

Нормальные процессы рассеяния квазичастиц и кинетические эффекты в полупроводниках с вырожденной статистикой носителей тока

© И.Г. Кулеев

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук,
620219 Екатеринбург, Россия

E-mail: kuleev@imp.uran.ru

(Поступила в Редакцию 14 мая 2001 г.)

Рассмотрено влияние нормальных процессов электрон-электронного и фонон-фононного рассеяния на релаксацию импульса квазичастиц в неравновесных электрон-фононных системах вырожденных полупроводников. Решена система кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения и вычислены кинетические коэффициенты проводников в линейном приближении по параметру вырождения. Проанализировано влияние нормальных процессов рассеяния квазичастиц на электропроводность термоэдс и теплопроводность вырожденных полупроводников. Учтено перераспределение импульса фононов в N -процессах фонон-фононного рассеяния как внутри каждой колебательной ветви, так и между различными колебательными ветвями фононов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-02-16299).

При изучении влияния электрон-фононного увлечения на кинетические эффекты в проводниках предполагалось [1–12], что релаксацию импульса квазичастиц в неравновесной электрон-фононной системе можно описать, вводя полные частоты релаксации квазичастиц. В этом приближении нормальные процессы (N -процессы) электрон-электронного рассеяния не учитывались, а N -процессы фонон-фононного рассеяния включались в полную частоту релаксации фононов. Такой подход не является корректным в достаточно чистых проводниках при низких температурах, когда частоты релаксации квазичастиц в N -процессах рассеяния становятся сравнимыми или больше резистивных частот релаксации электронов и фононов. Хорошо известно [13–18], что N -процессы рассеяния квазичастиц не приводят к релаксации импульса электронов и фононов, а обеспечивают релаксацию подсистем к дрейфовому локально-равновесному распределению квазичастиц. Поэтому для описания неравновесного распределения каждой из подсистем с учетом N -процессов необходимо ввести три параметра: две частоты релаксации — резистивную и частоту релаксации квазичастиц в N -процессах рассеяния — и среднюю скорость дрейфа. В этом случае система кинетических уравнений должна быть дополнена двумя уравнениями баланса импульса для определения дрейфового движения электронной и фононной подсистем.

Этот новый подход был реализован в работах [19] при анализе кинетических эффектов в металлах. В них показано, что N -процессы электрон-электронного рассеяния вносят вклад только в диффузионные потоки и соответственно в термоэдс и теплопроводность металлов. А дрейф фононов, связанный с N -процессами фонон-фононного рассеяния, может приводить к усилению вза-

имного увлечения электронов и фононов в электропроводности и значительному увеличению фононной компоненты термоэдс. Описание неравновесной электрон-фононной системы в рамках трехпараметрического приближения позволило более корректно рассмотреть кинетические эффекты в металлах. В работе [20] рассмотрено влияние N -процессов фонон-фононного рассеяния на электрон-фононное увлечение и кинетические эффекты в вырожденных полупроводниках. Заметим, что система интегральных уравнений для параметров, характеризующих электронную функцию распределения в металлах [19], имеет более простой вид, чем в вырожденных полупроводниках [20], поскольку в металлах волновой вектор фононов в электрон-фононных столкновениях и соответствующих частотах релаксации ограничивается сверху величиной q_d [21] (q_d — дебаевский волновой вектор).

Цель данной работы — изучение влияния дрейфового движения квазичастиц, обусловленного N -процессами рассеяния, на электрон-фононное увлечение и кинетические эффекты в полупроводниках с вырожденной статистикой носителей тока. Во-первых, в отличие от результатов, полученных в работе [20], мы дадим полное решение задачи о взаимном увлечении электронов и фононов с учетом N -процессов рассеяния как электронов, так и фононов. Во-вторых, если в [20] рассмотрен случай перераспределения импульса продольных и поперечных фононов за счет N -процессов только внутри каждой колебательной ветви (механизм Саймонса [22]), то здесь более детально анализируется механизм N -процессов релаксации Херринга [23], приводящий к перераспределению импульса фононов между различными колебательными ветвями. Мы покажем, что эффективная частота релаксации электронов, термоэдс увлечения и

решеточная теплопроводность достаточно чистых полупроводников и полуметаллов существенным образом зависит от способа релаксации импульса фононов в N -процессах рассеяния [22,23]. Наиболее существенным результатом настоящей работы, который имеет важное практическое значение, является влияние N -процессов на термоэдс увлечения. Показано, что в условиях, когда частота релаксации фононов в N -процессах $v_{phN}(q)$ значительно превосходит резистивную частоту $v_{phR}(q)$, термоэдс увлечения полностью определяется усредненной по частотам резистивной частотой релаксации фононов. При однопараметрическом описании неравновесной электрон-фононной системы [1–12] в этом предельном случае термоэдс увлечения определяется частотой релаксации фононов в N -процессах.

В разделе 1 система кинетических уравнений вместе с уравнениями баланса импульса электронов и фононов преобразованы в систему трех интегральных уравнений для параметров, характеризующих неравновесную электронную функцию распределения. В разделе 2 эта система решена в линейном приближении по параметру вырождения $k_B T / \xi \ll 1$ (ξ — энергия Ферми). В разделе 3 вычислены электропроводность и термоэдс вырожденных полупроводников с учетом взаимного увлечения электронов и фононов. В разделе 4 проанализированы соотношения симметрии Онзагера и роль нормальных процессов рассеяния квазичастиц в электронной и фононной теплопроводности.

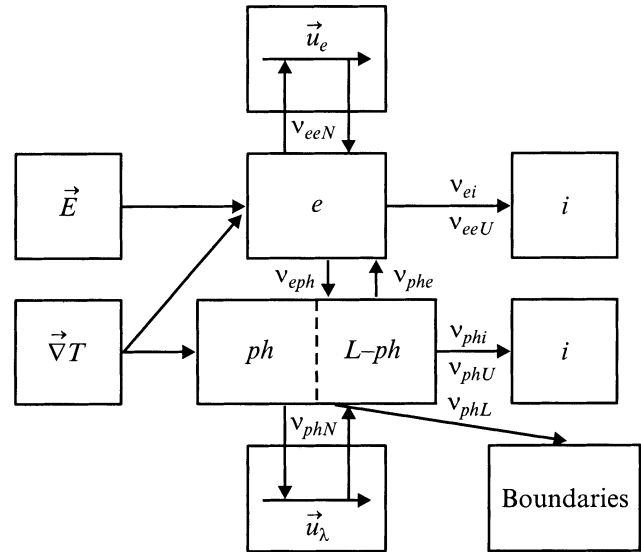
1. Система кинетических уравнений для неравновесной электрон-фононной системы с учетом нормальных процессов рассеяния квазичастиц

Система кинетических уравнений для неравновесных электронной $f(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ и фононной $N^\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ функций распределения с учетом N -процессов рассеяния электронов и фононов имеет вид [2–5,19]

$$\frac{e}{\hbar} \mathbf{E}_0 \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} + (\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{r}}) f_{\mathbf{k}} = I_{ei}(f_{\mathbf{k}}) + I_{eph}(f_{\mathbf{k}}, N_{\mathbf{q}}^\lambda) + I_{ee}(f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}}),$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{q}}^\lambda \nabla_{\mathbf{r}} N_{\mathbf{q}}^\lambda = - (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N_{q\lambda}^0) v_{ph}^{(1)\lambda}(q) - (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda)) v_{phN}^\lambda + I_{phe}(N_{\mathbf{q}}^\lambda, f_{\mathbf{k}}). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}^\lambda = s_\lambda \mathbf{q} / q$ — групповая скорость акустических фононов с поляризацией λ , $v_{phN}^\lambda(q)$ — частота релаксации фононов в N -процессах рассеяния, частота $v_{ph}^{(1)\lambda}(q) = v_{phl}^\lambda(q) + v_{phU}^\lambda(q) + v_{phL}^\lambda(q)$ включает все неэлектронные резистивные частоты релаксации фононов, обусловленные рассеянием фононов на фононах в процессах переброса, дефектах и границах образца. Интегралы столкновений электронов с примесями I_{ei} , электронами I_{ee} , фононами I_{eph} и фононов с электронами I_{phe} определены в [2–5,17–19]. В уравнении (1)



Схема, иллюстрирующая релаксацию импульса в неравновесной электрон-электронной системе при учете нормальных процессов рассеяния квазичастиц.

учтено, что N -процессы рассеяния фононов приводят фононную подсистему к локально равновесному распределению Планка с дрейфовой скоростью \mathbf{u}_λ , которая может быть различной для фононов с различной поляризацией λ [13–16]

$$N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda) = \left(\exp \left(\frac{\hbar \omega_{q\lambda} - \hbar \mathbf{q} \mathbf{u}_\lambda}{k_B T} \right) - 1 \right)^{-1} \cong N_{q\lambda}^0 + \frac{\hbar \mathbf{q} \mathbf{u}_\lambda}{k_B T} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1), \quad (2)$$

где $N_{q\lambda}^0$ — функция Планка.

