

Возникновение регулярных и хаотических временных структур экситонов, фотонов и биэкситонов в прямозонных полупроводниках

© В.З. Трончу, К.В. Шура*, А.Х. Ротару*

Department of Physics, University of Durham,
Durham DH1 3LE, United Kingdom

* Государственный университет Молдавии,
MD-2009 Кишинев, Молдавия

E-mail: V.Z.Tronciu@durham.ac.uk

(Поступила в Редакцию 18 мая 2001 г.)

Изучены динамические свойства экситонов и биэкситонов в кольцевом резонаторе. Нелинейность обусловлена процессом прямого связывания двух экситонов в биэкситон за счет их кулоновского взаимодействия. Проведен бифуркационный анализ с выявлением точек бифуркаций Хопфа и удвоения периода. Описано влияние добротности резонатора на времена переключения. Обсуждается возможность экспериментального наблюдения изучаемых явлений.

Один из авторов (В.З.Т.) выражает признательность Royal Society, при поддержке которого выполнена данная работа.

Особый интерес в последнее время представляет исследование процессов возникновения, регулирования и подавления хаотических самопульсаций. Интерес к этим явлениям, обусловленным экситонами и биэкситонами в конденсированных средах, связан с гигантскими оптическими нелинейностями на длинноволновом краю собственного поглощения кристалла, малыми временами релаксации, малыми энергиями и временами переключений. Все это открывает большие перспективы для изучения принципиально новых оптических явлений с участием экситонов и биэкситонов, а также для их практического применения, главным образом для оптической обработки информации и создания на их основе нового поколения ЭВМ с оптической логикой.

В работах [1–3] нами изучены некоторые нелинейные явления в системе когерентных, в смысле Боголюбова, экситонов и биэкситонов при различных квантовых переходах. В частности, построена теория оптической бистабильности, регулярных и хаотических самопульсаций, индуцированных оптических фазовых переходов, одно- и двухфотонной стационарной лазерной генерации, возникновения диссипативных структур и динамического переходного оптического хаоса с образованием в фазовом пространстве системы странных аттракторов.

В [4,5] построена теория нелинейных и хаотических колебаний в случае, когда изучаемые экситон-фотон-биэкситонные системы являются гамильтоновыми и соответствующие эффекты проявляются на времена, меньших характерных времен релаксации.

Отметим, что изучаемые нами нелинейные кооперативные явления в системе когерентных фотонов, экситонов и биэкситонов исследовались лишь с учетом гигантской силы осциллятора экситон-биэкситонных переходов [6,7] в случае одно- и двухфотонного рождения биэкситона. Однако в работах [8–10] было показано, что существует другой нелинейный процесс, связанный с рождением биэкситона благодаря кулоновскому при-

тяжению двух экситонов. Учитывая этот принципиально новый механизм экситон-биэкситонной перестройки спектров полупроводника, определяющийся связыванием двух экситонов в биэкситон за счет их кулоновского взаимодействия, в [11] мы изучили стационарную оптическую бистабильность, стабильность стационарных состояний, определили времена оптических переключений между ветвями оптической бистабильности, показали возможность возникновения нелинейных периодических и хаотических самопульсаций. Между тем в указанной работе остался нерешенным ряд принципиальных вопросов. Так, например, не был строго установлен сценарий перехода в режим динамического хаоса системы, не были выявлены возможные динамические бифуркации, не были построены соответствующие бифуркационные диаграммы и не был получен и исследован спектр мощности возникающих колебаний.

Настоящая работа посвящена устранению этих недостатков и является логическим продолжением [11]. Здесь проведен бифуркационный анализ с выявлением точек бифуркации Хопфа и бифуркаций удвоения периода, найдены сценарий перехода к оптическому динамическому хаосу и возможности возникновения оптической турбулентности, определен спектр мощности нелинейных самопульсаций, изучено влияние добротности кольцевого резонатора на динамическую оптическую бистабильность в случае, когда внешняя накачка является функцией времени, имеющей параболический вид, а также обсуждается возможность экспериментального наблюдения изучаемых явлений.

