Динамическое флуктуационно-электромагнитное взаимодействие нерелятивистской квадрупольной частицы с плоской поверхностью

© А.А. Кясов, Г.В. Дедков

Кабардино-Балкарский государственный институт,
360004 Нальчик, Россия

E-mail: dv_dedkov@mail.ru

(Поступила в Редакцию 22 ноября 2001 г.)

В рамках нерелятивистской флуктуационно-электромагнитной теории впервые получены формулы для квадруполь-квадрупольного вклада в тангенциальную и нормальную компоненты силы, действующей на частицу, движущуюся параллельно поляризующейся поверхности. Рассмотрены случаи, когда частица обладает постоянным или флуктуационным квадрупольным моментом, а поверхность характеризуется локальной диэлектрической функцией.

До сих пор, насколько нам известно, все исследования взаимодействия движущихся нейтральных частиц с поверхностью проводились в дипольном приближении (см., например, [1–4]). При этом рассматривались случаи как постоянного дипольного момента (полярная молекула и т. п.), так и флуктуационного момента (атом в основном состоянии и т. п.). Между тем, существует целый класс молекул с нулевым дипольным моментом $\mathbf{d}$, но отличным от нуля квадрупольным моментом Q_{ik} и более высокими мультипольными моментами. К их числу, например, относятся все гомоядерные молекулы (H_2, N_2, O_2 и т. д.) [5]. Сферические же частицы, не имеющие постоянных мультипольных моментов, обладают флуктуационными моментами $\mathbf{d}^{\mathrm{sp}}$, Q_{ik}^{sp}, L_{ijk}^{sp} с равными нулю средними значениями, но отличными от нуля средними квадратами [5,6]. Благодаря этому осуществляется взаимодействие таких частиц между собой и с поверхностью на расстояниях много больших чем атомные. Несмотря на то, что в окрестности ван-дер-ваальсова минимума доминирует дипольный вклад в флуктуационное взаимодействие сферических частиц с поверхностью, учет высших мультипольных моментов представляется весьма важным [6].

Цель настоящей работы — дальнейшее развитие нерелятивстской теории динамического взаимодействия нейтральных частиц с поверхностью [2–4] с учетом постоянного или флуктуационного квадрупольного момента.

1. Частица с постоянным квадрупольным моментом (квадрупольная молекула)

Следуя методу, развитому в [2–4], рассматриваем точечную частицу с квадрупольным моментом Q_{ik}, движущуюся в вакууме с нерелятивистской скоростью V вдоль оси x параллельно плоской поверхности, ограничивающей полубесконечную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Расстояние от частицы до поверхности равно z_0. Объемная плотность связанных зарядов квадрупольной частицы равна [6]

$$\rho(x,y,z,t)=\frac{1}{3}\nabla_i\nabla_k\left\{\delta(x-Vt)\delta(y)\delta(z-z_0)Q_{ik}\right\}. \quad (1)$$

Следует отметить, что тензор квадрупольного момента, входящий в (1), определен как

$$Q_{ik}=\frac{1}{2}\int\rho(r')\left(3x'_ix'_k-\delta_{ik}r'^2\right)d^3r'. \quad (2)$$

Это определение отличается от наиболее распространенного [7,8] множителем $1/2$. Определение (2), использованное в [5,6], является более удобным с точки зрения формализма сферических тензоров.

С учетом (1) уравнение Пуассона для электрического потенциала принимает вид

$$\Delta\varphi(x,y,z,t)=-\frac{4\pi}{3}\nabla_i\nabla_k\left\{\delta(x-Vt)\delta(y)\delta(z-z_0)Q_{ik}\right\}. \quad (3)$$

После фурье-преобразования обеих частей уравнение (3) по компонентам двумерного волнового вектора (k_x,k_y) в плоскости поверхности получим

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z)=\frac{8\pi^2}{3}\delta(\omega-k_xV)$$
$$\times\Big\{(k_x^2Q_{xx}+k_y^2Q_{yy}+2k_xk_yQ_{xy})\delta(z-z_0)$$
$$-(2ik_xQ_{xz}+2ik_yQ_{yz})\delta'(z-z_0)-Q_{zz}\delta''(z-z_0)\Big\}. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) для фурье-компоненты индуцированного потенциала имеет вид (подробнее см. Приложение)

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z)=\frac{4\pi^2}{3k}\delta(\omega-k_xV)\Delta(\omega)\exp\Big(-k(z+z_0)\Big)$$
$$\times\Big\{k_x^2Q_{xx}+k_y^2Q_{yy}+2k_xk_yQ_{xy}$$
$$-2ik_xQ_{xz}-2ik_yQ_{yz}-k^2Q_{zz}\Big\}, \quad (5)$$

причем $\Delta(\omega)=\frac{\varepsilon(\omega)-1}{\varepsilon(\omega)+1}$.