Схема, иллюстрирующая перераспределение и релаксацию импульса, полученного электрон-фононной системой от электрического поля и градиента температуры, приведена на рис. 1. Механизмы электрон-фононной релаксации, характеризующиеся частотами релаксации v_{eph} и v_{phe} , приводят к перераспределению импульса внутри электрон-фононной системы. Рассеяние электронов на примесях (с частотой релаксации v_{ei}), электрон-электронное рассеяние и фонон-фононное рассеяние в процессах переброса (v_{eeU} и v_{phU}), рассеяние фононов на границах (v_{phL}), фононов на примесях (механизм Рэлея) (v_{phi}) обуславливают релаксацию полного импульса электрон-фононной системы. N -процессы фонон-фононного рассеяния перераспределяют импульс между различными фононными модами и приводят к дрейфу фононов со скоростью \mathbf{u}_λ . N -процессы электрон-электронного рассеяния перераспределяют импульс внутри подсистемы электронов и способствуют установлению локально равновесного фермиевского распределения со средней скоростью дрейфа \mathbf{u} , описываемого функ-

цией [17–19]

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \left(\exp \left(\frac{\varepsilon_k - \xi - \hbar \mathbf{k} \mathbf{u}}{k_B T} \right) + 1 \right)^{-1} \\ = f_0(\varepsilon_k) - (\hbar \mathbf{k} \mathbf{u}) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k} \right). \quad (3)$$

Представим функции распределения электронов и фононов в виде

$$f_{\mathbf{k}} = f_0(\varepsilon_k) + \delta f_{\mathbf{k}}, \quad N_{\mathbf{q}}^\lambda = N_{\mathbf{q}\lambda}^0 + g_\lambda(\mathbf{q}), \quad (4)$$

где $f_0(\varepsilon_k)$ и $N_{\mathbf{q}\lambda}^0$ — локально равновесные функции распределения, а $\delta f_{\mathbf{k}}$ и $g_\lambda(\mathbf{q})$ — неравновесные добавки к функциям распределения, линейные по внешним воздействиям. Линеаризуем интегралы столкновений по этим добавкам. Тогда в приближении времени релаксации интеграл столкновений I_{ee} может быть представлен в виде [18,19]

$$I_{ee}(f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}}) \cong -v_{eeU}(k) \delta f_{\mathbf{k}} - v_{eeN}(k) \left[\delta f_{\mathbf{k}} - (\hbar \mathbf{k} \mathbf{u}) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k} \right) \right]. \quad (5)$$

Частоты релаксации $v_{eeN}(k)$ и $v_{eeU}(k)$ определены в [18]. Интегралы столкновений $I_{ie}(\delta f_{\mathbf{k}})$, $I_{phe}(f_0, g_\lambda(\mathbf{q}))$, а также $I_{eph}(\delta f_{\mathbf{k}}, N_{\mathbf{q}\lambda}^0)$ в приближении упругого рассеяния выразим через частоты релаксации [12]. При расчете интеграла столкновений $I_{eph}(f_0, g_\lambda(\mathbf{q}))$ учтем неупругость столкновений электронов с фононами в первом порядке по параметру неупругости $\hbar \omega_{\mathbf{q}\lambda} / \xi$. Представим функцию распределения электронов $\delta f_{\mathbf{k}}$ в стандартном виде [2–5]

$$\delta f_{\mathbf{k}} = \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k} \right) (\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\chi}(\varepsilon_k)). \quad (6)$$

Для определения скоростей дрейфа квазичастиц система кинетических уравнений (1) должна быть дополнена двумя уравнениями баланса импульса для электронной и фононной подсистем [19]. Учитывая, что в нормальных процессах электрон-электронного рассеяния полный импульс электронной подсистемы сохраняется, выразим скорость дрейфа электронов \mathbf{u} через функцию $\boldsymbol{\chi}(\varepsilon)$ аналогично [19]

$$\mathbf{u} = \frac{1}{m_F v_{eeN}(\xi)} \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{k}^3 v_{eeN}(\varepsilon) \boldsymbol{\chi}(\varepsilon). \quad (7)$$

Таким образом, в данной работе, как и в [19], неравновесность подсистемы электронов описывается тремя параметрами: двумя частотами релаксации $v_{eeN}(k)$ и $v_{eR}(k)$ ($v_{eR}(k) = v_{ei}(k) + v_{eph}(k) + v_{eeU}(k)$ — резистивная частота релаксации импульса электронов) и средней скоростью дрейфа электронов \mathbf{u} .

Подставим (2)–(4) в (1) и получим выражение для фононной функции распределения $g_\lambda(\mathbf{q})$ [20]

$$g_\lambda(\mathbf{q}) = -\frac{N_{\mathbf{q}\lambda}^0 (N_{\mathbf{q}\lambda}^0 + 1) \hbar \omega_{\mathbf{q}\lambda}}{v_{ph}^\lambda(\mathbf{q}) k_B T^2} (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}^\lambda \nabla T) \\ + \frac{\hbar \mathbf{q} \mathbf{u}_\lambda N_{\mathbf{q}\lambda}^0 (N_{\mathbf{q}\lambda}^0 + 1)}{k_B T} \frac{v_{phN}^\lambda(\mathbf{q})}{v_{ph}^\lambda(\mathbf{q})} - \frac{v_{phe}^\lambda(\mathbf{q}) N_{\mathbf{q}\lambda}^0 (N_{\mathbf{q}\lambda}^0 + 1)}{v_{ph}^\lambda(\mathbf{q}) k_B T} \\ \times \int_{\varepsilon_{q/2}}^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) (\hbar \mathbf{q} \boldsymbol{\chi}(\varepsilon)). \quad (8)$$

Здесь $v_{ph}^\lambda = v_{ph}^{(\lambda)} + v_{phN}^\lambda + v_{phe}^\lambda$, а $v_{phe}^\lambda(k_F, q)$ — частота релаксации импульса фононов на электронах. Первый и второй члены в (8) обусловлены диффузионным и дрейфовым движением фононной подсистемы, а последний член учитывает влияние неравновесности электронов. Скорость дрейфа фононов \mathbf{u}_λ находится из уравнения баланса импульса, которое может быть получено из уравнения (1) и закона сохранения импульса фононной подсистемы в нормальных процессах фонон-фононного рассеяния

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \hbar \mathbf{q} v_{phN}^\lambda(\mathbf{q}) (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda)) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \hbar \mathbf{q} v_{phN}^\lambda(\mathbf{q}) \\ \times \left[g_\lambda(\mathbf{q}) - \frac{\hbar \mathbf{q} \mathbf{u}_\lambda N_{\mathbf{q}\lambda}^0 (N_{\mathbf{q}\lambda}^0 + 1)}{k_B T} \right] = 0. \quad (9)$$

Известны два механизма нормальных трехфононных процессов рассеяния: механизмы Херринга [23] и Саймонса [22]. Частота релаксации поперечных фононов в механизме Херринга ($v_{phN}^t \cong B_1 T^4 \omega_t$) определяется трехфононными процессами рассеяния ($t + 1 \Leftrightarrow 1$), в которых участвуют один поперечный и два продольных фонона [16]. Частота релаксации продольных фононов в модели анизотропного континуума ($v_{phN}^L \cong B_L T^3 \omega_l^2$) определяется трехфононными процессами распада продольного фонона на два поперечных, принадлежащих различным ветвям, либо слиянием двух поперечных с возникновением продольного фонона ($1 \Leftrightarrow t_1 + t_2$). Таким образом, в механизме рассеяния Херринга участвуют фононы различных поляризаций, и этот механизм релаксации обеспечивает перераспределение дрейфового импульса между продольными и поперечными фононами. Поэтому трехфононные процессы Херринга в неравновесной фононной системе стремятся установить локально равновесное распределение с дрейфовой скоростью, одинаковой для фононов обеих поляризаций $\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_H$.

В механизме релаксации Саймонса [22] участвуют фононы одной поляризации. Для этого механизма рассеяния ($v_{phN}^\lambda \cong B_\lambda T^4 \omega_\lambda$) закон сохранения импульса в N -процессах выполняется для каждой из ветвей фононного спектра, и скорость дрейфа продольных и поперечных фононов будет различной. Поэтому далее рассмотрим два варианта релаксации импульса фононов

в N -процессах: во-первых, когда N -процессы перераспределяют импульс только внутри каждой колебательной ветви, во-вторых, когда доминирует перераспределение импульса между различными колебательными ветвями.