1. Постановка задачи. Основные уравнения

Пусть на кольцевой резонатор (рис. 1), в который помещен полупроводник длиной L , падает монохроматическая когерентная электромагнитная волна, возбужда-

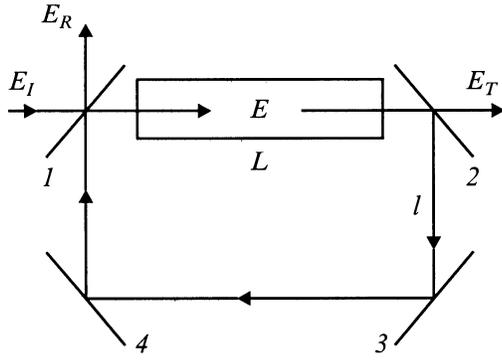


Рис. 1. Кольцевой резонатор: зеркала 1 и 2 с коэффициентом отражения R , зеркала 3 и 4 — 100%. Расстояние между зеркалами 1 и 2 — L , между 2 и 3 — l . E_I , E_R и E_T — амплитуды падающего, отраженного и прошедшего полей соответственно.

ющая когерентные экситоны. Согласно [8,10], эти экситоны благодаря кулоновскому взаимодействию могут связываться в биэкситон. Этот процесс, обеспечивающий нелинейность задачи, определяется членом $\frac{1}{\sqrt{V}}Db^+aa$. Граничные условия для кольцевого резонатора имеют вид

$$E(0, t) = \sqrt{T}E_I + RE(L, t - \Delta t)e^{iF}, \quad E_T = \sqrt{T}E(L, t),$$

где E_I — амплитуда поля на входе резонатора (накачка), E_T — амплитуда поля на выходе резонатора, $R = 1 - T$ — коэффициент отражения зеркал 1 и 2 резонаторов, $\Delta t = \frac{L+2l}{c_0}$ — время запаздывания, вносимого обратной связью, c_0 — скорость света в вакууме, $F = kL + k_0(2l + L)$ — набег фазы поля в резонаторе, k_0 — волновой вектор поля в вакууме.

Гамильтониан задачи состоит из суммы гамильтонианов свободных экситонов, биэкситонов и поля, а также гамильтониана взаимодействия когерентных экситонов с электромагнитным полем и с когерентными биэкситонами, который в принятой модели имеет вид

$$H_{\text{int}} = i\hbar g(aE^+ - a^+E) + i\hbar D(ba^+a^+ - b^+aa), \quad (1)$$

где a^+ (b^+) — оператор рождения экситона (биэкситона), g — константа экситон-фононного взаимодействия, D — константа прямого связывания двух экситонов в биэкситон, E^+ — положительно-частотная часть электрического поля электромагнитной волны. Здесь и далее предполагаем, что объем системы равен единице.

Уравнения движения для амплитуд экситонов a и биэкситонов b имеют вид

$$\frac{da}{dt} = -i\omega_{\text{ex}}a - gE + 2Dba^+ - \gamma_{\text{ex}}a, \quad (2)$$

$$\frac{db}{dt} = -i\omega_{\text{biex}}b - Daa - \gamma_{\text{biex}}b, \quad (3)$$

где $\hbar\omega_{\text{ex}}$ ($\hbar\omega_{\text{biex}}$) — энергия образования экситона (биэкситона), γ_{ex} и γ_{biex} — соответственно константы затухания экситонов и биэкситонов, определяющие скорость

ухода квазичастиц из когерентных мод в некогерентные. Последние были введены в уравнения движения феноменологически.

Уравнение движения компоненты электромагнитного поля E эквивалентно волновому уравнению

$$c_1^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = i4\pi\hbar g \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где c_1 — скорость распространения поля в полупроводнике.