Следует отметить, что компоненты тензора Q_{ik} в уравнениях (4), (5) могут также вычисляться в системе координат, связанной с частицей, так как при отсутствии у нее заряда и дипольного момента они не зависят от сдвига системы координат [5,6].

Теперь перейдем к вычислению латеральной (F_x) и нормальной (F_z) сил, действующих на частицу со стороны индуцированного поля поверхности. Гамильтониан взаимодействия квадруполя Q_{ik} с внешним электрическим полем дается выражением [6]

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{3}\, Q_{ik}\nabla_k E_i. \tag{6}$$

С учетом (6) получаем

$$F_x = \frac{1}{3}\,\nabla_x Q_{ik}\nabla_k E_i = -\frac{1}{3}\,\nabla_x Q_{ik}\nabla_k\nabla_i\varphi^{\text{in}}, \tag{7}$$

$$F_z = \frac{1}{3}\,\nabla_z Q_{ik}\nabla_k E_i = -\frac{1}{3}\,\nabla_z Q_{ik}\nabla_k\nabla_i\varphi^{\text{in}}. \tag{8}$$

При этом нужно заметить, что сначала в (7), (8) нужно выполнить дифференцирование по пространственным переменным, и лишь затем подставить координаты движущейся частицы, $\mathbf{r}_0(t) = (Vt, 0, z_0)$.

Далее разлагаем индуцированный потенциал φ^{in} в интеграл Фурье по пространственным и временной переменным $(\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z)$ определяется формулой (5)) и подставляем в (7), (8), учитывая сделанное выше замечание. После интегрирования по частотам и преобразования пределов интегрирования по $k_x k_y$ к интервалу $(0,\infty)$ с учетом четности действительной части и нечетности мнимой части диэлектрической функции $\varepsilon(\omega)$ получим

$$\begin{aligned}F_x = &-\frac{2}{9\pi}\iint\limits_0^{\infty} dk_x\, dk_y k_x \exp(-2kz_0)\,\frac{\Delta''(k_xV)}{k}\\ &\times\Big\{k_x^4Q_{xx}^2 + k_y^4Q_{yy}^2 + k^4Q_{zz}^2 + 2k_x^2k_y^2\\ &\times(2Q_{xy}^2 + Q_{xx}Q_{yy}) + 2k_x^2k^2(2Q_{xz}^2 - Q_{xx}Q_{zz})\\ &+ 2k_y^2k^2(2Q_{yz}^2 - Q_{yy}Q_{zz})\Big\},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}F_z = &-\frac{2}{9\pi}\iint\limits_0^{\infty} dk_x\, dk_y \exp(-2kz_0)\Delta'(k_xV)\\ &\times\Big\{k_x^4Q_{xx}^2 + k_y^4Q_{yy}^2 + k^4Q_{zz}^2 + 2k_x^2k_y^2\\ &\times(2Q_{xy}^2 + Q_{xx}Q_{yy}) + 2k_x^2k^2(2Q_{yz}^2 - Q_{xx}Q_{zz})\\ &+ 2k_y^2k^2(2Q_{yz}^2 - Q_{yy}Q_{zz})\Big\},\end{aligned} \tag{10}$$

здесь одним и двумя штрихами обозначены соответственно действительная и мнимая компоненты функции $\Delta(k_xV)$.

Формулы (9), (10) описывают взаимодействие с поверхностью не только движущихся гомоядерных молекул, но также и более сложным (бензол, этилен и др.), обладающих более чем одной осью симметрии, либо зеркальной осью, либо центром симметрии. Во всех перечисленных случаях первым отличным от нуля моментом частицы является квадрупольный момент [5].

