

Размерные резонансы и генерация второй гармоники в полугораниченной нелинейной слоисто-периодической среде

© А.А. Булгаков

Институт радиофизики и электроники Национальной академии наук Украины,
61085 Харьков, Украина

E-mail: bulgakov@ire.kharkov.ua

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 12 января 2005 г.)

Построена теория нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в полугораниченной периодической диэлектрической структуре на примере возбуждения второй гармоники. Предполагается, что один из слоев, образующих период, обладает нелинейной поляризацией. Методика анализа представляет собой развитие теории возмущений; она основана на формуле Грина. Показано, что условия синхронизма для взаимодействующих волн соответствуют размерным резонансам на отдельных слоях или на периоде структуры. Из приведенного рассмотрения следует, что наибольшая эффективность взаимодействия имеет место на границах полос пропускания при резонансе на полном периоде. Показано, что при таком резонансе условия синхронизма выполняются не для одной частоты, а для спектра частот. Это позволяет преобразовывать спектры из одной области частот в другую.

1. Введение

Роль механизмов нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в твердом теле, как известно незначительна, и для эффективного взаимодействия требуются достаточно большие значения амплитуд волн. Поэтому исследование возможностей увеличения нелинейного взаимодействия является актуальной задачей. В данной работе рассматривается трехволновое взаимодействие волн, в частности возбуждение второй гармоники при падении первой гармоники на полугораниченную слоисто-периодическую анизотропную нелинейную среду. Показано, что значительное увеличение амплитуды второй гармоники связано с размерными резонансами или на отдельных слоях, или на периоде структуры. Для теоретического рассмотрения обычно применяется методика, описанная в [1]. Однако предложенный в ней метод не пригоден для анализа ограниченных сред. В настоящей работе использована модифицированная методика, учитывающая как ограниченность структуры, так и ее периодичность [2,3]. Для анализа ограниченной периодической структуры применена формула Грина [4].

Трехволновое взаимодействие широко используется в практических целях для преобразования частот. Многочисленные исследования взаимодействия волн показали, что применение периодических нелинейных структур может существенно увеличить коэффициенты взаимной трансформации волн [5–7]. Одним из путей исследования и использования нелинейного взаимодействия волн является генерация второй гармоники при падении электромагнитной волны на поверхность нелинейной среды [8,9]. Несмотря на то что первые эксперименты по генерации оптических гармоник были проведены более сорока лет назад [10,11], явление нелинейной генерации второй гармоники и в настоящее время привлекает внимание исследователей [12,13].

Впервые теория нелинейного взаимодействия волн, в частности первой и второй гармоник, при падении электромагнитного излучения на полугораниченную среду

была рассмотрена в [14]. В этой работе предлагалось исследовать возникновение второй гармоники в неограниченной однородной нелинейной среде в результате взаимодействия с первой гармоникой, а затем решалась задача о падении волны второй гармоники на границу с однородной средой.

В данном случае схема решения задачи следующая. Из однородного полупространства на границу с периодической средой падает плоская волна $C'_g \exp(-i\omega't + ik'r)$. Амплитуда волны C'_g считается заданной. Амплитуда прошедшей в периодическую среду волны C' вследствие нелинейности приводит к возбуждению в среде второй гармоники $C'' \exp(-i2\omega''t + ik''r)$. Как и в работе [14], амплитуда второй гармоники находится из решения системы уравнений связи для безграничной среды, но с учетом ее слоисто-периодической структуры. Заметим, что взаимодействие гармоник происходит во всем объеме периодической среды, поэтому процессы на границе с однородным полупространством могут иметь значение только для поверхностных волн, которые распространяются вдоль этой границы. Это соображение было предложено в работе [15] для линейной полугораниченной кристаллической структуры. Вторая гармоника падает на границу с однородным полупространством со стороны периодической среды и излучается в однородное полупространство с амплитудой C''_g . Требуется исследовать зависимость амплитуды второй гармоники от компонент тензора нелинейной восприимчивости, а также от частоты и угла падения первой гармоники.

2. Дисперсионное соотношение. Коэффициенты отражения и прохождения

Рассмотрим структуру, состоящую из периодически повторяющихся слоев нелинейного диэлектрика (слой 1) и однородного изотропного диэлектрика

(слой 2). Предположим, что структура расположена при $z \geq 0$, а при $z < 0$ находится однородное полупространство с диэлектрической проницаемостью ε_g . Для определенности будем считать, что нелинейный диэлектрик обладает анизотропией класса *bmm* и его оптическая ось направлена вдоль оси Oz . Тогда тензор $\hat{\chi}$ нелинейной восприимчивости будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{xxz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_{xxz} & 0 & 0 \\ \chi_{zxx} & \chi_{zyy} & \chi_{zzz} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Этот вид тензора имеют, например, такие вещества, как CdS, CdSe, ZnO, α -ZnS. Кроме того, можно положить $\partial/\partial y = 0$, так как для выбранного класса симметрии периодическая структура в плоскости xOy однородна. Благодаря этому уравнения Максвелла для каждого слоя и однородного полупространства распадаются на две системы с компонентами поля E_x, E_z, H_y , отличными от нуля, или $E_y \neq 0, H_x \neq 0, H_z \neq 0$. Далее рассматривается первая поляризация. Для нее нелинейные уравнения в первом слое имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{xx}}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \chi_{xxz} \frac{\partial}{\partial t} (E_x E_z), \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{zz}}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \chi_{zxx} \frac{\partial}{\partial t} (E_x E_x) + \frac{4\pi}{c} \chi_{zzz} \frac{\partial}{\partial t} (E_z E_z). \end{aligned} \quad (2)$$

В однородном полупространстве и во втором слое уравнения получаются приравнованием в соотношениях (2) правой части нулю и заменой компонент тензора диэлектрической проницаемости на соответствующие значения. Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями — непрерывностью тангенциальных компонент полей на всех границах.

Подставляя в уравнения Максвелла для периодической структуры решение в виде плоской волны $\exp(-i\omega t + ik_{z1,2}z + ik_y x)$, учитывая граничные условия и используя теорему Флоке, получим дисперсионное уравнение для безграничной периодической среды

$$\begin{aligned} \cos \bar{k}d &= \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_{xx}} + \frac{k_{z2}\varepsilon_{xx}}{k_{z1}\varepsilon_2} \right) \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2 \end{aligned} \quad (3)$$

и значения поперечных компонент волнового вектора

$$\begin{aligned} k_{z1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} - k_x^2 \right)}, \\ k_{z2} &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_x^2}, \quad k_{zg} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_g - k_x^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где \bar{k} — блоховское волновое число, $d_{1,2}$ — толщины слоев, $d = d_1 + d_2$ — период структуры [8]. Здесь первый слой является одноосным диэлектриком $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz})$.