Из уравнения баланса импульса фононов (10) и выражения (9) определим скорость дрейфа фононов \mathbf{u}_λ для механизмов релаксации Херринга [23] \mathbf{u}_H и Саймонса [22] \mathbf{u}_S через функцию $\chi(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\mathbf{u}^{(H)} = \frac{s_L^2}{T} \beta_1^{(H)} (-\nabla T) + \frac{2s_L^2}{k_B T} \left(\frac{k_F}{qT\lambda} \right)^3 \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \times \chi(\varepsilon) \beta_{ephN}^{(H)}(\varepsilon) = \mathbf{u}_0^{(H)} + \Delta \mathbf{u}^{(H)}, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_\lambda^{(S)} = \frac{s_\lambda^2}{T} \beta_1^{(S)} (-\nabla T) + \frac{2s_\lambda^2}{k_B T} \left(\frac{k_F}{qT\lambda} \right)^3 \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \times \beta_{ephN}^{(S)}(\varepsilon) \chi(\varepsilon) = \mathbf{u}_{0\lambda}^{(S)} + \Delta \mathbf{u}_\lambda^{(S)}, \quad (11)$$

$$\beta_1^{(S)} = \frac{\Psi_N^\lambda}{\Psi_{NR}^\lambda}, \quad \beta_{ephN}^{(S)}(\varepsilon) = \frac{\psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon)}{\Psi_{NR}^\lambda},$$

$$\beta_1^{(H)} = \frac{\Psi_n^L + 2S_*^3 \Psi_N^t}{\Psi_{NR}^L + 2S_*^5 \Psi_{NR}^t},$$

$$\beta_{ephN}^{(H)}(\varepsilon) m = \frac{\psi_{ephN}^L(\varepsilon) + 2\psi_{ephN}^t(\varepsilon)}{\Psi_{NR}^L + 2S_*^5 \Psi_{NR}^t}.$$

Здесь

$$S_* = s_L/s_t, \quad z_q^\lambda = \frac{\hbar\omega_{q\lambda}}{k_B T} = \frac{q}{qT\lambda}, \quad qT\lambda = \frac{k_B T}{\hbar s_\lambda},$$

$$z_{2k}^\lambda = \frac{2k}{qT\lambda}, \quad \tilde{m}(\varepsilon) = \frac{m(\varepsilon)}{M_F}, \quad m_F = m(\xi)$$

— эффективная масса, а k_F — волновой вектор электрона на уровне Ферми. Остальные функции определяются выражениями

$$\Psi_N^\lambda = \left\langle \left\langle \frac{v_{phN}^\lambda(q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle \right\rangle_{z_{d\lambda}} \equiv \int_0^{z_{d\lambda}} dz_q^\lambda (z_q^\lambda)^4 \frac{v_{phN}^\lambda(q)}{v_{ph}^\lambda(q)} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1),$$

$$\Psi_{NR}^\lambda = \left\langle \left\langle \frac{v_{phR}^\lambda(q) v_{phN}^\lambda(q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle \right\rangle_{z_{d\lambda}},$$

$$\psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon) = \left\langle \left\langle \frac{v_{eph}^\lambda(k_F, q) v_{phN}^\lambda(q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle \right\rangle_{z_{2k}^\lambda}$$

$$= \int_0^{z_{2k}^\lambda} dz_q^\lambda \frac{v_{eph}^\lambda(k_F, q) v_{phN}^\lambda(q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \frac{k_B T}{2m_F s_\lambda^2} \left(\frac{qT\lambda}{k_F} \right)^3 \Psi_{pheN}^\lambda(\varepsilon), \quad (12)$$

где $v_{ph}^\lambda(q) = v_{phN}^\lambda(q) + v_{phR}^\lambda(q)$ — полная частота релаксации импульса фононов, $v_{ph}^{(l)\lambda}(q) = v_{ph}^{(l)\lambda} + v_{phe}^\lambda(q)$ — резистивная частота релаксации фононов, а $v_{phe}^\lambda(q)$ — частота релаксации импульса фононов на электронах [10,12], $z_{d\lambda} = \hbar\omega_{d\lambda}/k_B T$ ($\omega_{d\lambda}$ — дебаевская частота фононов

с поляризацией λ). В скорости дрейфа фононов \mathbf{u}_λ выделили две части, которые определяются влиянием градиента температуры ($\mathbf{u}_{0\lambda}$) и неравновесности электронов ($\Delta \mathbf{u}_\lambda$) на дрейфовое движение фононов. Таким образом, при учете N -процессов рассеяния фононов неравновесность подсистемы фононов также описывается не одним параметром — полной частотой релаксации импульса фононов [1–12], а тремя-двумя частотами релаксации $v_{phN}^\lambda(q)$ и $v_{phR}^\lambda(q)$ и средней скоростью дрейфа фононов.

Подставим (8) в выражение для фононной функции распределения $g_\lambda(\mathbf{q})$ и объединим дрейфовый и диффузионный вклады, пропорциональные градиенту температуры. Тогда $g_\lambda(\mathbf{q})$ может быть представлена в виде суммы трех слагаемых [20]

$$g_\lambda(\mathbf{q}) = g_\lambda^{(1)}(\mathbf{q}) + g_{\Delta \mathbf{u}\lambda}(\mathbf{q}) + g_\lambda^{(2)}(\mathbf{q}),$$

$$g_{\Delta \mathbf{u}\lambda} = \frac{(\hbar \mathbf{q} \Delta \mathbf{u}_\lambda)}{k_B T} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1) \frac{v_{phN}^\lambda(q)}{v_{ph}^\lambda(q)},$$

$$g_\lambda^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1)}{\tilde{v}_{ph}^\lambda(q)} \frac{\hbar \omega_{q\lambda}}{k_B T^2} (v_q^\lambda \nabla T),$$

$$\tilde{v}_{ph}^\lambda(q) = v_{ph}^\lambda(q) \left(1 + v_{phN}^\lambda(q) \beta_1^{(S,H)} \right)^{-1},$$

$$g_\lambda^{(2)}(\mathbf{q}) = -\frac{v_{phe}^\lambda(q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \frac{N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1)}{k_B T}$$

$$\times \int_{\varepsilon_{q/2}}^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) (\hbar \mathbf{q} \chi(\varepsilon)), \quad (13)$$

где $\tilde{v}_{ph}^\lambda(q)$ — эффективная частота релаксации импульса фононов, перенормированная нормальными процессами рассеяния фононов. Функции $g_\lambda^{(2)}(\mathbf{q})$ и $g_{\Delta \mathbf{u}\lambda}(\mathbf{q})$ учитывают влияние неравновесности электронов на диффузию и дрейф фононов. Неравновесная добавка $g_\lambda^{(1)}(\mathbf{q})$ обусловлена непосредственным действием градиента температуры на диффузионное и дрейфовое движение фононов. В отличие от результатов [20] здесь мы показали, что эта перенормировка и соответственно выражения для термоэдс увлечения и решеточной теплопроводности будут различными для внутриветвевых (механизм релаксации Саймонса [2]) и межветвевых (механизм Херринга [23]) вариантов перераспределения импульса фононов в N -процессах. Очевидно, что при выполнении неравенства $v_{phN}^\lambda(q) \ll v_{phR}^\lambda(q)$ величина $\tilde{v}_{ph}^\lambda(q) \approx v_{phR}^\lambda(q)$, и вкладом дрейфа фононов в функцию распределения $g_\lambda(\mathbf{q})$ можно пренебречь. В этом предельном случае однопараметрическое приближение, принятое в работах [1–12], для описания влияния неравновесности фононной подсистемы на явления электронного переноса в проводниках с вырожденной статистикой носителей тока является оправданным. В противоположном предельном случае $v_{phN}^\lambda(q) \gg v_{phR}^\lambda(q)$ необходимо учитывать

влияние дрейфа фононов на обмен импульса в неравновесной электрон-фононной системе. Таким образом, в условиях, когда нормальные процессы играют существенную роль в перераспределении импульса фононов, необходимо описание фононной подсистемы в расширенном базисе.

