370143 Баку, Азербайджан

(Поступила в Редакцию 26 марта 2001 г.)

Найден энергетический спектр и волновые функции кейновского осциллятора, описывающего спектр энергии электронов, легких дырок и спин-орбитально отщепленной зоны дырок в квантовой точке с параболическим удерживающим потенциалом.

Как известно [1], в литературе для описания энергетического спектра квантовых точек используется либо модель "жестких стенок", либо модель параболического удерживающего потенциала. Установлено, что модель параболического потенциала достаточно реалистично описывает не слишком большие квантовые точки. Поэтому в рамках этой модели для стандартного закона дисперсии электронов рассмотрен ряд задач физики квантовых точек, включая квантовую кристаллизацию электронов во внешнем магнитном поле [2].

Полупроводниковые соединения A^3B^5 (InAs, GaAs, InSb и др.), на которых в настоящее время созданы квантовые точки, обладают сложным энергетическим спектром, описываемым многозонным гамильтонианом. В частности, непараболичность спектра можно учитывать в рамках восьмизонной модели Кейна [3]. Такой подход был применен в работе [3], однако из-за сложности полученного уравнения анализ его решения был проведен в рамках весьма специальных приближений.

Отмеченная выше сложность уравнения возникает при стандартном способе введения параболического удерживающего потенциала через скалярный потенциал. Если же ввести потенциал путем так называемой минимальной замены [4]

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} - \imath\lambda\beta\mathbf{r}, \tag{1}$$

где β — диагональная матрица с элементами ± 1, то, как показано в работах [4–7], для дираковского гамильтониана получаем осцилляторное уравнение с добавочным постоянным слагаемым, природа которого связана со спин-орбитальным взаимодействием.

Здесь мы применили указанный выше подход для получения осцилляторного уравнения из кейновского восьмизонного гамильтониана, в котором взаимодействие валентной зоны с зоной проводимости учитывается посредством единственного матричного элемента P-параметра Кейна.

Полученное уравнение мы назвали кейновским осциллятором по аналогии с дираковским осциллятором. Далее приведен вид уравнения кейновского осциллятора и его решения. Система уравнений Кейна, включающих и бездисперсионные зоны тяжелых дырок, имеет вид [8,9]

$$(-E)C_1 - \frac{PK}{\sqrt{2}}C_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}PK_z C_4 + \frac{PK}{\sqrt{6}}C_5 + \frac{PK}{\sqrt{3}}C_7 + \frac{PK}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \tag{2}$$

$$(-E)C_2 - \frac{PK}{\sqrt{6}}C_4 + \sqrt{\frac{2}{3}}PK_zC_5 + \frac{PK_+}{\sqrt{2}}C_6 + \frac{PK}{\sqrt{3}}C_7 - \frac{PK_z}{\sqrt{3}}C_8 = 0, \tag{3}$$

$$-\frac{PK_+}{\sqrt{2}}C_1 - (E+E_g)C_3 = 0, \tag{4}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}PK_zC_1 - \frac{PK_+}{\sqrt{6}}C_2 - (E+E_g)C_4 = 0, \tag{5}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}PK_zC_2 + \frac{PK_+}{\sqrt{6}}C_1 - (E+E_g)C_5 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{PK_-}{\sqrt{2}}C_2 - (E+E_g)C_6 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{PK_z}{\sqrt{3}}C_1 + \frac{PK_+}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta+E+E_g)C_7 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{PK_-}{\sqrt{3}}C_1 - \frac{PK_z}{\sqrt{3}}C_2 - (\Delta+E+E_g)C_8 = 0, \tag{9}$$

где P — кейновский параметр, E_g — ширина запрещенной зоны, Δ — величина спин-орбитального расщепления,

$$K_\pm = K_x \pm K_y,$$

$$\mathbf{K} = -\imath\boldsymbol{\nabla}.$$

Произведем замену $\mathbf{K} \to \mathbf{K} - \imath\lambda\beta r$, где $\beta_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\beta_{11} = \beta_{33} = \beta_{66} = 1$; $\beta_{44} = \beta_{55} = \beta_{77} = \beta_{88} = -1$.