Для нахождения коэффициента отражения \mathfrak{R} необходимо вычислить отношение потока энергии отраженной волны к потоку падающей волны

$$\mathfrak{R} = \frac{\text{Re}(E_{x \text{ ref}} H_{y \text{ ref}}^*)}{\text{Re}(E_{x \text{ inc}} H_{y \text{ inc}}^*)} = \left| \frac{\omega' \varepsilon_g \beta' - k'_{zg} c}{\omega' \varepsilon_g \beta' + k'_{zg} c} \right|^2, \quad (5)$$

где $\beta' = m_{21}/(e^{-i\bar{k}'d} - m_{22})$, m_{21}, m_{22} — компоненты матрицы преобразования (см. Приложение). Для определения коэффициента прохождения \mathfrak{S} найдем отношение потоков

$$\mathfrak{S} = \frac{\text{Re}(E_{x1} H_{y1}^*)}{\text{Re}(E_{x \text{ inc}} H_{y \text{ inc}}^*)} = \frac{2\omega' \varepsilon_g}{\omega' \varepsilon_g \beta' + k'_{zg} c} \frac{k'_{zg} c}{\omega' \varepsilon_g} \frac{2|\beta'|^2}{\beta' + \beta'^*}. \quad (6)$$

Здесь первый множитель равен отношению C'/C'_g .

3. Возбуждение второй гармоники при взаимодействии волн в периодической среде

При падении волны первой гармоники из однородного полупространства амплитуда волны в периодической среде равна C' . Под действием нелинейных механизмов в этой среде возбуждается вторая гармоника с амплитудой C'' . Для определения этой амплитуды удобно представить исходные уравнения (2) в символическом виде

$$\hat{L} \left(C^{(k)} \varphi^{(k)} \right) = \hat{H} \left(C^{(k)} \varphi^{(k)}, C^{(k)} \varphi^{(k)} \right). \quad (7)$$

Здесь \hat{L} — линейный дифференциальный оператор, представляющий в нашем случае квадратную матрицу, составленную из операторов линеаризованной системы уравнений; \hat{H} — оператор-столбец, образованный из нелинейных слагаемых исходной системы уравнений; $\varphi^{(k)}$ — решение линеаризованной системы уравнений.

Для решения нелинейной задачи учтем, что слагаемые, связанные с нелинейной поляризацией, малы по сравнению с линейными членами. Поэтому амплитуда волн будет медленно меняться под действием нелинейных механизмов. Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} C^{(k)}(t) \left[\mathbf{E}^{(k)}(z) + \mathbf{e}_{\text{add}}^{(k)}(z) \right], \\ H_y &= \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} C^{(k)}(t) \left[H_y^{(k)}(z) + h_{y \text{ add}}^{(k)}(z) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $C^{(k)}(t)$ — амплитуда k -й гармоники, $\mathbf{E}^{(k)}(z)$, $H_y^{(k)}(z)$ — поля этой гармоники, полученные из решения линеаризованной системы уравнений; частота $\omega^{(k)}$ и продольное волновое число k_x гармоники связаны характеристическим соотношением (4); $\mathbf{e}_{\text{add}}^{(k)}(z)$ и $h_{y \text{ add}}^{(k)}(z)$ — дополнительные составляющие компонент полей, возникающие в результате нелинейного взаимодействия [1]. Подставим решение (8) в исходную систему уравнений (7). Учитывая, что $\varphi^{(k)}$ является решением лине-

аризованной системы уравнений $\hat{L}(\varphi^{(k)}) = 0$, а также медленную зависимость $C^{(k)}$ от времени, получим

$$\hat{L}\left(C^{(k)}\varphi_{\text{add}}^{(k)}\right) = \frac{dC^{(k)}}{dt}\varphi^{(k)} + \sum_{k_1+k_2} C^{(k_1)}C^{(k_2)}\hat{H}\left(\varphi^{(k_1)}, \varphi^{(k_2)}\right) \times \exp\left\{-i\left[\left(\omega^{(k_1)} + \omega^{(k_2)} - \omega^{(k)}\right)t + (k_{1x} + k_{2x} - k_x)x\right]\right\}. \quad (9)$$

Из этой записи видно, что $\varphi_{\text{add}}^{(k)}$ — частное решение исходной линеаризованной системы уравнений, в правой части которой стоят нелинейные слагаемые. Аналогичные системы могут быть записаны для волн $\varphi_{\text{add}}^{(k_{1,2})}$.

Теперь необходимо найти зависимость амплитуды второй гармоники от времени $C''(t)$ и компоненты дополнительных полей $\mathbf{e}_{\text{add}}^{(k)}$ и $h_{\text{add}}^{(k)}$. Для получения системы динамических уравнений, описывающей нелинейное взаимодействие первой и второй гармоник, использована формула Грина [4]

$$\int_a^b \left[\tilde{\varphi}^* \hat{L}(\varphi) - \left(\tilde{L}(\varphi)\right)^* \varphi\right] dv = \varphi \tilde{\varphi}^* \Big|_a^b. \quad (10)$$

Здесь \tilde{L} — транспонированный оператор \hat{L} ; φ и $\tilde{\varphi}$ — собственные функции операторов \hat{L} и \tilde{L} соответственно; символ $*$ используется для комплексно-сопряженных величин; v — координатное пространство, в котором действуют операторы \hat{L} и \tilde{L} ; запись $\tilde{\varphi}^* \hat{L}(\varphi)$ означает скалярное произведение. Смысл этой формулы в том, что собственные функции транспонированного линейного дифференциального оператора ортогональны к правой части системы линейных дифференциальных уравнений.

В правой части формулы записаны граничные условия, которые должны выполняться на всех границах структуры. Поскольку поля φ , найденные в линейной задаче, удовлетворяют граничным условиям в периодической структуре, из формулы (10) следует, что и дополнительные поля должны удовлетворять этим условиям.

Система динамических уравнений для амплитуд и условия фазового синхронизма имеют вид

$$\frac{dC^{(k)}}{dt} = W_{k,k_1,k_2} C^{(k_1)} C^{(k_2)}, \quad (11)$$

$$\omega^{(k_1)} + \omega^{(k_2)} - \omega^{(k)} = 0, \quad k_x^{(1)} + k_x^{(2)} - k_x = 0, \quad \bar{k}^{(1)} + \bar{k}^{(2)} - \bar{k} + 2\pi N/d = 0. \quad (12)$$

После громоздких вычислений для коэффициента W_{k,k_1,k_2} получим

$$W_{k,k_1,k_2} = \left[\Xi_1^{(k)} + \Xi_2^{(k)}\right]^{-1} \times \left\{ i\omega^{(k)} \int_0^{d_1} dv \left[\chi_{xxz} E_{z1}^{(k_1)} E_{x1}^{(k_2)} (E_{x1}^{(k)})^* + \chi_{xxx} E_{x1}^{(k_1)} E_{x1}^{(k_2)} (E_{x1}^{(k)})^* + \chi_{zzz} E_{z1}^{(k_1)} E_{z1}^{(k_2)} (E_{z1}^{(k)})^* \right] \right\}, \quad (13)$$

где $\Xi_{1,2}^{(k)}$ — энергия k -й волны в соответствующей области пространства.