Представим амплитуды экситонов, биэкситонов и поля в виде модулированных плоских волн

$$a(z, t) = A'(z, t)e^{i(kz - \omega t)}, \quad b(z, t) = B'(z, t)e^{2i(kz - \omega t)},$$

$$E(z, t) = E'(z, t)e^{i(kz - \omega t)}, \quad (5)$$

где ω и k — несущая частота и волновой вектор, $A'(z, t)$, $B'(z, t)$, $E'(z, t)$ суть медленноменяющиеся амплитуды.

В дальнейшем удобно перейти к безразмерным величинам. Введем в рассмотрение

$$X = \frac{E'}{E_a}; \quad B = \frac{B'}{B_a}; \quad A = \frac{A'}{A_a};$$

$$E_\delta = \frac{\gamma_{\text{biex}}^2}{gD}; \quad A_\delta = B_\delta = \frac{\gamma_{\text{biex}}}{D};$$

константу оптической бистабильности $C = \alpha L/4T$, $\alpha = 4\pi\hbar g^2 \omega^2 / c_1 k \gamma_{\text{ex}}$, T — коэффициент пропускания зеркал кольцевого резонатора (рис. 1); относительное затухание экситона по сравнению с биэкситоном $d = \gamma_{\text{ex}}/\gamma_{\text{biex}}$; приведенную энергию биэкситона $\delta_0 = (2\omega_{\text{ex}} - \omega_{\text{biex}})/\gamma_{\text{biex}}$; безразмерную отстройку от экситонного уровня $\delta_1 = (\omega - \omega_{\text{ex}})/\gamma_{\text{biex}}$; затухание электрической амплитуды поля в резонаторе (добротность резонатора) $\sigma = C_1^2 k T / L \gamma_{\text{biex}} \omega$; безразмерное время $\tau = \gamma_{\text{biex}} t$; $\Delta_1 = (\omega^2 - c_1^2 k^2) / 2\omega \gamma_{\text{biex}}$.

В приближении среднего поля [12,13] с учетом граничных условий получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую временную эволюцию когерентных фотонов, экситонов и биэкситонов,

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{d\tau} = & -\Delta_1 X_2 - \frac{\sigma(1 - R \cos F)}{T} X_1 \\ & - \frac{\sigma R \sin F}{T} X_2 + 2C\sigma A_1 + \sigma Y, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{d\tau} = & -\Delta_1 X_1 - \frac{\sigma(1 - R \cos F)}{T} X_2 \\ & - \frac{\sigma R \sin F}{T} X_1 + 2C\sigma A_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{dA_1}{d\tau} = -dA_1 - \delta_1 A_2 - X_1 + 2(B_1 A_1 + B_2 A_2), \quad (8)$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = -dA_2 - \delta_1 A_1 + X_2 + 2(B_2 A_1 + B_1 A_2), \quad (9)$$

$$\frac{dB_1}{d\tau} = -(2\delta_1 + \delta_0)B_2 - B_1 - A_1^2 + A_2^2, \quad (10)$$

$$\frac{dB_2}{d\tau} = -(2\delta_1 + \delta_0)B_1 - B_2 - 2A_1A_2, \quad (11)$$

где учитывалась комплексность величин X , A , B : $X_1 = \text{Re } X$, $X_2 = \text{Im } X$, $A_1 = \text{Re } A$, $A_2 = \text{Im } A$, $B_1 = \text{Re } B$, $B_2 = \text{Im } B$. Подробный вывод уравнений (6)–(11) представлен в работе [11].

Система нелинейных дифференциальных уравнений описывает динамику когерентных квазичастиц в шестимерном фазовом пространстве и является основой для изучения динамики когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов с учетом кулоновского связывания экситонов в биэкситон. Нахождение точных решений системы уравнений (6)–(11) является очень сложной, если вообще выполнимой задачей.