Подставляя (4)–(9) в (2) и (3), получим

$$(A - BL_z)C_1 - BM_+C_2 = 0, \tag{10}$$

$$(A - BL_z)C_2 - BM_-C_1 = 0, \tag{11}$$

где $A = -E + \dfrac{P^2(E_g + E + \frac{2}{3}\Delta)}{(E_g+\Delta+E)(E_g+E)}(-\nabla^2 + \lambda^2r^2 + 3\lambda)$, $B = \dfrac{2}{3}\dfrac{P^2\Delta\lambda}{(E_g+E)(E_g+\Delta+E)}$, $L_\pm = L_x \pm \imath L_y$, L_x, L_y,

L_z — компоненты оператора момента импульса. Из-за сферической симметрии задачи ищем решение дифференциального уравнения в виде $F(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi)$.

Подействуем оператором L_+ на второе уравнение и, используя коммутационные соотношения для операторов $([L_z, L_+] = L_+, [\widehat{L}, L^2] = 0)$, найдем L_+C_2; после подстановки этого значения в (10) получим два уравнения для $F(r)$

$$\left(A + \frac{B}{2} \mp B(l + \frac{1}{2})F(r) = 0.\right) \tag{12}$$

Собственные значения и собственные функции имеют следующий вид:

$$f(E) = \hbar\omega \left[2n + l + \frac{1}{2}\right], \tag{13}$$

$$C_1 = A_{nl} r^l \exp\left(-\frac{\lambda}{2} r^2\right) L_n^{l+1/2}(\lambda r^2) Y_{l,m}(\theta, \varphi), \tag{14}$$

где $L_n^{l+1/2}(\lambda r^2)$ — обобщенные полиномы Лагерра, A_{nl} — множитель нормировки

$$A_{nl} = \left[\frac{2\lambda^{l+3/2}}{n!\Gamma(n + l + 3/2)}\right]^{1/2} \frac{1}{\Gamma(l + 3/2)}, \tag{15}$$

$$f(E) = \frac{(E_g + E)(E_g + \Delta + E)}{(E_g + E + \frac{2}{3}\Delta)} \frac{E_g + \frac{2}{3}\Delta}{E_g(E_g + \Delta)}$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{\Delta}{E + E_g + \frac{2}{3}\Delta} \frac{\hbar\omega}{2} \left\{-\frac{1}{2} \pm \left[l + \frac{1}{2}\right]\right\} - \frac{3}{2}\hbar\omega,$$

$$\omega = \frac{\hbar\lambda}{m}, \quad m = \frac{\hbar^2}{P^2} \frac{E_g(E_g + \Delta)}{E_g + \frac{2}{3}\Delta}. \tag{16}$$

Уравнение (13) определяет энергии электронов, легких дырок и спин-орбитально отщепленной зоны дырок. Как и в случае дираковского осциллятора, в пределе $\frac{E}{E_g} \leq 1$ нулевая энергия оказывается вдвое больше, чем для осциллятора стандартного уравнения Шредингера.

Уравнение (13) может оказаться полезным для анализа влияния непараболичности на энергетический спектр электронов в квантовой точке. Ранее эта задача была рассмотрена в работах [10,11] в рамках модели "жестких стенок". Преимущество данного подхода заключается в простоте анализа аналитических выражений по сравнению с численными расчетами [10,11].

Авторы признательны Э. Джафарову, обратившему их внимание на работы по дираковскому осциллятору.

Список литературы

[1] Н.Е. Капуткина, Ю.Е. Лозовик. ФТП **40**, *11*, 1753 (1998).
[2] Н.Е. Капуткина, Ю.Е. Лозовик. ФТП **40**, *9*, 2134 (1998).
[3] T. Darnhofer, U. Rössler. Phys. Rev. **B47**, *23*, 16 020 (1993).
[4] J.P. Grawford. J. Math. Phys. **34**, *10*, 4428 (1993).
[5] J. Benitez, R.P. Martinez y Romero. Phys. Rev. Lett. **64**, 14 (1990).
[6] M. Moshinsky, A. Szezepanik. J. Phys. **A22**, L817 (1989).
[7] P.A. Cook. Lett. Nuovo Cimento **1**, 419 (1971).
[8] Б.М. Аскеров. Кинетические эффекты в полупроводниках. Наука, Л., (1970).
[9] А.И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников. Наука, М. (1978).
[10] Al.L. Efros, M. Rosen. Phys. Rev. **B58**, 7120 (1998).
[11] F.M. Gashimzade, A.M. Babaev, M.A. Bagirov. J. Phys.: Cond. Matt. **12**, 7923 (2000).