Запишем законы фазового синхронизма (12) для взаимодействия первой и второй гармоник в виде

$$\omega'' = 2\omega', \quad k_x'' = 2k_x', \quad k'' = 2\bar{k}' + 2\pi N. \quad (14)$$

Эту систему уравнений необходимо дополнить дисперсионными соотношениями для второй и первой гармоник

$$\begin{aligned} \cos \bar{k}'' d &= \cos k_{z1}'' d_1 \cos k_{z2}'' d_2 \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}'' \varepsilon_2}{k_{z2}'' \varepsilon_{xx}} + \frac{k_{z2}'' \varepsilon_{xx}}{k_{z1}'' \varepsilon_2} \right) \sin k_{z1}'' d_1 \sin k_{z2}'' d_2, \\ \cos \bar{k}' d &= \cos k_{z1}' d_1 \cos k_{z2}' d_2 \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}' \varepsilon_2}{k_{z2}' \varepsilon_{xx}} + \frac{k_{z2}' \varepsilon_{xx}}{k_{z1}' \varepsilon_2} \right) \sin k_{z1}' d_1 \sin k_{z2}' d_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Пять уравнений (14), (15) содержат шесть неизвестных величин: ω' , ω'' , k_x' , k_x'' , \bar{k}' , \bar{k}'' . Поэтому одна из величин может быть задана (например, частота ω' или волновое число k_x'). Оказывается, что эта система уравнений имеет точное решение [8]

$$\cos \bar{k}' d = \cos (k_{z1}' d_1 \pm k_{z2}' d_2). \quad (16)$$

В этом легко убедиться, подставляя (16) в уравнения (15). Тогда имеем

$$\frac{(\varepsilon_{xx} k_{z2}' \pm \varepsilon_2 k_{z1}')}{\varepsilon_{xx} \varepsilon_2} \frac{\sin k_{z1}' d_1}{k_{z1}'} \frac{\sin k_{z2}' d_2}{k_{z2}'} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, условия фазового согласования выполняются в трех случаях:

$$k_{z1}' d_1 = m_1 \pi,$$

$$k_x' = \sqrt{\varepsilon_{zz} \left(\frac{\omega'^2}{c^2} - \frac{m_1^2 \pi^2}{\varepsilon_{xx} d_1^2} \right)}, \quad m_1 = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$k_{z2}' d_2 = m_2 \pi,$$

$$k_x' = \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} \varepsilon_2 - \frac{m_2^2 \pi^2}{d_2^2}}, \quad m_2 = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (18a)$$

$$\varepsilon_{xx} k_{z2}' - \varepsilon_2 k_{z1}' = 0, \quad k_x' = \frac{\omega'}{c} \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}},$$

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_2)}{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_2^2}. \quad (18b)$$

Физический смысл этих соотношений заключается в том, что выполняются условия размерного резонанса или на первом, или на втором слое (18a). В случае (18b) сумма оптических длин первого и второго слоев равна оптической длине периода, т.е. $\bar{k}' d = k_{z1}' d_1 + k_{z2}' d_2$, и вы-

полняется условие резонанса на всем периоде. Необходимо отметить, что условия фазового согласования (18) не накладывают требований на нормальные (z) компоненты волновых векторов взаимодействующих волн. Поэтому выполнение условий согласования в периодической среде (в отличие от изотропных сред или сред кубической симметрии) возможно и при нормальной дисперсии, и при ее отсутствии [10].

Система динамических уравнений для гармоник с помощью соотношений (11) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dC'}{dt} = W_{k',k''} C'^* C'', \\ \frac{dC''}{dt} = W_{k'',k'} C'^2. \end{cases} \quad (19)$$

Ее решение для случая, когда $W_{k',k''}$ и $W_{k'',k'}$ — мнимые величины, а начальные значения амплитуд связаны соотношением $|C'(0)| \gg |C''(0)|$, имеет вид

$$\begin{aligned} |C'|^2 &\approx \left| \frac{W_{k',k''}}{W_{k'',k'}} \right| |C'(0)|^2 \\ &\times \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{|W_{k',k''} W_{k'',k'}|} |C'(0)| t, 1 - \sqrt{K} \right], \\ |C''|^2 &\approx |C'(0)|^2 \\ &\times \left\{ 1 - \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{|W_{k',k''} W_{k'',k'}|} |C'(0)| t, 1 - \sqrt{K} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$K \cong \left| \frac{C'(0)}{C''(0)} \right|^2 \left| \frac{W_{k',k''}}{W_{k'',k'}} \right|.$$

Здесь sn — функция эллиптического синуса. Заметим, что условие мнимости $W_{k',k''}$ и $W_{k'',k'}$ выполняется в случае резонанса на первом или втором слое. При резонансе на всем периоде $W_{k',k''}$ и $W_{k'',k'}$ могут быть комплексными величинами, тогда решение (19) должно получаться численным путем [8].

Перейдем к вычислению поля второй гармоники в периодической среде и получим частное решение системы уравнений (9). Величины в правой части этих уравнений зависят от z как $\varphi^{(k'')} \sim \exp(\pm i k''_z z)$ или $\varphi^{(k')} \sim \exp(\pm 2i k'_z z)$. Поскольку дисперсию диэлектрической проницаемости мы не учитываем, $k''_{z1} = 2k'_{z1}$. Отметим, что в работе [14] решение задачи в случае нелинейного возбуждения второй гармоники в полубесконечном нелинейном диэлектрике было рассмотрено для материалов, обладающих дисперсией диэлектрической проницаемости. Выражения для полей в нелинейной среде, полученные в этой работе, содержат в знаменателе разность $\varepsilon_{nl}(2\omega) - \varepsilon_{nl}(\omega)$, где ε_{nl} — диэлектрическая проницаемость нелинейной среды. Таким образом, при отсутствии дисперсии имеет место расходимость поля второй гармоники. Основной механизм излучения второй гармоники в вакуум автор работы [14] связывает с наличием фазового рассогласования между гармониками, обусловленного дисперсией диэлектрической проницаемости. Однако анализ справочной литературы (например, [16]) показывает, что в оптическом

и инфракрасном диапазонах изменение диэлектрической проницаемости может быть малым и составлять единицы процентов.¹ В данной работе рассматривается случай бездисперсной диэлектрической среды, а применение формулы Грина позволяет найти поля в периодической среде, не содержащие расходящихся множителей. Учет дисперсии диэлектрической проницаемости также может быть проведен с помощью этой формулы. Однако при этом значительно усложнятся условия фазового согласования, а решение уравнений (15) может быть получено численно. Амплитуды дополнительных полей, как следует из (9), пропорциональны коэффициентам поляризуемости и поэтому малы по сравнению с основными полями. Далее приводятся только графики дополнительных полей.