Тем не менее необходимо отметить, что эволюция решений системы уравнений (6)–(11) существенно зависит от эволюции малой области фазового пространства этой системы. Изменение элементарного шестимерного фазового объема V_0 , каждая точка которого движется в соответствии с (6)–(11), определяется уравнением

$$\frac{dV_0}{d\tau} = -2 \left[1 + d + \frac{\sigma(1 - R \cos F)}{T} \right] V_0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что шестимерный фазовый объем системы уравнений (6)–(11) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ с характерным временем, равным

$$\frac{1}{2} \left[1 + d + \frac{\sigma(1 - R \cos F)}{T} \right]^{-1},$$

$$V_0(\tau) = V_0(0) \exp \left\{ -2 \left[1 + d + \frac{\sigma(1 - R \cos F)}{T} \right] \tau \right\}. \quad (13)$$

Однако это не означает, что любой малый объем фазового пространства стягивается в точку. Он может растекаться по поверхности, при этом точки любого элемента фазового пространства притягиваются к некоторому подмножеству, размерность которого меньше, чем у исходного пространства.

Из (6)–(11) легко найти стационарные состояния системы, связывающие плотности когерентных экситонов и биэкситонов с интенсивностью электромагнитного поля, а также интенсивности поля на входе и выходе резонатора [11].

Если стационарные решения являются неустойчивыми, то в этом случае аттрактором в фазовом пространстве может быть либо предельный цикл, либо шар, либо странный аттрактор. Они соответствуют нелинейным периодическим, квазипериодическим и стохастическим автоколебаниям в системе.

2. Компьютерный эксперимент. Возможность возникновения периодических и хаотических временных структур

Выражения (6)–(11) относятся к классу нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих открытые динамические системы. Для таких урав-

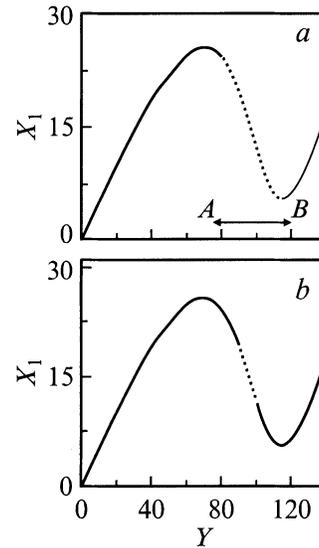


Рис. 2. Зависимость действительной части амплитуды прошедшего поля X_1 от амплитуды падающего поля Y при $\sigma = 1$ (а), 2 (б) и значениях параметров $C = 5$, $\delta_0 = 5$, $F = 2\pi n$, $\delta_1 = 10$. Пунктиром показаны неустойчивые стационарные состояния.

нений возможно несколько стационарных решений. Однако в зависимости от соотношения между параметрами системы не все стационарные состояния могут оказаться устойчивыми. Поэтому анализ решений уравнений (6)–(11) связан с решением вопроса об устойчивости стационарных состояний. В том случае, если часть кривой стационарного состояния является неустойчивой, в системе возникают нелинейные периодические или хаотические автоколебания.

Характеристическое уравнение системы (6)–(11) представляет собой алгебраическое уравнение шестого порядка и имеет вид

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a = 0, \quad (14)$$

где a_i суть постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы.

Уравнение (14) имеет шесть корней $\lambda_i = \text{Re } \lambda_i + i \text{Im } \lambda_i$. Таким образом, задача об устойчивости стационарных состояний сводится к оценке расположения корней на комплексной плоскости λ . В том случае, если все корни расположены в левой полуплоскости, стационарные состояния являются устойчивыми. В случае когда хотя бы один корень расположен в правой полуплоскости, стационарное состояние является неустойчивым. Используя критерий Раussa–Гурвица, можно показать, что при определенных значениях параметров часть стационарной кривой зависимости $X_1(Y)$ является неустойчивой. На рис. 2, в частности, представлена стационарная нелинейная зависимость действительной части амплитуды выходящего из резонатора излучения X_1 от падающего при значениях параметров $\sigma = 1$ (а) и 2 (б) и $\delta_0 = 5$, $c = 5$, $F = 2\pi n$, $\Lambda_1 = 0$, $\delta_1 = 10$. Как видно из рисунка, при этих значениях параметров