В статическом случае (при $V = 0$) получим $F_x = 0$, а для силы притяжения после интегрирования (10) по волновым векторам соответственно

$$\begin{aligned}F_z = &-\frac{5}{192z_0^6}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\\ &\times\Big\{3Q_{xx}^2 + 3Q_{yy}^2 + 8Q_{zz}^2 + 2(2Q_{xy}^2 + Q_{xx}Q_{yy})\\ &+ 8(2Q_{xz}^2 - Q_{xx}Q_{zz}) + 8(2Q_{yz}^2 - Q_{yy}Q_{zz})\Big\},\end{aligned} \tag{11}$$

где ε — статическая диэлектрическая проницаемость. Формула (11) значительно упрощается для аксиально-симметричной молекулы, ось которой перпендикулярна поверхности. В этом случае недиагональные компоненты тензора квадрупольного момента зануляются, а диагональные связаны между собой простым соотношением [5]

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2 \tag{12}$$

С учетом этих соотношений (11) приводится к виду

$$F_z = -\frac{15}{32}\,\frac{Q_{zz}^2}{z_0^6}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}. \tag{13}$$

Формулу (13) можно получить и более простым путем, рассматривая систему трех точечных зарядов $(e, -2e, e)$, координаты которых на оси z равны $(z_0 - a, z_0, z_0 + a)$, и с учетом определения (2) $Q_{zz} = 2ea^2$. Заряды-„изображения" в этом случае равны $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}(e, -2e, e)$ [9], поэтому, разлагая энергию системы, учитывающую взаимодействие зарядов со своими изображениями, в ряд по малому параметру a/z_0, в первом неисчезающем приближении получим

$$U(z_0) = -\frac{3}{8}\,\frac{e^2a^4}{z_0^5}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = -\frac{3}{32}\,\frac{Q_{zz}^2}{z_0^5}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}. \tag{14}$$

Учитывая соотношение $F_z = -\partial U(z_0)/\partial z_0$, видим, что из (14) непосредственно следует (13).

2. Частица с флуктуирующим квадрупольным моментом

Приступая к рассмотрению движущегося флуктуирующего квадруполя, следует заметить, что нейтральная частица наряду с флуктуационным квадрупольным моментом Q_{ik}^{sp} обладает еще и флуктуационным дипольным моментом $\mathbf{d}^{\mathrm{sp}}$ (как, впрочем, и другими флуктуационными мультипольными моментами). Для сферической частицы в ее собственной системе координат корреляция между Q_{ik}^{sp} и $\mathbf{d}^{\mathrm{sp}}$ отсутствует [6]. Однако при переходе к другой координатной системе с помощью параллельного переноса $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$ компоненты тензора квадрупольного момента, определяемого формулой (2), принимают вид [6]

$$Q_{ik}^{\mathrm{sp}'} = Q_{ik}^{\mathrm{sp}} - \frac{3}{2}\,(d_i^{\mathrm{sp}} b_k + d_k^{\mathrm{sp}} b_i) + (\mathbf{d}^{\mathrm{sp}}\mathbf{b})\delta_{ik}. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что в системе координат, связанной с поверхностью, флуктуационные дипольный и квадрупольный моменты коррелированы друг с другом, т. е. $\langle d_i^{\mathrm{sp}'} Q_{ik}^{\mathrm{sp}'} \rangle \neq 0$. Наличие этой корреляции приводит к тому, что суммарная сила, действующая на движущуюся нейтральную частицу со стороны поверхности, имеет вид

$$F_x = F_x^{d-d} + F_x^{d-Q} + F_x^{Q-Q}. \qquad (16)$$

Первое слагаемое в (16) описывает силу торможения в дипольном приближении, когда квадрупольный и более высокие мультипольные моменты равны нулю. До сих пор все работы, посвященные расчету диссипативных тангенциальных сил, ограничивались этим вкладом. Второй член в (16) учитывает корреляцию между дипольным и квадрупольным моментами, а последний описывает квадрупольный вклад. Формально он получается из общего выражения (16), если считать, что $\mathbf{d}^{\mathrm{sp}} = 0$. В данной работе ограничимся вычислением чисто квадрупольного вклада.