Поле второй гармоники в однородном полупространстве — волна, распространяющаяся от поверхности периодической структуры,

$$E''_{xg} = C''_g \exp[i(-\omega'' t + k''_x x - k''_{zg} z)]. \quad (21)$$

Поля в первом слое структуры представляют собой сумму решения линейной системы уравнений и дополнительных полей

$$\begin{aligned} E''_{x1} &= \frac{\alpha''}{2} \left(\frac{m''_{22} - e^{ik''_z d}}{m''_{12}} + \frac{k''_{z1} c}{\omega'' \varepsilon_{xx}} \right) e^{ik''_{z1} z} \\ &+ \frac{C''(t)}{2} \left(\frac{m''_{22} - e^{ik''_z d}}{m''_{12}} - \frac{k''_{z1} c}{\omega'' \varepsilon_{xx}} \right) e^{-ik''_{z1} z}. \end{aligned} \quad (22)$$

Такая запись показывает, что компонента второй гармоники, падающая на границу периодического и однородного полупространств и пропорциональная $e^{-ik''_{z1} z}$, возбуждается в периодической среде с амплитудой $C''(t)$. Компонента поля, пропорциональная $e^{ik''_{z1} z}$, отражается от указанной границы, а ее амплитуда (коэффициент α'') определяется граничными условиями. Используя непрерывность тангенциальных составляющих полей на границе однородной и периодической сред $z = 0$, найдем неизвестные коэффициенты C''_g и α'' [10,16]

$$\begin{aligned} C''_g &= C''(t) \left[\frac{(A'' \omega'' \varepsilon_{xx} - k''_{z1} c)}{(k''_{zg} \varepsilon_{xx} + k''_{z1} \varepsilon_g)} \frac{k''_{zg} \varepsilon_{xx}}{\omega'' \varepsilon_g} + O(\chi_{ijk}) \right], \\ \alpha'' &= \frac{C''(t)}{2} \left[\frac{(A'' \omega'' \varepsilon_{xx} - k''_{z1} c)}{(k''_{zg} \varepsilon_{xx} + k''_{z1} \varepsilon_g)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{(\omega'' k''_{zg} \varepsilon_{xx}^2 - k''_{z1}^2 \varepsilon_g c)}{\omega'' k''_{z1} \varepsilon_g c} + O(\chi_{ijk}) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $A'' = (m''_{22} - e^{ik''_z d})/m''_{12}$. Слагаемые $O(\chi_{ijk})$ пропорциональны коэффициентам нелинейной поляризуе-

¹ Например, для CdS $[\varepsilon(\omega = 5000 \text{ cm}^{-1}) - \varepsilon(\omega = 833 \text{ cm}^{-1})]/\varepsilon(\omega = 5000 \text{ cm}^{-1}) = 0.065$, т.е. изменение составляет менее 7%. Для GaAs дисперсия в этом диапазоне еще меньше (порядка 1–2%) [17].

мости и связаны с дополнительными полями. Из-за громоздкости выражения для них здесь не приводятся. Соотношения (21)–(23) являются решением поставленной задачи. Они позволяют определить амплитуду электрического и магнитного полей второй гармоники, излучаемой из периодической среды в однородное полупространство.

4. Численные результаты

В этом разделе проведены расчеты по полученным ранее формулам для структуры, состоящей из слоев нелинейного диэлектрика CdS ($\epsilon_{xx} = 5.382$, $\epsilon_{zz} = 5.457$, $\chi_{xxz} = 2.1 \cdot 10^{-7}$ CGSE units, $\chi_{zxx} = 1.92 \cdot 10^{-7}$ CGSE units, $\chi_{zzz} = 3.78 \cdot 10^{-7}$ CGSE units) и слоев однородного диэлектрика типа NaCl ($\epsilon_2 = 2.38$). Толщины слоев для инфракрасного диапазона ($\omega = 1000\text{--}6000\text{ cm}^{-1}$) должны быть порядка $1\text{ }\mu\text{m}$. Нами проведены расчеты для структуры, состоящей из слоев нелинейного диэлектрика толщиной $d_1 = 0.75\text{ }\mu\text{m}$ и слоев однородного изотропного диэлектрика $d_2 = 1.5\text{ }\mu\text{m}$.

4.1. Зонная структура спектра. На рис. 1 приведены результаты расчета зонной структуры спектра для безграничной периодической структуры по формуле (3) [8]. На этом рисунке зоны пропускания обозначены римскими цифрами, а запрещенные зоны заштрихованы. Светлыми кружками показана граница зоны для $\bar{k}d = 0$, а темными — для $\bar{k}d = \pi$. Видно, что запрещенные зоны ограничены дисперсионными кривыми с одинаковыми значениями блоховского волнового числа. Тонкой прямой на рис. 1 обозначена световая линия для однородного полупространства ($k_{zg} = 0$). Жирными линиями показаны кривые, для которых выполняются

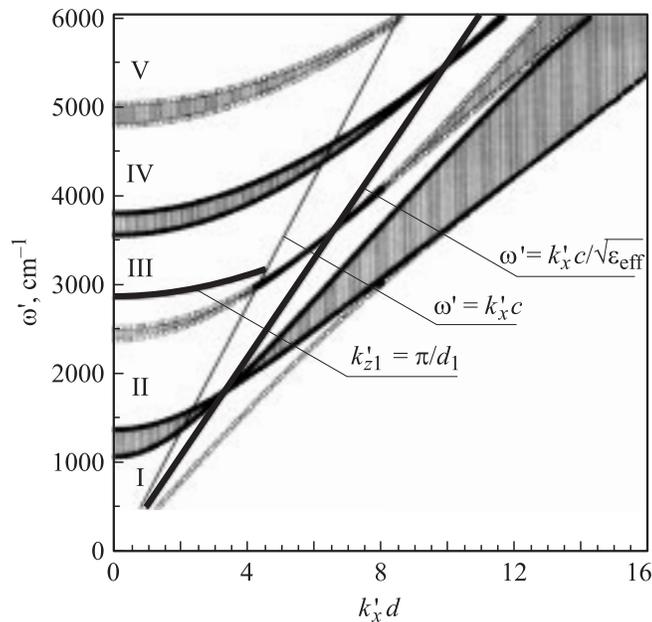


Рис. 1. Зонная структура спектра.