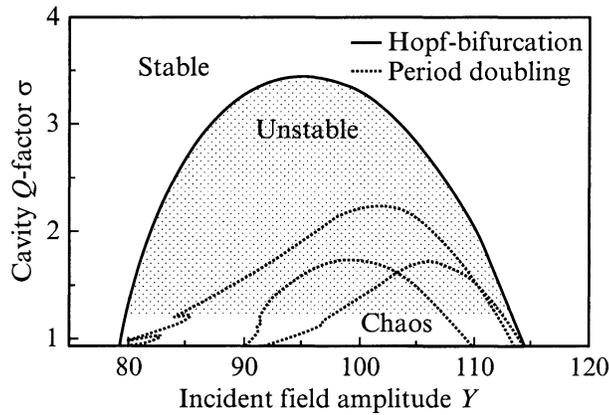


Рис. 3. Область автоколебаний в плоскости добротность резонатора σ –амплитуда падающего поля Y . Сплошной линии соответствуют точки бифуркации Хопфа. Бифуркации удвоения периода изображены пунктиром.

возникают окна нестабильностей, обозначенные пунктиром. Размер окон зависит от параметра σ . Точкам A и B соответствуют бифуркации Хопфа. Увеличение параметра σ приводит к слиянию точек бифуркации при $\sigma > \sigma_{cr} = 3.45$ и исчезновению окон нестабильностей.

На рис. 3 показаны области самопульсации в плоскости добротность резонатора–амплитуда падающего поля (σ – Y). Используя метод продолжения по параметру [14], получим линию бифуркации Хопфа ($\text{Re } \lambda = 0$); она является границей между стабильными и нестабильными стационарными состояниями системы. Заштрихованная часть рисунка является областью неустойчивости системы и возникновения нелинейных колебаний. Пунктирные линии обозначают области параметров, где в системе происходит удвоение периода колебаний. Таким образом, на границе раздела в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов возникают нелинейные периодические самопульсации и фазовая траектория представляет собой предельный цикл. По мере передвижения изображающей точки к центру окна нестабильности колебания становятся более сложными. Наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода с выходом на хаотический режим колебаний и возникновением странного аттрактора в фазовом пространстве. В отличие от лоренцевского странного аттрактора, связанного с перескоками между соответствующими состояниями равновесия, в нашем случае странный аттрактор возникает в результате сложного заполнения шестимерного фазового пространства непересекающимися фазовыми траекториями.

Отметим, что бифуркационные диаграммы являются важным инструментом для изучения динамических свойств нелинейных систем. Численный эксперимент указывает на возможность возникновения разнообразных режимов нелинейных колебаний в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в случае, когда нелинейность обусловлена связыванием двух экситонов в биэкситон. На рис. 4 представлены бифуркационные

диаграммы при различных значениях добротности резонатора. Для значения $\sigma = 3$ зависимость $\max X_1(Y)$ является однозначной функцией на протяжении всей области нестабильности (рис. 4, *a*). При значениях амплитуды падающего поля $Y < Y(HB_1)$ из рисунка видно, что стационарное состояние является устойчивым фокусом. Это означает, что выведенная из состояния равновесия система, совершив несколько колебаний, приходит к стационарному состоянию. При $Y = Y(HB_1) = 87$ фокус переходит из устойчивого состояния в неустойчивое. В области значений $Y(HB_1) < Y < Y(HB_2)$ в си-