Цель данной работы — исследование роли дрейфа квазичастиц, обусловленного N -процессами, на явления электронного переноса. При учете N -процессов для функции $\chi(\varepsilon)$ аналогично [12,20] может быть получено уравнение, которое удобнее представить в виде интегрального уравнения Вольтерра

$$\begin{aligned} \chi(\varepsilon) &= \chi_1(\varepsilon) + \chi_u(\varepsilon) + \chi_\Lambda(\varepsilon) + \frac{\tilde{m}^2(\varepsilon)\tau(\varepsilon)}{\tilde{k}^3} \mathbf{Q}(\varepsilon) \\ &\equiv \chi^*(\varepsilon) + \frac{\tilde{m}^2(\varepsilon)\tau(\varepsilon)}{\tilde{k}^3} \mathbf{Q}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varepsilon) &= \Phi(\varepsilon) \int_\varepsilon^\infty d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \tilde{m}(\varepsilon') \chi(\varepsilon') \\ &\quad + \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \tilde{m}(\varepsilon') \Phi(\varepsilon') \chi(\varepsilon') \\ &= \Phi(\varepsilon) \mathbf{K}^>(\varepsilon) + \mathbf{K}^<(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_\lambda \left\langle \frac{v_{phe}^\lambda(k_F, q) \cdot v_{eph}^\lambda(k_F, q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle_{z_{2k}^\lambda}. \quad (15)$$

Здесь $\tilde{k} = k/k_F$, $\hbar k_F$ — фермиевский импульс, $\tau(\varepsilon)$ — полное время релаксации электронов,

$$\tau^{-1}(\varepsilon_k) = \nu_e(k) = \nu_{eR}(k) + \nu_{eeN}(k).$$

Обратная величина $(\Phi(\varepsilon))^{-1}$ характеризует время τ_{e-ph-e} , в течение которого импульс, переданный электронами в фононную подсистему, возвращается обратно электронам [12]. Функция $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ учитывает влияние неравновесности электронов на электроны через подсистему фононов и связана взаимным увлечением электронов и фононов.

Функция $\chi_1(\varepsilon)$ учитывает непосредственное действие электрического поля и градиента температуры на электронную подсистему, а также эффект увлечения электронов фононами с учетом влияния N -процессов фононного рассеяния

$$\begin{aligned} \chi_1(\varepsilon) &= -e\tau(\varepsilon) \left(\mathbf{E} + \frac{k_B}{e} \left(\frac{(\tilde{m}(\varepsilon))^2}{\tilde{k}^3} \tilde{A}_{ph}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon - \xi}{k_B T} \right) \nabla T \right), \\ \tilde{A}_{ph}(\varepsilon) &= \sum_\lambda \frac{m_F s_\lambda^2}{k_B T} \left\langle \frac{v_{eph}^\lambda(k_F, q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle_{z_{2k}^\lambda}, \end{aligned} \quad (16)$$

функции $\tilde{A}_{ph}(\varepsilon)$ и $\Phi(\varepsilon)$ зависят от энергии ε только через верхний предел интегрирования $z_{2k(\varepsilon)}^\lambda$ [12]. Величины $\chi_u(\varepsilon)$ и $\chi_\Lambda(\varepsilon)$ обусловлены нормальными процессами

электрон-электронного и фонон-фононного рассеяния, приводящими к дрейфовому движению квазичастиц. Выражения для этих функций имеют вид

$$\chi_u(\varepsilon) = \frac{m(\varepsilon)\nu_{eeN}(\varepsilon)}{\nu_e(\varepsilon)} \mathbf{u}, \quad \chi_\Lambda(\varepsilon) = \frac{\tilde{m}^2(\varepsilon)\tau(\varepsilon)}{\tilde{k}^3} \mathbf{\Lambda}(\varepsilon),$$

$$\mathbf{\Lambda}(\varepsilon) = \sum_\lambda m_F \Delta \mathbf{u}_\lambda \psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}^{(H,S)}(\varepsilon) &= \sum_\lambda \frac{K_{(H,S)}^\lambda(\varepsilon) \nu_F}{\beta_{ephN}^{(H,S)}(\xi)} \\ &\quad \times \int_0^\infty d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \tilde{m}(\varepsilon') \beta_{ephN}^{(H,S)}(\varepsilon') \chi(\varepsilon'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{(H,S)}^\lambda(\varepsilon) &= \frac{2m_F s_\lambda^2}{k_B T} \left(\frac{k_F}{qT\lambda} \right)^3 \frac{\psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon) \beta_{pheN}^{(H,S)}(\xi)}{\nu_F} \\ &= \frac{\psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon) \beta_{pheN}^{(H,S)}(\xi)}{\nu_F \Psi_{NR}^\lambda}, \end{aligned}$$

$$K^{(H,S)}(\varepsilon) = \sum_\lambda K_{(H,S)}^\lambda(\varepsilon). \quad (17)$$

Далее значки (H) и (S) у функций $K(\varepsilon)$ и $\mathbf{\Lambda}(\varepsilon)$ опустим для упрощения записи формул.

Итак, выражения (7) и (14)–(17) определяют систему трех интегральных уравнений для величин \mathbf{u} , $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ и $\mathbf{\Lambda}(\varepsilon)$, характеризующих неравновесность электронной подсистемы. В работе [12] показано, что для интегрального уравнения (14) можно построить регулярную схему расчета функции $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, не прибегая к разложению по малому параметру, связанному со слабостью электрон-фононного взаимодействия или малостью эффекта взаимного влияния неравновесности электронов и фононов. Далее покажем, что систему уравнений (14)–(17) можно решить и при учете нормальных процессов рассеяния квазичастиц, используя лишь условие сильного вырождения $k_B T / \xi \ll 1$.

2. Решение кинетического уравнения для электронов в полуметаллах и вырожденных полупроводниках

Решение системы интегральных уравнений (14)–(17) удобнее искать не для функции $\chi(\varepsilon)$, а для $\mathbf{Q}(\varepsilon)$. Воспользовавшись формулами (14)–(17), выразим скорость дрейфа электронов \mathbf{u} и величину $\mathbf{\Lambda}(\varepsilon)$, определяющую влияние дрейфа фононов и функцию распределения

электронов, через функцию $\mathbf{Q}(\varepsilon)$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{m_F v_F} \left\{ \mathbf{F} - e \Delta_N - \mathbf{Q}(\xi) + \frac{v_F}{v_{eeN}(\xi)} \right. \\ \left. \times \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{v_{eeN}(\varepsilon)}{v_e(\varepsilon)} \varphi(\varepsilon) \mathbf{Q}(\varepsilon) \right\},$$

$$\varphi(\varepsilon) = \left(\frac{\tilde{m}(\varepsilon)}{\tilde{k}(\varepsilon)} \right)^3 \tau(\varepsilon),$$

$$\Lambda(\varepsilon) = \sum_\lambda K^\lambda(\varepsilon) \left\{ \mathbf{F} - \mathbf{Q}(\xi) + \frac{v_F}{\beta_{ephN}^{(H,S)}(\xi)} \right. \\ \left. \times \int_0^\infty d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \varphi(\varepsilon') \beta_{ephN}^{(H,S)}(\varepsilon') \mathbf{Q}(\varepsilon') \right\} - e \Delta_\Lambda(\varepsilon),$$

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E} + \frac{k_B}{e} \tilde{A}_{ph}(\xi) \nabla T, \quad \Delta_N = \frac{k_B}{e} \frac{\pi^2}{3} D_n \nabla T,$$

$$D_N = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln \left(\frac{k^3(\varepsilon) v_{eeN}(\varepsilon)}{v_e(\varepsilon)} \right) \right]_{\varepsilon=\xi},$$

$$\Delta_\Lambda(\varepsilon) = \frac{k_B}{e} \frac{\pi^2}{3} D_\Lambda(\varepsilon) \nabla T,$$

$$D_\Lambda(\varepsilon) = \sum_\lambda K_{(H,S)}^\lambda(\varepsilon) D_{ephN}^{(H,S)},$$

$$D_{ephN}^{(H,S)} = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln \left(m(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \beta_{ephN}^{(H,S)}(\varepsilon) \right) \right]_{\varepsilon=\xi}. \quad (18)$$

Здесь мы ввели вспомогательный вектор \mathbf{F} , использование которого (см. далее) в значительной степени упрощает решение нашей задачи

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E}_A + m_F v_{eeN}(\xi) \mathbf{u} + \Lambda(\xi) + \mathbf{Q}(\xi) = \chi(\xi) / \tau_F. \quad (19)$$

Для решения системы трех интегральных уравнений (14), (15) и (18) можно было бы воспользоваться методом Гуревича и Коренблита [10], заменив в интегральном операторе (15) в условиях сильного вырождения $(-\partial f_0 / \partial \varepsilon) \cong \delta(\varepsilon - \xi)$. Однако этот способ позволяет корректно проанализировать кинетические коэффициенты с учетом взаимного увлечения только в нулевом приближении по вырождению электронного газа. Поэтому здесь воспользуемся методом, предложенным в работе [12], который является достаточно универсальным (см. [19–21]) и наиболее удобным для параметрического решения системы интегральных уравнений. Он позволяет, не конкретизируя энергетической зависимости функций $\Phi(\varepsilon)$, $\tau(\varepsilon)$ и $m(\varepsilon)$ от энергии электрона ε , найти решение этой системы уравнений в линейном приближении по параметру вырождения. Согласно этому методу, решение находится в два этапа. Вначале определяется энергетическая зависимость функции $\mathbf{Q}(\varepsilon)$. После чего система интегральных уравнений (14), (15) и (18) может быть сведена к системе трех алгебраических уравнений.