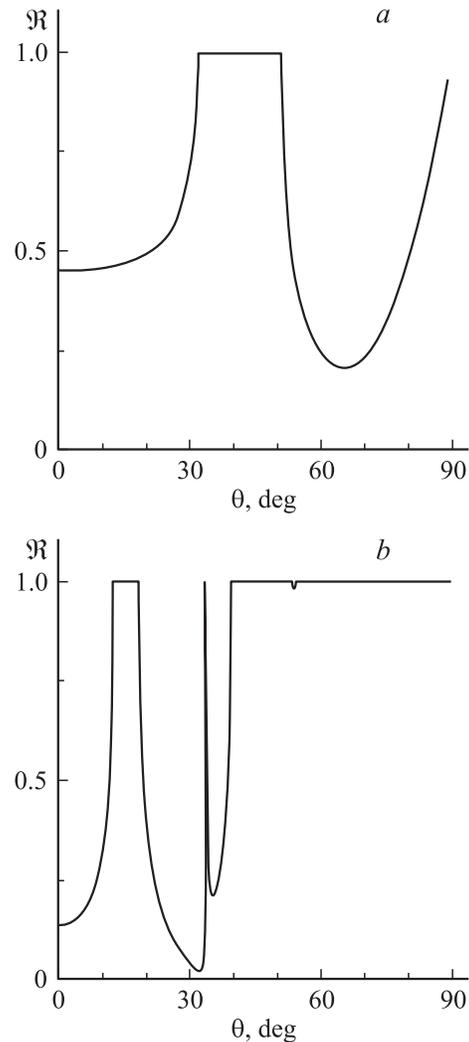


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от угла падения. $\epsilon_g = 1$ (a) и 6 (b). $\omega = 4000\text{ cm}^{-1}$.

условия фазового согласования (18a) ($k'_{z1} = \pi/d_1$) и (18b) ($\omega' = k'_x c / \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}$).

4.2. Свойства коэффициентов отражения и прохождения. Проведем расчет коэффициента отражения для какой-либо фиксированной частоты. Волновое число $k'_x = (\omega'/c) \sqrt{\epsilon_g} \sin \theta$ изменяется от нуля до значения, соответствующего $\theta = \pi/2$, т.е. до точки, лежащей на световой линии. Следовательно, область дисперсии, лежащая правее световой линии, недоступна при падении сигнала из среды с $\epsilon_g = 1$. Для возбуждения волны в решетке в области правее линии $k'_{zg} = 0$ необходимо, чтобы диэлектрическая проницаемость однородного полупространства имела значение, большее максимального значения ϵ в слоях решетки (рис. 2, a, b). Из этих рисунков видно, что в области запрещенных зон коэффициент отражения равен единице. Однако в отличие от случая полного внутреннего отражения на границе двух однородных диэлектриков, когда поле монотонно убывает в глубь среды по экспоненте, в пери-

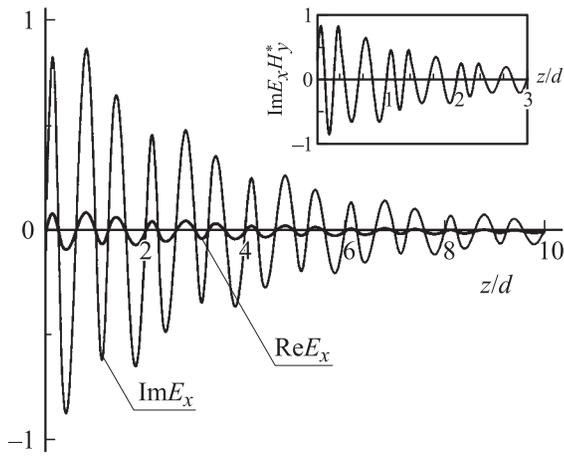


Рис. 3. Распределение E_x -компоненты поля и реактивной мощности в зоне непропускания структуры.

одической структуре поле убывает, осциллируя в слоях. Это видно из картины изменения E_x -компоненты поля в структуре при падении волны из вакуума (рис. 3). Причиной осцилляций является то, что k_z -составляющие волнового вектора в слоях остаются действительными числами ($k_{z1,2}^2 \geq 0$, если $\epsilon_g < \epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}, \epsilon_2$). Блоховское волновое число в зоне непропускания — мнимая величина; это приводит к экспоненциальному убыванию амплитуд поля с возрастанием z . Однако осцилляции поля не приводят к распространению энергии в глубь периодической структуры, так как действительная часть z -й компоненты потока мощности равна нулю. Мнимая часть потока мощности представлена на вставке к рис. 3. Видно, что она осциллирует так же, как и E_x -компонента поля. Таким образом, проникновение электромагнитного поля в глубь периодической среды для частот, соответствующих запрещенным зонам, связано с реактивной частью потока мощности [18].

4.3. Коэффициент отражения и условия фазового согласования. Для резонансного взаимодействия первой и второй гармоник должны выполняться условия фазового синхронизма (14), а следовательно, и соотношения (18а), (18б). Эти требования приводят к связи частоты и угла падения. Если выполнены условия (18а), то

$$\omega = \frac{m_1 \pi c}{d_1} \sqrt{\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}(\epsilon_{zz} - \epsilon_g \sin^2 \theta)}}. \quad (24)$$

Если $\epsilon_{zz} > \epsilon_g$, то наименьшее и наибольшее значения частот, для которых выполняются условия синхронизма, будут равны

$$\omega_{\min} = \frac{m_1 \pi c}{d_1 \sqrt{\epsilon_{xx}}} \quad \text{при } \theta = 0,$$

$$\omega_{\max} = \frac{m_1 \pi c}{d_1} \sqrt{\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}(\epsilon_{zz} - \epsilon_g)}} \quad \text{при } \theta = 90^\circ.$$

Если $\epsilon_{zz} < \epsilon_g$, то ограничений на частоту нет, но имеется предельный угол падения

$$\theta_{\max} = \arcsin \sqrt{\epsilon_{zz} / \epsilon_g}.$$

При увеличении угла падения условия синхронизма не выполняются ни для каких частот.

Подставим условие фазового согласования $k_{z1} = m_1 \pi / d_1$ в формулы (5) и (6) для коэффициентов отражения и прохождения. В результате получим

$$\Re = \left| \frac{\epsilon_2 \cos \theta - \sqrt{\epsilon_g(\epsilon_2 - \epsilon_g \sin^2 \theta)}}{\epsilon_2 \cos \theta + \sqrt{\epsilon_g(\epsilon_2 - \epsilon_g \sin^2 \theta)}} \right|^2,$$

$$\Im = \frac{4\epsilon_2 \cos \theta \sqrt{\epsilon_g(\epsilon_2 - \epsilon_g \sin^2 \theta)}}{\left[\epsilon_2 \cos \theta + \sqrt{\epsilon_g(\epsilon_2 - \epsilon_g \sin^2 \theta)} \right]^2}. \quad (25)$$

Как следует из этих формул, при выполнении условия размерного резонанса в первом слое отражение от периодической структуры происходит так же, как от среды с параметрами второго слоя [19]. Кроме того, в выражения (25) не входит частота. Это означает, что зависимости $\Re(\theta)$ и $\Im(\theta)$ будут одинаковыми для всех зон пропускания, для которых выполняется условие резонанса. Из (25) для коэффициента отражения следует, что $\Re = 0$ при $\theta_P = \arcsin[\epsilon_2 / (\epsilon_2 + \epsilon_g)]^{1/2}$, θ_P — угол полного прохождения. Следовательно, в каждой зоне имеется частота, для которой выполняется условие полного прохождения в глубь периодической структуры. Заметим, что при отражении от однородной среды такое условие может выполняться только для одной частоты. Разумеется, это свойство коэффициента отражения связано с отсутствием дисперсии диэлектрической проницаемости.