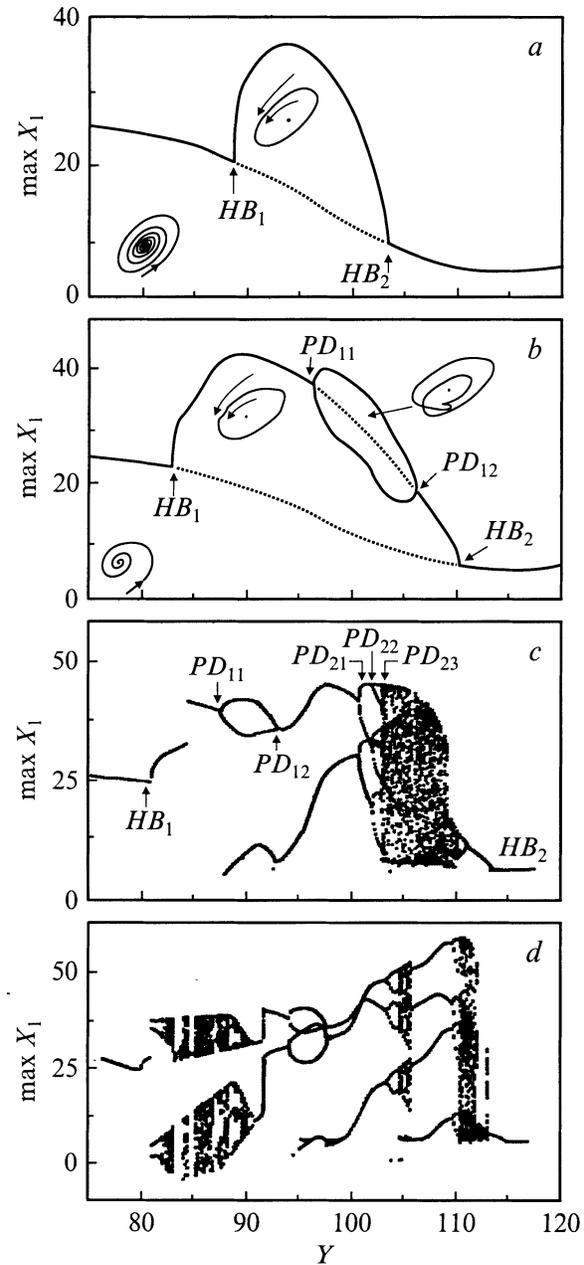


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы при значениях добротности резонатора $\sigma = 3$ (*a*), 2 (*b*), 1.4 (*c*) и 1 (*d*) и значениях параметров $C = 5$, $\delta_0 = 5$, $F = 2\pi n$, $\delta_1 = 10$, $d = 0.1$, $T = 0.01$, $\Delta_1 = 0$.

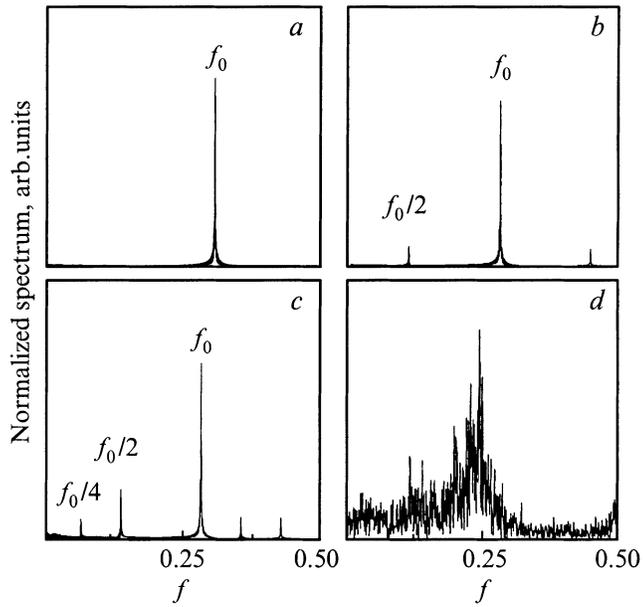


Рис. 5. Спектр мощности автоколебаний при переходе к хаосу через бифуркации удвоения периода при значениях амплитуды падающего поля $Y = 99$ (a), 102.3 (b) 103.3 (c), 105 (d) и тех же значениях параметров, что и на рис. 4, c.