На первом этапе разложим функцию $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ в бесконечный ряд по степеням параметра $(\varepsilon - \xi)$

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \mathbf{Q}(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \xi)^n}{n!} \mathbf{Q}^{(n)}(\xi),$$

$$\mathbf{Q}^{(n)}(\xi) = \left(\frac{d^n \mathbf{Q}(\varepsilon)}{d\varepsilon^n} \right)_{\varepsilon=\xi}. \quad (20)$$

Используя интегральное уравнение (15), вычислим производные $\mathbf{Q}^{(n)}(\xi)$ и ограничимся учетом членов, линейных по параметру $(k_B T / \xi)$, а членами квадратичными по этому параметру пренебрежем. Как показано в [12], фактическим параметром энергетического разложения (20) является величина $\eta = (\varepsilon - \xi) / k_B T$. Для ряда (20) строгое неравенство $|\eta| \ll 1$ не выполняется, поэтому нельзя ограничиться учетом конечного числа членов. Суммирование бесконечных рядов приводит к результату [12]

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \mathbf{Q}(\xi) + k_B T \Phi^{(1)}(\xi) \left\{ \eta \mathbf{K}^>(\xi) \right. \\ \left. - f_1(\eta) \chi(\xi) - f_2(\eta) \tau_F (-k_B \nabla T) \right\}, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{K}^>(\xi) = \int_\xi^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \chi(\varepsilon),$$

$$f_1(\eta) = \ln(\text{sh}(\eta/2)), \quad f_2(\eta) = \eta f_1(\eta) - 2 \int_0^\eta d\eta' f_1(\eta').$$

Ограничиваясь линейным приближением по $(k_B T / \xi)$, разложим функцию $\Phi(\varepsilon) - \Phi(\xi) \approx (\varepsilon - \xi) \Phi^{(1)}(\xi)$ в ряд и перепишем уравнение (15) в следующем виде:

$$\mathbf{Q}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) \Phi(\varepsilon) \tilde{m}(\varepsilon) \chi(\varepsilon) \\ - \Phi(\xi) D_\Phi \int_0^\infty d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) \eta \tilde{m}(\varepsilon) \chi(\varepsilon), \quad (22)$$

где

$$\varepsilon = \xi + \eta k_B T, \quad \text{а} \quad D_\Phi = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln(\Phi(\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=\xi}.$$

Для нахождения функций $\mathbf{Q}(\xi)$, \mathbf{u} и $\Lambda(\xi)$ в первом порядке по параметру вырождения подставим (21) в (14), (18) и (22) и выполним интегрирование по параметру η . В результате получим систему трех алгебраических уравнений для искомых функций, решение которой существенно упрощается, если воспользоваться вспомогательным вектором \mathbf{F} . В нулевом порядке по параметру

вырождения имеем

$$\mathbf{u} = \frac{1}{m_F v_F} \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{Q}_0(\xi) = \Gamma_R \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{\Lambda}_0(\xi) = e K_R \mathbf{F}_0,$$

$$K_R = \frac{v_F}{v_{eR}(\xi)} K, \quad \Gamma_R = \frac{v_F}{v_{eR}(\xi)} \Gamma,$$

$$\mathbf{F}_0 = -e \frac{v_F \mathbf{E}_A}{v_{eR}(\xi)(1 - \Gamma_R - K_R)} = -e \frac{v_F \mathbf{E}_A}{\tilde{v}_{eR}(\xi)},$$

$$\tilde{v}_{eR}(\xi) = v_{eR}(\xi)(1 - \Gamma_R - K_R). \quad (23)$$

Здесь $\tilde{v}_{eR}(\xi) = (\tilde{\tau}_{eR}(\xi))^{-1}$ — эффективная частота релаксации импульса электронов. Как видно из (23), дрейф фононной подсистемы, связанный с нормальными процессами рассеяния, усиливает взаимное увлечение электронов и фононов и приводит к уменьшению эффективной частоты релаксации импульса электронов. Параметры K и K_R характеризуют влияние неравновесности электронов на электроны через дрейфующую систему фононов. Очевидно, что выражения для этих параметров различны для вариантов релаксации Херринга и Саймонса (см. (17)). Параметры $\Gamma = \tau_F / \tau_{e-ph-e}$ и $\Gamma_R = \Gamma \tau_{eR} / \tau_F$ определяют влияние неравновесности электронов на электроны через систему фононов, движущуюся диффузионным способом. Параметр Γ_R равен отношению резистивного времени релаксации τ_{eR} к времени τ_{e-ph-e} , в течение которого импульс, переданный электронами фононам, возвращается обратно в электронную систему.

В первом порядке по параметру вырождения решение системы уравнений для функций \mathbf{u} , $\mathbf{\Lambda}(\varepsilon)$ и $\mathbf{Q}(\xi)$ также выражается через вектор \mathbf{F}

$$\mathbf{u} = \frac{1}{m_F v_F} \{ \mathbf{F}(1 - J_1 \Gamma D_\Phi) - e \Delta_n \},$$

$$\mathbf{\Lambda}(\xi) = K(\xi) \{ \mathbf{F}(1 - J_1 \Gamma D_\Phi) \} - e \Delta_\Lambda,$$

$$\mathbf{Q}(\xi) = \Gamma \{ \mathbf{F} [1 - D_\Phi (J_1 \Gamma - \ln(2))] - e \Delta_Q \},$$

$$\Delta_Q = \frac{k_B \pi^2}{e} D_Q \nabla T, \quad (24)$$

$$\mathbf{F} = -e \frac{v_F}{v_{eR}} (\mathbf{E}_A + e \Delta_F) \left\{ 1 - \Gamma_R - K_R + \Gamma_R D_\Phi \left(J_1 \frac{v_{eeN}(\xi)}{v_F} + \Gamma + K(\xi) + \ln 2 \right) \right\}^{-1},$$

$$\Delta_F = \frac{v_{eeN}(\xi)}{v_F} \Delta_N + \Gamma \Delta_Q + \Delta_\Lambda,$$

$$D_Q = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln(m(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \Phi^{1/2}(\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=\xi}, \quad (25)$$

где

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) f_1(\eta) \cong 0.31, \quad C_1 = J_1 + \ln(2) \approx 1.$$

Выражения (24), (25) позволяют исследовать случай полного взаимного увлечения электронов и фононов: когда скорости дрейфа электронов и фононов настолько близки друг другу, что выполняется неравенство $1 - \Gamma_R - K_R \ll (k_B T / \xi)$. В этом случае ток проводимости будет определяться главным образом взаимным увлечением электронов и фононов. Детальный анализ этой асимптотики требует отдельного рассмотрения. Для более реалистического случая $(k_B T / \xi) \ll 1 - \Gamma_R - K_R$, который и будет рассмотрен далее, разложив знаменатель (25) по малому параметру, найдем

$$\mathbf{F} = \frac{-e v_F}{\tilde{v}_{eR}(\xi)} \left\{ \mathbf{E}_A \left(1 - \frac{C_1 \Gamma_R D_\Phi}{(1 - \Gamma_R - K_R)} \right) + \Delta_F \right\}. \quad (26)$$

Для вычисления потока тепла достаточно вычислить функцию $\mathbf{K}^>(\xi)$ в нулевом порядке по параметру вырождения

$$\mathbf{K}^>(\xi) = -\frac{e}{2v_{eR}} \left\{ \mathbf{E}_A (1 - \Gamma_R - K_R)^{-1} + \frac{k_B v_{eR}}{e v_F} 2 \ln(2) \nabla T \right\}. \quad (27)$$

Подстановка выражений (24)–(26) в (21) и в (18) даст величины $\mathbf{\Lambda}(\varepsilon)$, \mathbf{u} и $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ и, следовательно, из формулы (14) — функцию $\chi(\varepsilon)$. Это решение позволяет вычислить ток проводимости, электронный поток тепла и проанализировать влияние N -процессов рассеяния квазичастиц на кинетические коэффициенты проводников с вырожденной статистикой носителей тока как в случае слабого, так и сильного взаимного увлечения электронов и фононов.