При выполнении условий размерного резонанса на втором слое процессы, протекающие при отражении от периодической среды, аналогичны рассмотренным выше. Поэтому данный случай здесь опускается.

Условия синхронизма, связанные с соотношением (18б), интересны тем, что они выполняются для любых частот, но только для одного угла падения

$$\theta_g = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_{zz}}{\epsilon_g} \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_2}{\epsilon_{xx} \epsilon_{zz} - \epsilon_2^2}}. \quad (26)$$

Соотношение (26) может быть выполнено только для достаточно больших значений диэлектрической проницаемости однородного полупространства ϵ_g . Оценка этой величины может быть получена, если учесть, что реально анизотропия в оптическом диапазоне невелика и $\epsilon_{zz} \approx \epsilon_{xx} = \epsilon_1$. Тогда имеем

$$\epsilon_g \geq \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

С помощью соотношений (5), (6) и (18b) для коэффициента отражения получим

$$\Re = \frac{\left[\frac{\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_2)\varepsilon_g^2} - \sqrt{\varepsilon_g^2(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_g) - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(\varepsilon_2 - \varepsilon_g)}}{\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_2)\varepsilon_g^2} + \sqrt{\varepsilon_g^2(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_g) - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(\varepsilon_2 - \varepsilon_g)}} \right]^2}{(27)}$$

Как и в предыдущем случае, коэффициент отражения не зависит от частоты. Поэтому для всех частот сохраняется одно и то же значение \Re . Для выбранных нами значений параметров $\Re = 0.00031$ при $\varepsilon_g = 6$, а угол падения $\theta = 31.6^\circ$.

Этот случай синхронизма интересен тем, что позволяет рассмотреть взаимодействие не отдельных частот, а полосы частот, т.е. с помощью периодической структуры возможно преобразование спектра из одной области в другую.

4.4. Нелинейное возбуждение второй гармоники. Рассмотрим численное решение нелинейной задачи. Как было показано аналитически, преобразование первой гармоники связано не только с изменением частоты, т.е. с возбуждением второй гармоники, но и с возникновением дополнительных полей. Распределение дополнительных полей отличается от распределения основных. На рис. 4 для сравнения представлены действительная и мнимая части E_x -компоненты поля для основного (a) и дополнительного (b) решений. Видно, что дополнительное поле почти равно нулю во втором слое и на границах первого слоя, для которого выполняется условие резонанса. Кроме того, амплитуда дополнительного поля значительно меньше, чем для основного. Таким образом, дополнительные поля не могут значительно повлиять на амплитуду второй гармоники. Их учет необходим для получения динамических уравнений (11) с помощью формулы Грина (10).

На рис. 5 представлены зависимости z -й компоненты потока энергии второй гармоники в однородной среде от времени, рассчитанные с помощью формул (21) и (22) для различных частот (или углов падения первой гармоники θ в однородной среде). В этих формулах $C''(t)$ и C''_g найдены как численное решение уравнений (19) с начальными условиями. Эти коэффициенты пропорциональны квадрату эллиптической функции (типа эллиптического синуса) и поэтому являются периодическими функциями времени. Рассматривается случай, когда выполняется условие размерного резонанса на первом слое. На рис. 1 эта область дисперсионной зависимости представлена жирной линией в третьей зоне пропускания. Видно, что поток энергии отрицателен. Это означает, что энергия второй гармоники излучается от поверхности периодической среды в однородное полупространство. При различных углах падения первой гармоники происходит изменение периода эллиптической функции и амплитуды потока. Как следует из (20),

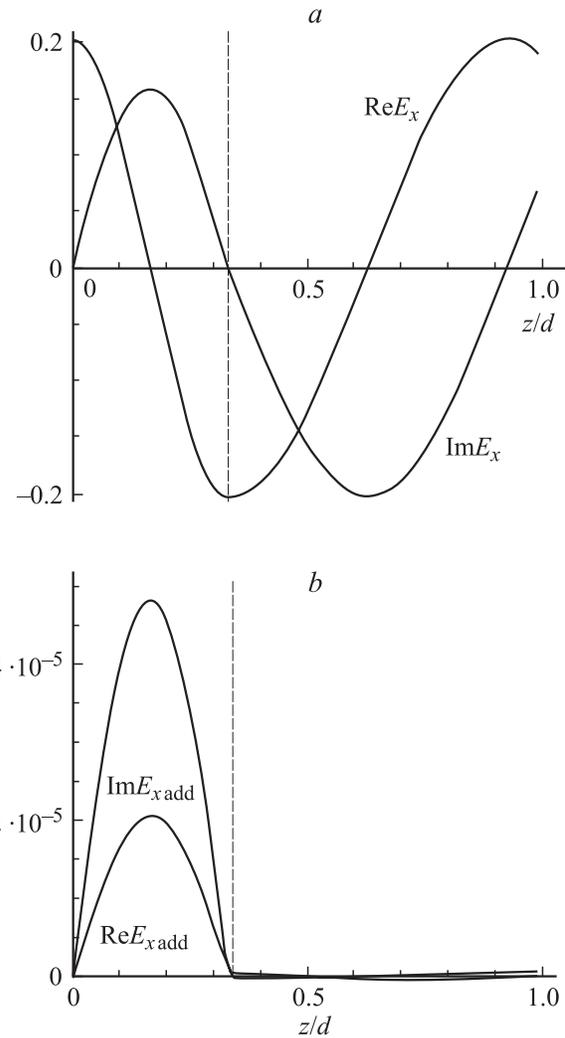


Рис. 4. Распределение основной (a) и дополнительной (b) E_x -компонент поля.

амплитуда второй гармоники C'' в периодической среде зависит только от амплитуды $|C'(0)|$ первой гармоники. Следовательно, изменение амплитуды потока определяется условиями прохождения и отражения гармоник при $z = 0$ для различных углов падения. Из (20) следует также, что период эллиптической функции определяется коэффициентами $W_{k',k''}$ и $W_{k'',k'}$, т.е. свойствами нелинейных слоев. Таким образом, при малых углах падения ($k'_x d \leq 1$) нелинейные коэффициенты малы. Их величина возрастает с ростом $k'_x d$, а при углах падения $\theta \approx 90^\circ$ $W_{k',k''}$ и $W_{k'',k'}$ опять становятся малыми. Уменьшение амплитуды при $\theta \approx 90^\circ$ связано с увеличением коэффициента отражения при скользких углах падения. Можно отметить общую тенденцию: с увеличением периода эллиптической функции уменьшается амплитуда потока.