стеме возникают нелинейные периодические колебания, а фазовая траектория с течением времени выходит на устойчивый предельный цикл. Таким образом происходит бифуркация Хопфа, т.е. переход системы из фокуса в предельный цикл. В случае движения изображающей точки от B и A получаются аналогичные результаты. При значениях $\sigma = 2$ и $Y < Y(HB_1)$ и $Y > Y(HB_2)$ стационарные состояния являются устойчивыми фокусами (рис. 4, b). Бифуркация Хопфа происходит при значениях $Y(HB_1) = 83$ и $Y(HB_2) = 41$. При значениях амплитуды падающего поля, находящихся между $Y = Y(PD_{11}) = 96$ и $Y = Y(PD_{12}) = 106$, наблюдается удвоение периода колебаний. Первая бифуркация удвоения периода происходит при $Y = Y(PD_{12})$. На рис. 4, c представлена диаграмма каскада бифуркаций удвоения периода, соответствующая переходу системы в режим динамического хаоса. При этом в фазовом пространстве возникает странный аттрактор.

На рис. 5 приведен спектр мощности колебаний. При $Y = 99$ в спектре исходного движения присутствует лишь одна линия с частотой f_0 (рис. 5, a). При значении поля $Y_1 = 102.3$ в спектре мощности наряду с линией f_0 появятся две дополнительные линии с частотой $f_0/2$, а движение имеет удвоенный период (рис. 5, b). При дальнейшем увеличении Y появляется новая субгармоника с частотой $f_0/4$, что свидетельствует о том, что субгармоника $f_0/2$ становится неустойчивой и в системе рождается устойчивый четырехкратный цикл (рис. 5, c). Наконец, при $Y = 105$ спектр становится сплошным, в фазовом пространстве возникает странный аттрактор, а движение системы становится хаотическим (рис. 5, d).

Бифуркационная диаграмма при $\sigma = 1$ (рис. 4, d) является более сложной. Наблюдается проявление хаотического поведения системы в различных областях. Интересно, что между хаотическими режимами существуют области с периодическими автоколебаниями.

Отметим, что в экспериментах с оптической бистабильностью часто наблюдают динамическую оптическую бистабильность, полученную как результат сравнения временной зависимости накачки и соответствующего отклика системы. Мы решали систему нелинейных дифференциальных уравнений (6)–(11) численно с учетом граничных условий для кольцевого резонатора, где внешняя накачка $Y(\tau)$ — функция времени, имеющая параболическую форму. Результаты проведенного компьютерного эксперимента представлены на рис. 6 при $\sigma = 10$ (a, b) и 2 (c, d) и значениях параметров $F = 2\pi n = 5$, $\Delta_1 = 0$, $\delta_1 = 30$, $\delta_0 = 5$, $d = 0.1$, $T = 0.01$. На рис. 6, a представлены формы падающего на резонатор и выходящего из резонатора электромагнитных полей в зависимости от времени в системе, когда длительность импульса составляет $\tau = 100$ ($t = 100 \cdot 10^{-12}$ s). Видно, что прошедший через резонатор импульс деформируется. На рис. 6, b показана зависимость амплитуды выходящего из резонатора излучения от амплитуды падающего. Как видно, в этом случае в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов возникает динамическая оптическая бистабильность с ходом по часовой стрелке. Если уменьшить добротность резонатора, то переключения сопровождаются осцилляциями, что ухудшает работу бистабильного элемента (рис. 6, c, d).

В заключение обсудим возможность экспериментального наблюдения предсказанных эффектов. Приведем численные оценки для кристаллов типа CdS, где