3. Вычисление электропроводности и термоэдс

Вычислим ток проводимости \mathbf{j} , разбив его на четыре части, пропорциональные неравновесным добавкам к функции распределения электронов

$$\mathbf{j} = -\frac{e n_e}{m_F} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tilde{k}^3}{\tilde{m}(\varepsilon)} \chi(\varepsilon)$$

$$= \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_u + \mathbf{j}_\Lambda + \mathbf{j}_Q. \quad (28)$$

Подставив выражения (24)–(26), (21) в (14) и затем в (28), получим

$$\mathbf{j} = \sigma_{0F} \left\{ \mathbf{E}_A + \frac{k_B \pi^2}{e} \frac{1}{3} \cdot D_j \cdot \nabla T - \frac{1}{e} [m_F v_{eeN}(\xi) \mathbf{u} + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}(\xi)] \right\}. \quad (29)$$

Здесь

$$\sigma_{0F} = \frac{e^2 n_e \cdot \tau_F}{m_F}, \quad D_j = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln \left(\frac{k^3(\varepsilon) \tau(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} \right) \right]_{\varepsilon=\xi}.$$

Первые два члена в фигурной скобке дают ток \mathbf{j}_1 . Учет нормальных процессов рассеяния усиливает эффект увлечения электронов фононами за счет дрейфа фононов и связанной с ним перенормировкой частоты релаксации фононов, входящей в величину $\tilde{A}_{ph}(\xi)$ (см. (16)). Первое слагаемое в квадратной скобке связано с дрейфом электронов благодаря N -процессам электрон-электронного рассеяния. Член, пропорциональный Λ , определяет ток \mathbf{j}_Λ , обусловленный влиянием неравновесности электронов на электроны через дрейфующую систему фононов. Последнее слагаемое в квадратных скобках определяет ток взаимного увлечения. Подстановка формул (24) в (29) дает ток проводимости, из которого следуют выражения для кинетических коэффициентов σ_{xx} и β_{xx}

$$\sigma_{xx} = \tilde{\sigma}_{0R} \left\{ 1 - \frac{\Gamma_R D_\Phi C_1}{(1 - \Gamma_R - K_R)} \right\}, \quad \tilde{\sigma}_{0R} = \frac{e^2 n_e \tilde{\tau}_{eR}}{m_F},$$

$$\beta_{xx} = -\frac{k_B}{e} \left\{ \sigma_{xx} \tilde{A}_{ph}(\xi) + \frac{\pi^2}{3} \tilde{\sigma}_{0R} \left[(1 - \Gamma_R - K_R) \times \frac{v_{eR}(\xi)}{v_F} D_j + \Gamma D_Q + \frac{v_{eeN}(\xi)}{v_F} D_N + \sum_\lambda K^\lambda D_{eph}^\lambda \right] \right\}. \quad (30)$$

Рассмотрим более подробно перенормировку частоты релаксации электронов, связанную с дрейфом фононной системы,

$$\tilde{v}_{eR}(\xi) = v_{eR}(\xi)(1 - \Gamma_R - K_R) = v_{eR}(\xi) - \sum_\lambda \left\{ \left\langle \frac{v_{phe}^\lambda(k_F, q) \cdot v_{eph}^\lambda(k_F, q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle_{z_{2k}^\lambda} - \psi_{ephN}^\lambda \beta_{pheN}^{(H,S)} \right\}. \quad (31)$$

При $v_{phN}(q) \ll v_{phR}(q)$ главную роль в перенормировке частоты релаксации электронов играет параметр Γ_R , а вклад, связанный с дрейфом фононов, мал ($K_R \ll \Gamma_R$). При выполнении противоположного неравенства $v_{phN}(q) \gg v_{phR}(q)$ дрейф фононов в достаточно чистых проводниках может привести к существенному уменьшению эффективной частоты релаксации электронов на фононах и изменению температурной зависимости подвижности носителей тока. Причем эта перенормировка зависит от характера релаксации импульса фононов в N -процессах

$$\tilde{v}_{eR}^{(H,S)}(\xi) = v_{eR} + v_{eeU} + \tilde{v}_{eph}^{(H,S)},$$

$$\tilde{v}_{eph}^{(S)} = \sum_\lambda \langle v_{eph}^\lambda(k_F, q) \rangle \left(1 - \frac{\langle v_{phe}^\lambda(q) \rangle}{\langle v_{phR}^\lambda(q) \rangle} \right),$$

$$\tilde{v}_{eph}^{(H)} = \sum_\lambda \langle v_{eph}^\lambda(k_F, q) \rangle \left(1 - \frac{\langle v_{phe}^L(q) \rangle + 2S_*^5 \langle v_{phe}^t(q) \rangle}{\langle v_{phR}^L(q) \rangle + 2S_*^5 \langle v_{phR}^t(q) \rangle} \right). \quad (32)$$

Как видно из (31) и (32), учет дрейфа фононной подсистемы приводит к увеличению импульса, передаваемого электронам фононами. Это усиливает эффект взаимного

увлечения электронов и фононов в электропроводности и обуславливает перенормировку частоты релаксации фононов N -процессами в термоэлектрическом коэффициенте β_{xx} . Линейная по параметру вырождения добавка в электропроводности обусловлена взаимным увлечением электронов и фононов.

Рассмотрим влияние N -процессов рассеяния квазичастиц на термоэлектродвижущую силу полупроводников с вырожденной статистикой носителей тока. Из условия $j = 0$ найдем

$$\alpha = -\frac{k_B}{e} \left\{ \tilde{A}_{ph}(\xi) + \frac{\pi^2}{3} \left[(1 - \Gamma_R - K_R) \frac{v_{eR}(\xi)}{v_F} D_j + \Gamma D_Q + \frac{v_{eeN}(\xi)}{v_F} D_N + D_\Lambda \right] \right\} = \alpha_{ph} + \alpha_{dif}. \quad (33)$$

Как видно из (29), в диффузионную компоненту термоэдс вносят вклад как N -процессы электрон-электронного (D_N), так и фонон-фононного рассеяния (D_Λ). Наиболее существенно N -процессы рассеяния фононов сказываются на термоэдс увлечения. В предельном случае $v_{phN}(q) \ll v_{phR}(q)$ ($v_{ph}(q) \approx v_{phR}(q)$) величина $\tilde{A}_{ph}(\xi) = A_{ph}(\xi)$, и можно пользоваться выражением для термоэдс увлечения, полученным ранее в рамках однопараметрического приближения [1–12]. При $v_{phN}(q) \gg v_{phR}(q)$ нормальные процессы фонон-фононного рассеяния и связанный с ним дрейф фононной системы могут приводить к значительному увеличению абсолютных значений термоэдс увлечения. Отметим, что фононная компонента термоэдс α_{ph} определяется не полной частотой релаксации фононов $v_{ph}^\lambda(q)$ (как это считалось ранее [1–12]), а перенормированной N -процессами частотой релаксации импульса фононов (10). В отличие от работы [20] мы показали, что эта перенормировка и соответственно α_{ph} определяются различными выражениями для внутриветвевое (механизм Саймонса) и межветвевое (механизм Херринга) вариантов перераспределения импульса фононов в N -процессах

$$\alpha_{ph}^{(S,H)} = -\frac{k_B}{e} \sum_\lambda \frac{m_F S_\lambda^2}{k_B T} \times \int_0^{z_{2k}^\lambda} dz_q^\lambda \frac{v_{eph}^\lambda(k_F, q)}{v_{ph}^\lambda(q)} \left(1 + v_{phN}(q) \beta_{1\lambda}^{(S,H)} \right). \quad (34)$$

Это наиболее существенный результат данной работы, который имеет важное практическое значение. Дело в том, что при интерпретации экспериментальных данных по термоэдс увлечения в работах, выполненных в однопараметрическом приближении (см. [1–12, 24] и ссылки на них), частоты релаксации фононов в N -процессах включались в полную частоту $v_{ph}^\lambda(q)$ в качестве резистивного механизма рассеяния фононов, а при $v_{phN}(q) \gg v_{phR}(q)$ они рассматривались в качестве единственного механизма релаксации импульса длинноволновых фононов [2–5]. Однако из выражения (34)

следует, что в этом предельном случае частота релаксации $\nu_{phN}(q)$ выпадает из термоэдс увлечения, и α_{ph} полностью определяется усредненной по частотам резистивной частотой релаксации фононов

$$\alpha_{ph}^{(S,H)} = -\frac{k_B}{e} \sum_{\lambda} \frac{m_F s_{\lambda}^2}{k_B T} \int_0^{z_{\lambda}^k} dz_{\lambda} \frac{\langle \nu_{eph}^{\lambda}(k_F, q) \rangle}{\langle \nu_{phR}(q) \rangle_{z_{\lambda}^k}^{(S,H)}},$$

$$\langle \nu_{phR}(q) \rangle^{(S)} = \langle \nu_{phR}^{\lambda} \rangle / J_{\lambda}^{(4)},$$

$$\langle \nu_{phR}(q) \rangle^{(H)} = \frac{\langle \nu_{phR}^L \rangle + 2S_*^5 \langle \nu_{phR}^t \rangle}{J_L^{(4)} + 2S_*^3 J_t^{(4)}},$$

$$J_{\lambda}^{(4)} = \int_0^{z_{\lambda}^k} \frac{dz \cdot z^4 \exp(z)}{(\exp(z) - 1)^2}. \quad (34a)$$

Поэтому при интерпретации экспериментальных данных необходимо учитывать дрейф фононной системы и пользоваться выражениями (33) и (34), а выводы, полученные ранее относительно температурных и полевых зависимостей термоэдс увлечения [1–12], нуждаются в уточнении.