Для флуктуирующего квадрупольного момента выражение для тангенциальной силы принимает вид

$$F_x = \frac{1}{3}\left\langle \nabla_x Q_{ij}^{\mathrm{sp}} \nabla_j E_i^{\mathrm{in}} \right\rangle + \frac{1}{3}\left\langle \nabla_x Q_{ij}^{\mathrm{in}} \nabla_j E_i^{\mathrm{sp}} \right\rangle. \qquad (17)$$

В (17) первое слагаемое описывает вклад спонтанных флуктуаций квадрупольного момента, а второе — вклад флуктуационного электромагнитного поля поверхности. Уравнение Пуассона для фурье-компоненты потенциала $\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z)$ принимает вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z) &= \frac{4\pi}{3}\Big\{\big(k_x^2 Q_{xx}(\omega - k_x V) \\ &+ k_y^2 Q_{yy}(\omega - k_x V) + 2k_x k_y Q_{xy}\big(\omega - k_x V\big) \\ &\times \delta(z - z_0 - \big(2ik_x Q_{xz}(\omega - k_x V) \\ &+ 2ik_y Q_y(\omega - k_x V)\big)\delta'(z - z_0) \\ &- Q_{zz}(\omega - k_x V)\delta''(z - z_0)\Big\}. \end{aligned} \qquad (18)$$

Решение уравнение (18) (см. Приложение) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z) = \frac{2\pi}{3k}\,\Delta(\omega \exp\big(-k(z - z_0)\Big\{&k_x^2 Q_{xx}(\omega - k_x V) \\ &+ k_y^2 Q_{yy}(\omega - k_x V) + 2k_x k_y Q_{xy}(\omega - k_x V) \\ &- 2ik_x Q_{xz}(\omega - k_x V) - 2ik_y Q_{yz}(\omega - k_x V) \\ &- k^2 Q_{zz}(\omega - k_x V)\Big\}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Для вычисления первого слагаемого (17) разлагаем Q_{ij}^{sp} в частотный интеграл Фурье, а компоненты поля E_i^{in} — в интеграл Фурье по частоте и двумерному волновому вектору, выражая затем фурье-компоненты индуцированного поля через $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ с учетом (19). Получающийся в результате расчета коррелятор квадрупольного момента вычисляется при помощи флуктуационно-диссипативного соотношения [6]

$$\begin{aligned}\left\langle Q_{ik}^{\mathrm{sp}}(\omega) Q_{lj}^{\mathrm{sp}}(\omega') \right\rangle &= 2\pi\delta(\omega + \omega')\frac{3\hbar}{4}\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \\ &\times \mathrm{Im}\,\alpha^{(2)}(\omega)\left(\delta_{il}\delta_{kj} + \delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\delta_{lj}\right), \end{aligned} \qquad (20)$$

где $\alpha^{(2)}(\omega)$ — квадрупольная поляризуемость. После дальнейших преобразований учитывающих четность действительных частей функций $\alpha^{(2)}(\omega)$, $\varepsilon(\omega)$ и нечетность мнимых частей, вклад спонтанных флуктуаций квадрупольного момента в тангенциальную силу можно записать в виде

$$\begin{aligned}F_x^{(1)} = -\frac{2\hbar}{3\pi^2}\iiint\limits_0^{\infty} d\omega\, dk_x\, dk_y k_x k^3 \exp(-2kz_0)\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2k_B T_1} \\ \times\, \alpha^{(2)''}(\omega)\big[\Delta''(\omega + k_x V) - \Delta''(\omega - k_x V)\big], \end{aligned} \qquad (21)$$

где T_1 — температура частицы.

При вычислении второго слагаемого формулы (17) используем линейную интегральную связь между индуцированным квадрупольным моментом и фурье-компонентами флуктуационного поля поверхности, разлагая входящие в (17) компоненты поля E_i^{sp} в интегралы Фурье по ω, k_x, k_y. Возникающие в ходе расчета корреляторы пространственных производных поля поверхности выражаются, в соответствии с общим результатом теории электромагнитных флуктуаций [10], через компоненты запаздывающей гриновской функции фотона в среде. В результате дальнейшхи преобразований, аналогичных сделанным при выводе (21), получим

$$\begin{aligned}F_x^{(2)} = -\frac{2\hbar}{3\pi^2}\iiint\limits_0^{\infty} d\omega\, dk_x\, dk_y k_x k^3 \exp(-2kz_0)\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \\ \times\, \Delta''(\omega)\big[\alpha^{(2)''}(\omega + k_x V) - \alpha^{(2)''}(\omega - k_x V)\big], \end{aligned} \qquad (22)$$