В заключение этого раздела рассмотрим возможность преобразования спектра из одной области частот в другую. Как было показано ранее, такая ситуация возможна при выполнении условий резонанса на всем периоде (18b). Поскольку в этом случае угол падения

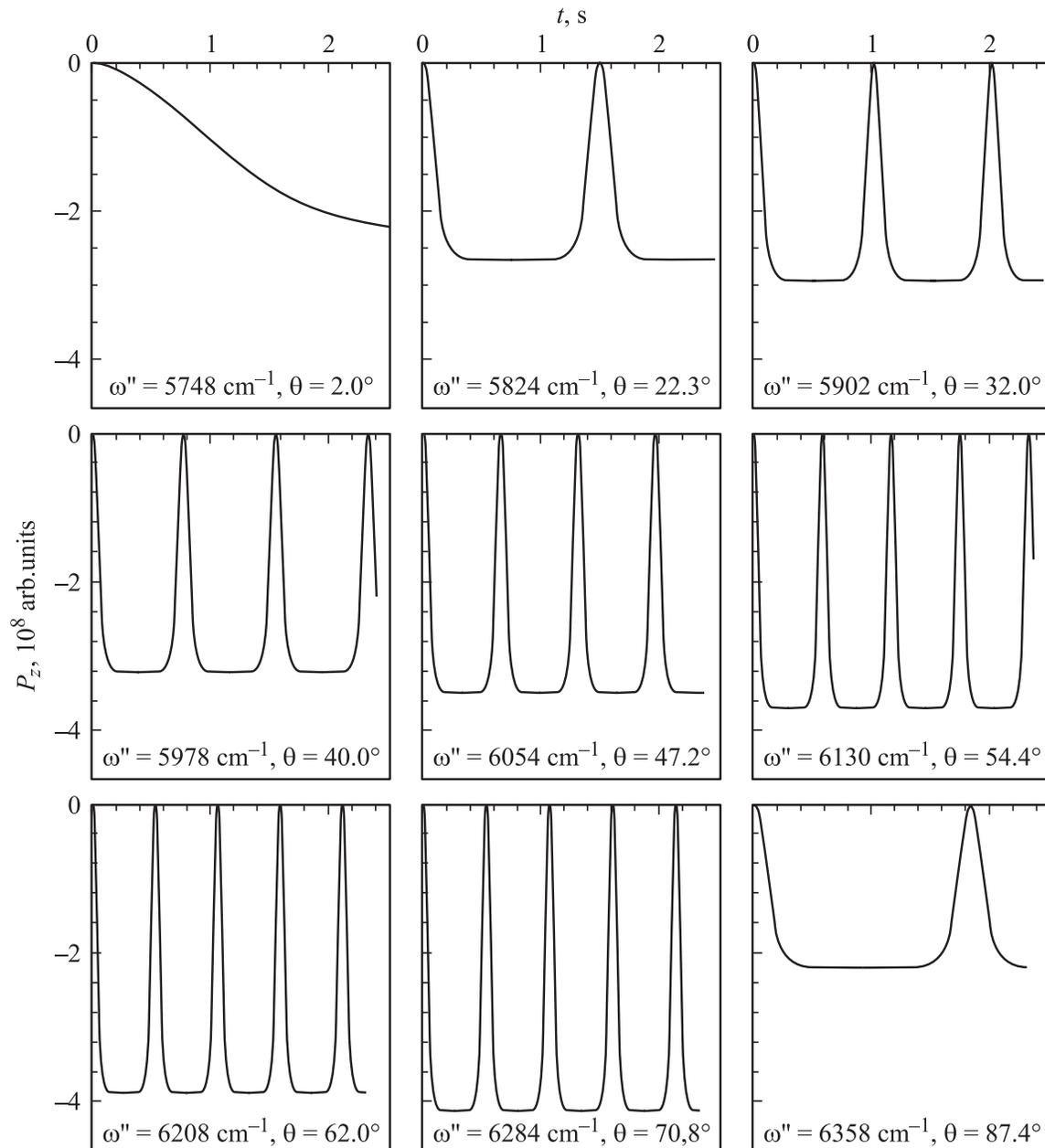


Рис. 5. Зависимость потока энергии второй гармоники в однородное полупространство от времени для различных значений частоты и угла падения первой гармоники.

и коэффициенты отражения и прохождения не зависят от частоты (27), амплитуда преобразованного сигнала определяется величиной нелинейных коэффициентов $W_{k',k''}$ и $W_{k'',k'}$, которые в свою очередь зависят от k_x -компоненты волнового вектора, т.е. от угла падения. На рис. 6 представлены графики зависимости потока второй гармоники в однородную среду и длительности периода от частоты первой (нижняя шкала) или второй (верхняя шкала) гармоник. Зависимости потока (кривая 1) и длительности периода (кривая 2) совмещены на одном рисунке, чтобы продемонстрировать идентичность этих зависимостей. На оси абсцисс отложены

частоты, которые связаны с компонентой k'_x соотношением $\omega' = k'_x c / \sin 31.6^\circ$. На рис. 1 эта зависимость отмечена жирной прямой. Видно, что линия проходит вблизи точек касания (или непосредственно через них) разрешенных зон. Такой ход прямой определяет и вид графиков на рис. 6. Как было показано в [6,8], вблизи границ зон пропускания нелинейное взаимодействие становится значительно более эффективным, чем в середине зон. Сравнивая рис. 6 с дисперсионной зависимостью на рис. 1, можно увидеть, что максимумы амплитуды потока (или минимумы периода эллиптической функции) имеют место для частот, лежащих вблизи точек

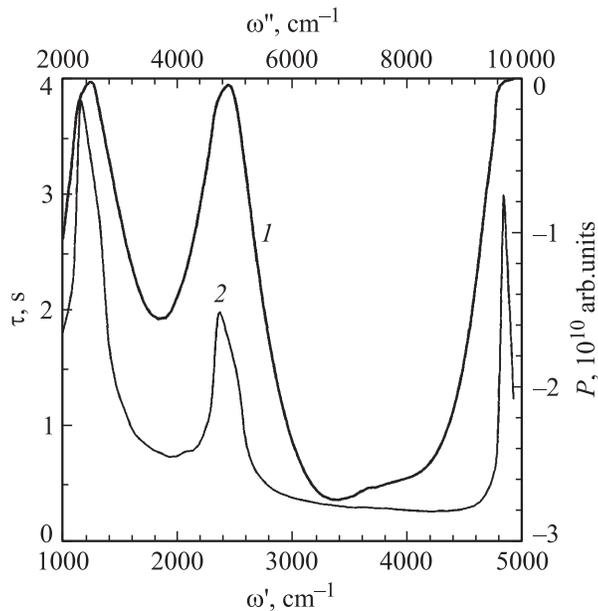


Рис. 6. Зависимость амплитуды потока мощности второй гармоники в вакуум P (1) и периода эллиптической функции τ (2) от частоты.