4. Расчет электронного и фононного потоков тепла и анализ соотношений Онзагера

Для вычисления электронного потока тепла \mathbf{W}_e

$$\mathbf{W}_e = \frac{n_e}{m_F} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) (\varepsilon - \xi) \frac{\tilde{k}^3}{\tilde{m}(\varepsilon)} \chi(\varepsilon) \quad (35)$$

подставим (21), (24)–(27) в (14), а затем в (35) и, выполнив интегрирование по параметру ε , в линейном приближении по $(k_B T / \xi)$ получим

$$\mathbf{W}_e = -L_0 T \sigma_{0F} \left\{ \frac{e}{k_B} \left[\mathbf{E} D_j + \frac{\mathbf{E}_A}{1 - \Gamma_R - K_R} \right] \times \left(\frac{\nu_{eeN}(\xi)}{\nu_{eR}} D_N + \sum_{\lambda} K_R^{\lambda} D_{eph}^{\lambda} + D_Q \Gamma_R \right) \right\} + \left[1 + \tilde{A}_{ph}(\xi) D_A + \Gamma \cdot D_{\phi} C_2 \right] \nabla T, \quad (36)$$

где

$$L_0 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2, \quad C_2 = \ln(2) - \frac{3}{\pi^2} J_3 \cong 0.577,$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) \eta f_2(\eta) \cong 0.381,$$

$$D_a = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln(m(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \tilde{A}_{ph}(\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=\xi}.$$

Сравнив (30) и (36), убеждаемся в том, что соотношения Онзагера для термоэлектрических коэффициентов в потоках тепла \mathbf{W}_e и заряда \mathbf{j} не выполняются. Как показано в [12], необходимо учесть поток тепла, переносимый фононами, но обусловленный неравновесностью электронов.

Фононный поток тепла состоит из трех частей

$$\mathbf{W}_{ph} = \frac{1}{V} \sum_{q\lambda} \hbar \omega_{q\lambda} \mathbf{v}_q^{\lambda} \left(g_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{q}) + g_{\Delta u \lambda}(\mathbf{q}) + g_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q}) \right) = \mathbf{W}_{ph1} + \mathbf{W}_{\Delta u} + \mathbf{W}_{phe}. \quad (37)$$

Поток тепла \mathbf{W}_{ph} обусловлен как диффузионным, так и дрейфовым движением фононов под действием градиента температуры. Учет N -процессов фонон-фононного рассеяния, как и в теории Каллавея [13], сводится к перенормировке частоты релаксации импульса фононов

$$\mathbf{W}_{ph} = -\tilde{\kappa}_{ph} \nabla T,$$

$$\tilde{\kappa}_{ph}^{(H,S)} = \sum_{\lambda} \frac{k_B s_{\lambda}^2 q_{T\lambda}^3}{6\pi^2} \int_0^{z_{\lambda}^k} dz_{\lambda} \frac{(z_{\lambda}^k)^4}{\tilde{\nu}_{ph}^{\lambda(H,S)}(q)} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1). \quad (38)$$

Новым результатом данной работы является корректное обобщение теории Каллавея [13] на предмет разделения вкладов поперечных и продольных фононов и учет как внутриветвевое (механизм Саймонса), так и межветвевое (механизм Херринга) перераспределения импульса фононов в N -процессах фонон-фононного рассеяния. Этот результат имеет важное практическое значение для интерпретации экспериментальных данных решеточной теплопроводности изотопически обогащенных кристаллах германия, кремния и алмаза, где N -процессы рассеяния играют важную роль в релаксации импульса фононов [25–27]. Дело в том, что в теоретических расчетах, теплопроводности этих систем использовалась обобщенная модель Каллавея [25], в которой предполагалось, что релаксация импульса фононов каждой из ветвей фононного спектра происходит независимо. Таким образом, эта модель соответствует механизму релаксации Саймонса [22]. Некорректность этого подхода заключается в том, что в действительности в этих системах в N -процессах релаксации фононов доминирует механизм Херринга, приводящий к перераспределению импульса фононов между различными колебательными ветвями фононов. В этом случае дрейфовый вклад в теплопроводность имеет иной вид, чем для механизма Саймонса (см. (11), (13)), и при интерпретации экспериментальных данных [25–27] необходимо учитывать полученные в данной работе результаты.

Потоки тепла $\mathbf{W}_{\Delta u}$ и \mathbf{W}_{phe} обусловлены влиянием неравновесных электронов на дрейфовое и диффузионное движение фононов. Выражения для этих потоков имеют

вид

$$\mathbf{W}_{\Delta u} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} s_{\lambda}^2 \hbar \mathbf{q} g_{\Delta u \lambda}(\mathbf{q}) = \frac{k_B T}{m_F} \sum_{\lambda} \frac{(qT\lambda)^3 \Psi_N^{\lambda}}{6\pi^2} \times \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \beta_{phe}^{(H,S)}(\varepsilon) \chi(\varepsilon), \quad (39)$$

$$\mathbf{W}_{phe} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} s_{\lambda}^2 \hbar \mathbf{q} g_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q}) = \frac{k_B T n}{m_F} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) A_{ph}(\varepsilon) \chi(\varepsilon). \quad (40)$$

Неравновесность электронной системы связана не только с действием электрического поля и градиента температуры, но и также с эффектом увлечения электронов фононами. Поэтому в потоки (39) и (40) вносят вклад как неравновесность электронов, так и результат влияния неравновесности фононов на фононы через подсистему электронов. Эти потоки вносят вклад и в электронный, и в фононный потоки тепла. Расчет этих потоков дает

$$\mathbf{W}_{phe} + \mathbf{W}_{\Delta u} = \frac{k_B}{e} T \tilde{A}_{ph}(\xi) \left\{ \sigma_{xx} \mathbf{E}_A + \frac{k_B}{e} \frac{\pi^2}{3} \tilde{\sigma}_{0R} \times \left[(1 - \Gamma_R - K_R) \frac{v_{eR}}{v_F} D_A + \frac{v_{eeN}}{v_F} D_N + \Gamma D_Q + D_{\Lambda} \right] \nabla T \right\}. \quad (41)$$

Как и при анализе потока \mathbf{W}_{phe} , проведенного в [19–20], дрейфовую и диффузионную компоненты потока тепла (41), обусловленные неравновесностью электронов, включим в полный электронный поток тепла

$$W_{etx} = \gamma_{xx} E_x - \kappa_{xx}^e \nabla_x T. \quad (42)$$

Слагаемые, пропорциональные $(\tilde{A}_{ph}(\xi))^2 \nabla T$, в формуле (41), связанные с влиянием неравновесности фононов на фононы через электроны проводимости, вносят вклад в фононный поток тепла. В результате такого разделения выражения для кинетических коэффициентов могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= T \beta_{xx}, \\ \kappa_{phxx} &= \tilde{\kappa}_{ph} + \frac{3}{\pi^2} L_0 T \sigma_{xx} (\tilde{A}_{ph}(\xi))^2, \\ \kappa_{xx} &= L_0 \sigma_0 T \left\{ 1 + D_{\Phi} \Gamma C_2 + 2 \tilde{A}_{ph}(\xi) D_A + \frac{2 \tilde{A}_{ph}(\xi)}{1 - \Gamma_R - K_R} \cdot \left[\Gamma_R D_Q + \frac{v_{eeN}(\xi)}{v_F(\xi)} D_N + D_{\Lambda} \right] \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

где β_{xx} определяется выражением (30). Итак, из непосредственного расчета мы убедились, что соотношения Онзагера для термоэлектрических коэффициентов β_{xx} и γ_{xx} , вычисленных в линейном приближении по параметру вырождения с учетом N -процессов рассеяния квазичастиц, выполняется. Заметим, что соотношения Онзаге-

ра являются следствием законов термодинамики необратимых процессов, и они обязаны выполняться всегда. Однако при решении системы кинетических уравнений и вычисления кинетических коэффициентов делается ряд приближений, которые могут приводить к нарушению этих соотношений. Выполнение этих соотношений для вычисленных нами кинетических коэффициентов означает, что мы корректно учли как влияние неравновесности электронов на электроны через подсистему фононов, так и влияние неравновесности фононов на фононы через электроны проводимости.