где T_2 — температура поверхности. Складывая (21), (22), окончательно получим

$$F_x^{Q-Q} = -\frac{2\hbar}{3\pi^2} \iiint\limits_0^\infty d\omega\, dk_x\, dk_y k_x k^3 \exp(-2kz_0)$$
$$\times \left\{ \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T_1} \alpha^{(2)''}(\omega) \left[\Delta''(\omega + k_x V) - \Delta''(\omega - k_x V) \right] \right.$$
$$\left. + \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \Delta''(\omega) \left[\alpha^{(2)''}(\omega + k_x V) - \alpha^{(2)''}(\omega - k_x V) \right] \right\}. \tag{23}$$

Аналогичные вычисления для силы притяжения квадруполя к поверхности приводят к формуле

$$F_z^{Q-Q} = -\frac{2\hbar}{3\pi^2} \iiint\limits_0^\infty d\omega\, dk_x\, dk_y k^4 \exp(-2kz_0)$$
$$\times \left\{ \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T_1} \alpha^{(2)''}(\omega) \left[\Delta'(\omega + k_x V) + \Delta'(\omega - k_x V) \right] \right.$$
$$\left. + \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \Delta''(\omega) \left[\alpha^{(2)'}(\omega + k_x V) + \alpha^{(2)'}(\omega - k_x V) \right] \right\}. \tag{24}$$

В заключение рассмотрим важные с практической точки зрения частные случаи формул (23), (24). Так, при равенстве температур частицы и поверхности в линейной приближении по скорости из (23) следует

$$F_x = \frac{15\hbar V}{8\pi z_0^7} \int\limits_0^\infty d\omega \operatorname{Im} \alpha^{(2)}(\omega \operatorname{Im} \Delta(\omega) \frac{d}{d\omega} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T}. \tag{25}$$

Формула (25) имеет такую же структуру интеграла по частоте, как и формула для диполь-дипольной силы [1,4], отличаясь от нее дополнительным малым множителем вида $\frac{5}{2} a^2/z_0^2$, где a — характерный линейный размер квадруполя. Параметр a/z_0, очевидно, характеризует сходимость суммарного взаимодействия частицы с поверхностью при разложении в ряд по мультипольным моментам.

Для покоящейся частицы при $V = 0$ и $T_1 = T_2 = 0$ из (24) после интегрирования по волновым векторам и поворота контура интегрирования по частоте на угол $\pi/2$ для силы притяжения частицы к поверхности получим

$$F_z = -\frac{5\hbar}{4\pi z_0^6} \int\limits_0^\infty d\omega\, \alpha^{(2)}(i\omega) \Delta(i\omega). \tag{26}$$

Из (26) вытекает известная формула для консервативного потенциала взаимодействия флуктуирующего квадруполя с поверхностью [11]

$$U = -\frac{\hbar}{4\pi z_0^5} \int\limits_0^\infty d\omega\, \alpha^{(2)}(i\omega) \Delta(i\omega). \tag{27}$$

3. Заключительные замечания

Очевидно, что в случае $a/z_0 \ll 1$ квадруполь-квадрупольный вклад в нормальную и тангенциальную силы взаимодействия движущейся частицы с поверхностью является пренебрежимо малым по сравнению с диполь-дипольным. Однако структура частотных интегралов в (25)–(27), вообще говоря, не позволяет ввести малый параметр a/z_0 формальным путем. Поэтому, в частности, при резонансной структуре входящих в подынтегральные выражения (в (25)–(27)) функций вполне возможна ситуация, когда вклады более высоких мультипольных моментов окажутся преобладающими.

При $T_1 = T_2 = 0$ формула (25) и диполь-дипольный вклад [1,4] приводят к нулевой тангенциальной силе в первом порядке по скорости. Для определения вязкого коэффициента трения в этом случае авторы [12] применяли теорию возмущений более высокого порядка (основанную на дипольном приближении) и получили зависимость $\sim z_0^{-10}$, использовавшуюся при интерпретации экспериментов по трению адсорбатов. Учет мультипольных моментов, не учитываемых теорией [12], как следует из (25), вносит вклады с более слабой зависимостью сил от расстояния. Поэтому их нельзя игнорировать.

Заметим также, что полученные формулы могут быть легко обобщены на случай нелокальных диэлектрических функций поверхности путем формальной замены [13].