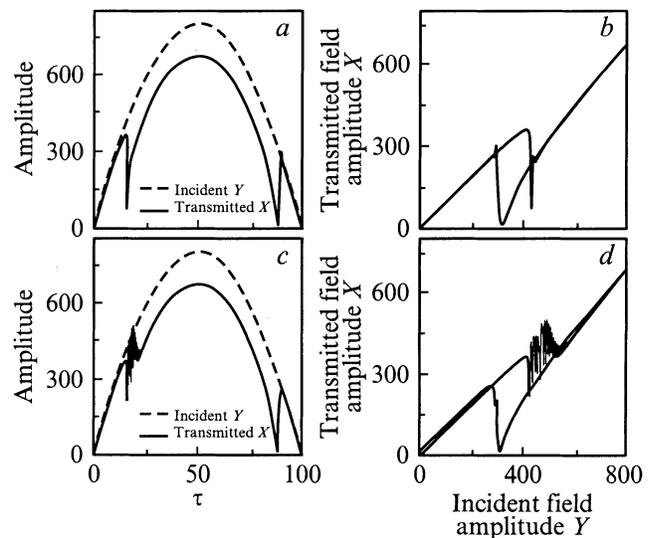


Рис. 6. Форма падающего импульса Y (штриховая линия) и форма прошедшего импульса X (сплошная линия, $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$) при $\sigma = 10$ (a) и 2 (c). На рисунках b и d представлена динамическая оптическая бистабильность. $C = 5$, $\delta_0 = 5$, $F = 2\pi n$, $\delta_1 = 30$, $d = 0.1$, $T = 0.01$, $\Delta_1 = 0$.

$\hbar D = 10^{-9} \text{ eV} \cdot \text{cm}^{3/2}$, $\hbar g = 0.1 \text{ eV}/(\text{cm}^{1/2} \cdot \text{V})$, $\hbar \omega = 2 \text{ eV}$, $\hbar c_0 k_0 \approx 2 \text{ eV}$, $\hbar \gamma_{\text{ex}} = 10^{-5} \text{ eV}$, $\hbar \gamma_{\text{biex}} = 10^{-4} \text{ eV}$, $T = 0.01$, $L = 10^{-6} \text{ m}$, $\hbar(2\omega - \omega_{\text{biex}}) = -0.04 \text{ eV}$. Критическая мощность, при которой возможно наблюдение изучаемых нами нелинейных явлений, составляет величину порядка $P \sim 40 \cdot 10^3 \text{ W/cm}^2$. При этом концентрации экситонов и биэкситонов имеют величины порядка 10^{16} и 10^{14} cm^{-3} соответственно.

Таким образом, приведенные нами численные оценки позволяют сделать вывод о реальной возможности наблюдения обсуждаемых явлений и регулирования самопульсаций в системе когерентных экситонов и биэкситонов в полупроводниках при связывании двух экситонов в биэкситон.

Список литературы

- [1] В.А. Залож, С.А. Москаленко, А.Х. Ротару. ЖЭТФ **95**, 601 (1989).
- [2] В.А. Залож, А.Х. Ротару, В.З. Трончу. ЖЭТФ **103**, 994 (1993).
- [3] В.А. Залож, А.Х. Ротару, В.З. Трончу. ЖЭТФ **105**, 260 (1994).
- [4] А.Х. Ротару, К.В. Шура. ЖЭТФ **107**, 450 (1995).
- [5] А.Х. Ротару, К.В. Шура. ФТТ **33**, 1973 (1991).
- [6] E. Hanamura. Solid State Commun. **12**, 951 (1973).
- [7] А.А. Гоголин, Э.И. Рашба. Письма в ЖЭТФ **17**, 690 (1973).
- [8] A.L. Ivanov, H. Haug, L.V. Keldysh. Phys. Rep. **296**, 236 (1998).
- [9] А.Л. Иванов, В.В. Панащенко. Письма в ЖЭТФ **49**, 34 (1989).
- [10] А.Л. Иванов, Л.В. Келдыш, В.В. Панащенко. ЖЭТФ **99**, 641 (1991).
- [11] А.Х. Ротару, В.З. Трончу. ФТТ **40**, 1810 (1998).
- [12] H.M. Gibbs. Optical Bistability. Controlling Light with Light. Acad. Press, Orlando, FL (1985).
- [13] L.A. Lugiato. Theory of Optical bistability / Ed. E. Wolf. Progress in Optics. V. XXI. North-Holland, Amsterdam (1984).
- [14] E.J. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede, X. Wang. Auto 97 Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (March 1998).