Электронная теплопроводность обычно находится при условии $j = 0$. В этом случае из выражений (43), (30) и (33) находим

$$\begin{aligned} \kappa_e &= \kappa_{xx} - T \beta_{xx} \alpha = L_0 \sigma_0 T \left\{ 1 + D_{\Phi} \Gamma C_2 + 2 \tilde{A}_{ph}(\xi) (D_A - D_j) - \frac{3}{\pi^2} (\tilde{A}_{ph}(\xi))^2 \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0} \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

Заметим, что в полной теплопроводности $\kappa = \kappa_{ph} + \kappa_e$ вклад электрон-фононного увлечения, пропорциональный $(\tilde{A}_{ph}(\xi))^2$, взаимно сокращается

$$\kappa = \tilde{\kappa}_{ph}^0 + L_0 \sigma_0 T \left\{ 1 + C_2 \Gamma D_{\Phi} + 2 \tilde{A}_{ph}(\xi) (D_A - D_j) \right\}. \quad (45)$$

Как видно из сравнения выражений (30) и (44), соотношение Видемана–Франца не выполняется. Эффект увлечения электронов фононами $(\tilde{A}_{ph}(\xi))$ и их взаимное увлечение (Γ), связанные с неупругостью электрон-фононного рассеяния, а также нормальные процессы рассеяния квазичастиц приводят к уменьшению эффективного Лоренц-фактора $L^* = L/L_0$. Пренебрегая членами, пропорциональными параметру вырождения получим

$$L^* = \frac{\kappa_e}{L_0 T \sigma_{xx}} = \frac{v_{eR}}{v_F} \left\{ 1 - \Gamma_R - K_R - \frac{3}{\pi^2} (\tilde{A}_{ph}(\xi))^2 \right\}. \quad (46)$$

Очевидно, что увлечение электронов фононами, их взаимное увлечение, а также вклад нормальных процессов рассеяния квазичастиц могут приводить к значительному уменьшению Лоренц-фактора L^* и должны учитываться при интерпретации экспериментальных данных.

Итак, в данной работе решена система кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения с учетом нормальных процессов электрон-электронного и фонон-фононного рассеяния для полупроводников с вырожденной статистикой носителей тока. Вычислены кинетические коэффициенты в линейном приближении по параметру вырождения. Проанализирована роль взаимного увлечения электронов и фононов, а также нормальных процессов рассеяния квазичастиц в электросопротивлении, термоэдс, теплопроводности. Описание неравновесной электрон-фононной системы в рамках трехпараметрического приближения позволило более корректно рассмотреть кинетические эффекты в полупроводниках. Показано, что в условиях, когда частота релаксации фононов в N -процессах значительно превосходит резистивную частоту, дрейф фононной си-

стемы, обусловленной N -процессами, приводит к усилению эффекта взаимного увлечения в электропроводности и к значительному увеличению фоновой компоненты термоэдс. В этом случае термоэдс увлечения определяется не частотой релаксации фононов в N -процессах рассеяния [1–12], а усредненной по частотам резистивной частотой релаксации фононов. Поэтому результаты ранее проведенных исследований термоэдс увлечения в полупроводниках [1–12] нуждаются в уточнении, связанном с корректным учетом N -процессов рассеяния. Следует отметить, что прямое включение N -процессов рассеяния в резистивную частоту релаксации импульса фононов и тем более рассмотрение N -процессов в качестве единственного резистивного механизма релаксации импульса фононов является ошибочным.

Нами показано, что перенормировка эффективной частоты релаксации фононов N -процессами фонов-фононного рассеяния имеет различный характер для случаев, когда N -процессы перераспределяют импульс фононов внутри каждой колебательной ветви (механизм Саймонса) или перераспределение импульса фононов происходит между различными колебательными ветвями (механизм Херринга). Поэтому вклад дрейфового движения фононов как в теплопроводность, так и в термоэдс увлечения имеет различный вид для механизмов Херринга и Саймонса, и при обработке экспериментальных данных необходимо учитывать это различие.

В дальнейшем мы планируем применить развитую в данной работе теорию к анализу решеточной теплопроводности и термоэдс в полупроводниковых системах с изотопическим беспорядком. В изотопически обогащенных образцах Ge, Si и синтетических алмазах резистивные процессы релаксации фононов при достаточных низких температурах оказываются в значительной степени выморженными, и критическую роль в релаксации импульса фононов играют N -процессы рассеяния [25–27].

В данной работе последовательно учтены эффекты, связанные с влиянием нормальных процессов рассеяния квазичастиц на взаимное увлечение электронов и фононов и кинетические эффекты в полупроводниках. Однако неупругость электрон-фононных столкновений учитывалась только при расчете интеграла столкновений $I_{eph}(f_0, g_\lambda(\mathbf{q}))$, а интеграл столкновений $I_{eph}(\delta f_{\mathbf{k}}, N_{q\lambda}^0)$ в приближении упругого рассеяния выражен через частоту релаксации. Это приближение является вполне удовлетворительным для вычисления электросопротивления. Для расчета теплосопротивления при низких температурах такое приближение является недостаточным [15]. Поскольку при температурах $T \ll \Theta_d$ вертикальные переходы электронов [15] с малой передачей импульса в электрон-фононных столкновениях являются эффективным механизмом теплосопротивления, для его расчета необходимо также учитывать неупругость рассеяния и в интеграле столкновений $I_{eph}(\delta f_{\mathbf{k}}, N_{q\lambda}^0)$.

Нерешенными задачами теории электрон-фононного увлечения в вырожденных полупроводниках остаются:

1) исследование влияния неупругости электрон-фононного рассеяния на взаимное увлечение электронов и фононов; 2) исследование N -процессов рассеяния в полуметаллах с двумя типами носителей тока. Можно надеяться, что метод решения системы интегральных уравнений для неравновесных электрон-фононных систем, развитый в данной работе, будет полезен и при решении этих задач.

Список литературы

- [1] Л.Э. Гуревич. ЖЭТФ **16**, 3, 193 (1946); **16**, 5, 416 (1946).
- [2] А.И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников. Наука, М. (1978). 616 с.
- [3] В.М. Аскеров. Электронные явления переноса в полупроводниках. Наука, М. (1985). 318 с.
- [4] И.М. Цидильковский. Терромагнитные явления в полупроводниках. Наука, М. (1960). 296 с.
- [5] П.С. Зырянов, М.И. Клиггер. Квантовая теория явлений электронного переноса в кристаллических полупроводниках. Наука, М. (1976). 480 с.
- [6] Ф.Дж. Блат, П.А. Шредер, К.А. Фоилс, Д. Грейг. Термоэлектродвижущая сила металлов. Металлургия, М. (1980). 248 с.
- [7] J.E. Parrott. Proc. Phys. Soc. **B70**, 6, 590 (1957).
- [8] J. Appel. Zs. Naturforsch. **12a**, 5, 410 (1957); **13a**, 5, 386 (1958).
- [9] C. Herring. Phys. Rev. **96**, 4, 1163 (1954); **111**, 1, 36 (1958).
- [10] Л.Э. Гуревич, И.Я. Коренблит. ФТТ **6**, 3, 856 (1964).
- [11] И.Г. Ланг, С.Т. Павлов. ЖЭТФ **63**, 4(10), 1495 (1972).
- [12] И.Г. Кулеев. ФММ **87**, 6, 5 (1999).
- [13] J. Callaway. Phys. Rev. **113**, 4, 1046 (1959).
- [14] Р. Берман. Теплопроводность твердых тел. Мир, М. (1962). 288 с.
- [15] Дж. Займан. Электроны и фононы. ИЛ, М. (1962). 488 с.
- [16] Б.М. Могилевский, А.Ф. Чудновский. Теплопроводность полупроводников. Наука, М. (1972). 536 с.
- [17] В.Ф. Гантмахер, И.В. Левинсон. Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках. Наука, М. (1984). 350 с.
- [18] M. Kaveh, N. Wiser. Advances in Physics **33**, 257 (1984).
- [19] И.Г. Кулеев. ФММ **90**, 1, 14 (2000); **90**, 6, 18 (2000).
- [20] И.Г. Кулеев. ФТТ **42**, 11, 1952 (2000).
- [21] А.Н. Уилсон. The Theory of Metals. Cambridge (1954). 346 p.
- [22] S. Simons. Proc. Phys. Soc. **82**, 2, 401 (1963); **83**, 3, 799 (1963).
- [23] C. Herring. Phys. Rev. **95**, 4, 954 (1954).
- [24] Х.М. Биккин, А.Т. Лончаков, И.И. Ляпилин. ФТТ **42**, 2, 202 (2000).
- [25] M. Asen-Palmer, K. Bartkowski, E. Gmelin, M. Cardona, A.P. Zhernov, A.V. Inyushkin, A.N. Taldenkov, V.I. Ozhogin, K.M. Itoh, E.E. Haller. Phys. Rev. **B56**, 15, 9431 (1997).
- [26] J.R. Olson, R.O. Phol, J.W. Vandersande, A. Zolten, T.R. Anthony, W.F. Banholzer. Phys. Rev. **B47**, 22, 14850 (1993).
- [27] T. Ruf, R.W. Henn, M. Asen-Palmer, E. Gmelin, M. Cardona, H.-J. Pohl, G.G. Devyatych, P.G. Sennikov. Solid State Commun. **115**, 1, 243 (2000).