Приложение. Решение уравнения Пуассона для фурье-компонент электрического потенциала, создаваемого движущимся мультиполем

Для квадрупольной частицы уравнение Пуассона для фурье-компонент электрического потенциала совпадает с (4) и (18) в случаях постоянного и флуктуирующего квадруполей. Не ограничивая общности, можем записать эти уравнения в виде

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \varphi_{\omega\mathbf{k}}(z) = A \cdot \delta(z - z_0) + B \cdot \delta'(z - z_0)$$
$$+ C \cdot \delta''(z - z_0) + D \cdot \delta'''(z - z_0), \tag{П1}$$

где A, B, C, D — не зависящие от z коэффициенты, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Общее решение уравнения (П1) представляется суммой общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z) = C_1 \exp(-kz) + C_2 \exp(kz) \tag{П2}$$

и частного решения неоднородного уравнения (П1). Для отыскания последнего находим функцию Грина, отвечающую данной задаче и удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) G(z, z') = \delta(z - z'). \qquad (\text{П}3)$$

Непосредственной подстановкой в (П3) можно проверить, что искомая функция Грина имеет вид

$$G(z, z') = -\frac{1}{2k} \exp(-k|z - z'|). \qquad (\text{П}4)$$

Далее, в соответствии с общим методом нахождения частного решения уравнения типа (П1) [14], образуем свертку правой части (П1) с функцией Грина (П4)

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z) = \int\limits_0^\infty G(z, z')\big[A\delta(z' - z_0) + B\delta(z' - z_0) + C\delta''(z' - z_0) + D\delta'''(z' - z_0)\big]\, dz'. \qquad (\text{П}5)$$

При вычислении свертки используются известные соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x) f(x)\, dx = (-1)^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f^{(m)}(x)\, dx,$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign}(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x).$$

В результате из (П5) получаем частное решение вида

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z) = \exp(-k|z - z_0|)\left\{-\frac{A}{2k} + \frac{B}{2}\operatorname{sign}(z - z_0) - \frac{Ck}{2} + C\delta(z - z_0) + \frac{Dk^2}{2}\operatorname{sign}(z - z_0) - Dk \operatorname{sign}(z - z_0)\delta(z - z_0) + D\delta'(z - z_0)\right\}. \qquad (\text{П}6)$$

Сумма (П2) и (П6) дает общее решение уравнения (П1). Коэффициенты C_1, C_2 ($C_1 = 0$ при $z < 0$, $C_2 = 0$ при $z > 0$) определяются из условий непрерывности потенциала и нормальной составляющей электрической индукции на поверхности $z = 0$, в результате чего имеем

$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1}\, \frac{A + Bk + Ck^2 + Dk^3}{2k} \exp(-kz_0). \qquad (\text{П}7)$$

Исключая из общего решения собственное электромагнитное поле частицы (член, не равный нулю при $\varepsilon(\omega) = 1$), для индуцированного потенциала в области $z > 0$ получим

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}(z) = \Delta(\omega)\, \frac{A + Bk + Ck^2 + Dk^3}{2k} \exp\big(-k(z + z_0)\big). \qquad (\text{П}8)$$

где $\Delta(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)-1}{\varepsilon(\omega)+1}$.

Обобщение (П8) на случай мультипольных моментов произвольного порядка производится элементарно. При равенстве нулю октупольного момента L_{ikm} коэффициент D в (П8) следует положить равным нулю.

При записи решений уравнений (4) и (18) с помощью (П8) имеем $D = 0$, а коэффициенты A, B, C находим непосредственным сравнением правых частей (4) и (18) с (П1).

Список литературы

[1] M.S. Tomassone, A. Widom. Phys. Rev. **B56**, 4938 (1997).
[2] A.A. Kyasov, G.V. Dedkov. Surface Sci. **463**, 11 (2000).
[3] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. ФТТ **43**, *1*, 169 (2001).
[4] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. Направлено в Phys. Lett. A.
[5] И.Г. Каплан. Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий. Наука, М. (1982).
[6] Ю.С. Бараш. Силы Ван-дер-Ваальса. Наука, М. (1988).
[7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Наука, М. (1973).
[8] М.М. Бредов. В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. Классическая электродинамика. Наука, М. (1985).
[9] И.Е. Тамм. Основы теории электричества. Наука, М. (1976).
[10] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Статическая физика. Ч. 2. Наука, М. (1978).
[11] X.P. Jiang, F. Toigo, M.W. Cole. Surface Sci. **148**, 21 (1984).
[12] B.N.J. Persson, A.I. Volokitin. J. Chem. Phys. **103**, 8679 (1995).
[13] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. Письма в ЖТФ **27**, *8*, 68 (2001).
[14] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. Наука, М. (1988).