касания, т. е. вблизи границ зон. Исключение составляет минимум для частот $\omega' \approx 5000 \text{ cm}^{-1}$. Это связано с тем, что данная область частот попадает в запрещенную зону, которая на рис. 1 видна плохо, поскольку при таких значениях ω' она очень узкая.

5. Заключение

Было рассмотрено излучение второй гармоники из периодической среды, вызванное нелинейным взаимодействием с первой гармоникой, падающей на границу из однородного полупространства. Выполнение условий фазового согласования возможно, если выполняются условия размерного резонанса на отдельных слоях или полном периоде структуры. При резонансе на первом или втором слое каждому углу падения первой гармоники соответствует определенная частота. Если диэлектрическая проницаемость не зависит от частоты, то коэффициенты отражения и прохождения для различных зон пропускания периодической среды имеют одинаковую зависимость от частоты. В результате может оказаться, что в каждой зоне пропускания имеется одна частота, соответствующая углу полного прохождения. Такая ситуация в однородной среде возможна только для одной частоты.

При резонансе на одном из слоев амплитуда потока энергии второй гармоники зависит от времени по закону эллиптического синуса. Период эллиптической функции приблизительно обратно пропорционален величине коэффициента нелинейного взаимодействия. Амплитуда потока определяется как амплитудой падающего потока с частотой первой гармоники, так и

законами отражения и прохождения гармоник через границу однородного полупространства и периодической среды.

При выполнении условий резонанса на полном периоде коэффициенты отражения и прохождения не зависят от частоты. Угол падения имеет единственное значение, определяемое параметрами структуры. Выполнение условий такого резонанса возможно, если диэлектрическая проницаемость однородного полупространства превышает проницаемость слоев, образующих периодическую среду. В этом случае нелинейное резонансное взаимодействие осуществляется не для отдельных частот, а для области спектра, так как не требует изменения угла падения волны накачки. Однако амплитуда преобразованного сигнала зависит от зонной структуры спектра собственных волн периодической среды и нелинейных свойств слоев. Наибольшее значение амплитуда второй гармоники принимает на частотах, расположенных вблизи границ зон пропускания.

Необходимо также отметить, что амплитуда излучаемой гармоники и длительность периода эллиптической функции связаны между собой: возрастание амплитуды соответствует уменьшению периода. Это означает, что при трансформации спектра соотношение амплитуд в преобразованном сигнале будет зависеть от частоты сложным образом.

В заключение кратко остановимся на влиянии линейного затухания на протекание нелинейных процессов. Необходимо отметить, что эта задача требует рассмотрения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dC'}{dt} = \gamma' C' + W_{k',k''} C'^* C'', \\ \frac{dC''}{dt} = \gamma'' C'' + W_{k'',k'} C'^2, \end{cases} \quad (28)$$

где γ' и γ'' — коэффициенты затухания первой и второй гармоник соответственно. Подробное исследование уравнений было проведено в монографии [20] для однородной нелинейной среды. Оно сводится к тому, что при малых значениях затухания происходит медленное уменьшение амплитуд всех волн в течение десятков периодов эллиптических функций и малое изменение периода этих функций. В нашем случае величина коэффициентов γ' , γ'' зависит от доли энергии волны, накапливаемой в каждом слое структуры. Поэтому если материал линейного слоя обладает малым затуханием, то и затухание волны будет меньшим, чем в однородном нелинейном материале. Поскольку величина затухания много меньше периода эллиптических функций (это основное приближение теории нелинейного взаимодействия), рис. 5 сохранит свой вид и при учете затухания.

Таким образом, в нелинейных периодических структурах генерация второй гармоники будет происходить значительно эффективнее, чем в однородном материале.

Приложение

Элементы передаточной матрицы

$$\begin{pmatrix} H_y(0) \\ E_x(0) \end{pmatrix} = \hat{m} \begin{pmatrix} H_y(d) \\ E_x(d) \end{pmatrix}$$

имеют вид

$$m_{11} = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - \frac{k_{z2}\varepsilon_{xx}}{k_{z1}\varepsilon_2} \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2,$$

$$m_{22} = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - \frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_{xx}} \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2,$$

$$m_{12} = -i \frac{\omega}{c} \left(\frac{\varepsilon_2}{k_{z2}} \cos k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2 + \frac{\varepsilon_{xx}}{k_{z1}} \sin k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 \right),$$

$$m_{21} = -i \frac{c}{\omega} \left(\frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} \cos k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2 + \frac{k_{z1}}{\varepsilon_{xx}} \sin k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 \right).$$

- [16] Е.М. Воронкова, Б.Н. Гречушников, Г.И. Дистлер, И.П. Петров. Оптические материалы для инфракрасной техники. Наука, М. (1965). 336 с.
- [17] А. Ярив, П. Юх. Оптические волны в кристаллах. Мир, М. (1987). 616 с.
- [18] Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Сов. радио, М. (1957). 584 с.
- [19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИФМЛ, М. (1959). 532 с.
- [20] Х. Вильхемссон, Я. Вейланд. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. Энергоиздат, М. (1981). 224 с.

Список литературы

- [1] А.А. Галеев, В.И. Карпман. ЖЭТФ **44**, 592 (1963).
- [2] А.А. Булгаков, С.И. Ханкина, В.М. Яковенко. ФТТ **22**, 2536 (1980).
- [3] А.А. Булгаков, А.И. Тимченко. ФТТ **28**, 517 (1986).
- [4] Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Пер. с англ. под ред. В.М. Алексеева. Мир, М. (1970).
- [5] V.A. Belyakov, N.V. Shipov. Phys. Lett. A **86**, 94 (1981).
- [6] В.Э. Пожар, Л.А. Чернозатонский. ФТТ **27**, 682 (1985).
- [7] A.A. Bulgakov, S.A. Bulgakov, L. Vazquez. Phys. Rev. E **58**, 7887 (1998).
- [8] N. Bloembergen, P.S. Pershan. Phys. Rev. **128**, 606 (1962).
- [9] Y.R. Shen. The Principles of Nonlinear Optics. John Wiley & Sons, Interscience Publ., N.Y. (1984). [И.Р. Шен. Принципы нелинейной оптики. Наука, М. (1989)].
- [10] P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters, G. Weinreich. Phys. Rev. Lett. **7**, 118 (1961).
- [11] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, P.S. Pershan. Phys. Rev. **127**, 1918 (1962).
- [12] J. Martorell, R. Vilaseca, R. Corbal'an. Appl. Phys. Lett. **70**, 702 (1997).
- [13] R. Stolle, K.J. Veenstra, F. Manders et al. Phys. Rev. B **55**, R4925 (1997).
- [14] N. Bloembergen. Nonlinear Optics / Ed. W.A. Benjamin. N.Y.-Amsterdam (1965). [Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Мир, М. (1966)].
- [15] И.М. Лифшиц, Л.П. Розенцвейг. ЖЭТФ **18**, 1012 (1948).