

Спектр нормальных волн в двумерной решетке нейтральных атомов

© А.В. Окомельков

Институт физики микроструктур Российской академии наук,
603600 Нижний Новгород, Россия

E-mail: okom@ipm.sci-nnov.ru

(Поступила в Редакцию 10 июля 2001 г.)

В окончательной редакции 6 декабря 2001 г.)

Рассмотрено формирование спектра акустических фононов в 2D-решетке, состоящей из нейтральных атомов. Показано, что в двумерной прямоугольной решетке спектр нормальных волн не может быть получен лишь при учете взаимодействия ближайших соседей. Получены и проанализированы дискретные уравнения для описания нормальных волн. Исследована возможность возникновения анизотропных спектров элементарных возбуждений для различных значений параметров потенциала межатомного взаимодействия. Анизотропия фононных спектров в двумерных системах может проявляться в различных кинетических эффектах, в которых определяющую роль играет электрон-фононное взаимодействие.

Акустические фононы в твердых телах и их спектр исследуются довольно давно (см., например, [1,2]). При этом простейшей рассматриваемой моделью является модель распространения продольных волн в одномерной струне, состоящей из нейтральных атомов. Предположим, что u_i — смещение i -й частицы из положения равновесия. Тогда для этой частицы обычно записывают следующее уравнение движения (предполагается, что массы всех частиц равны m [1]):

$$m\ddot{u}_i = \beta(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad (1)$$

где β — модуль упругости [1]. Решение уравнения (1) вида

$$u_n = A \exp\{i(qna - \omega t)\} \quad (2)$$

приводят, как известно [1], к дисперсионному соотношению для акустических фононов — квазичастиц, распространяющихся по струне без затухания,

$$\omega(q) = \sqrt{4\beta/m} |\sin(qa/2)|, \quad \omega(-q) = \omega(q), \quad (3)$$

наибольшая частота колебаний в такой решетке $\omega_m = \sqrt{4\beta/m}$.

Рассмотрение спектра нормальных волн в случае двумерной решетки атомов представляет интерес по следующим причинам. В настоящее время весьма интенсивно исследуются свойства квазидвумерных (слоистых) систем типа $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{Cu}_2\text{O}_4$, $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCuO}_{6+\delta}$ и им подобных [3–8]. Отчасти это вызвано наблюдаемым эффектом высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) в таких системах, что привело к появлению большого числа работ по изучению разнообразных свойств этих соединений как в сверхпроводящем, так и в нормальном состоянии. Экспериментальные результаты по фотоэмиссии электронов показывают наличие сильной анизотропии сверхпроводящего параметра порядка ВТСП [9,10]. Тогда, если предположить, что в ВТСП-материалах существует традиционный механизм спаривания носителей вследствие электрон-фононного взаимодействия, представляет интерес исследование возможности существования анизотропии фононных спектров с тем, чтобы с их помощью объяснить анизотропию параметра порядка.

В настоящей работе показана возможность существования анизотропных фононных спектров при определенных параметрах потенциала межатомного взаимодействия. Распространение на двумерный случай упомянутой ранее квазиодномерной модели для получения спектра акустических фононов встречает некоторые трудности, заключающиеся в том, что для прямоугольной решетки атомов разумный фононный спектр не может быть получен при учете в уравнениях движения взаимодействий частиц лишь с ближайшими соседями. Этот вопрос также рассмотрен в данной работе. Получены дискретные уравнения для описания нормальных волн в двумерной системе и проанализирована их зависимость от параметров межатомного взаимодействия.

Взаимодействие нейтральных атомов в двумерной прямоугольной решетке

Рассмотрим фононные моды в двумерной прямоугольной решетке атомов. Изучая формирование собственных мод в двумерной системе нейтральных атомов, рассмотрим анизотропию спектров этих волн. Этот вопрос представляется важным, так как анизотропия фононных спектров может проявляться в различных эффектах, где важную роль играет, например, электрон-фононное взаимодействие.

1) Взаимодействие ближайших соседей. Простейший потенциал парного взаимодействия нейтральных атомов имеет вид потенциала Ленарда-Джонса

$$\phi(r) = \frac{A_1}{r^{12}} - \frac{A_2}{r^6}. \quad (4)$$

На рис. 1 изображен вид потенциала (4) в зависимости от расстояния между частицами r (параметр r_0 соответствует положению минимума потенциала взаимодействия), а также показана сила парного взаимодействия между частицами $F(r) \propto -\partial\phi/\partial r$. На графике $F(r)$ в области $r > r_0$ отмечены три различные области: $g > 0$, $g = 0$ и $g < 0$ (смысл этого разделения обсудим далее).

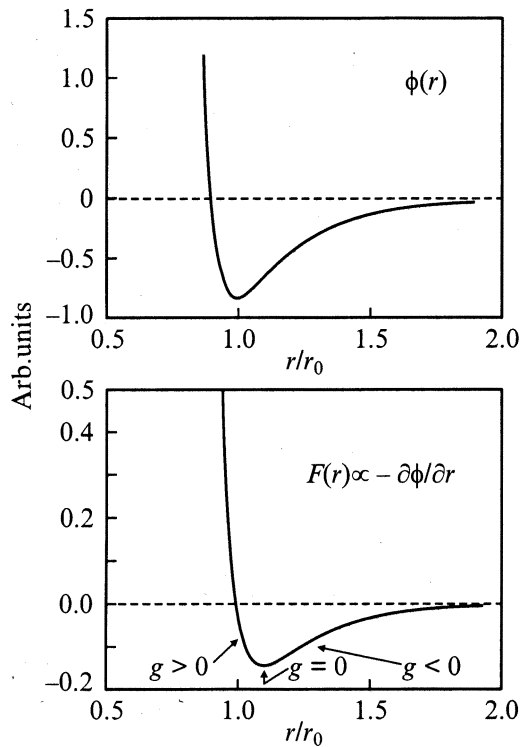


Рис. 1. Качественный вид потенциала взаимодействия $\phi(r)$ и силы взаимодействия $F(r) \propto -\partial\phi/\partial r$ для случая двух нейтральных атомов. Координата r нормирована на величину r_0 — координату минимума потенциала $\phi(r)$. На графике $F(r)$ отмечены три различные области: 1) $g > 0$ — область, где с увеличением расстояния r сила притяжения двух частиц увеличивается по модулю; 2) $g = 0$ — область, где сила притяжения двух частиц слабо изменяется с расстоянием; 3) $g < 0$ — область, где с увеличением расстояния r сила притяжения двух частиц уменьшается по модулю. Потенциал $\phi(r)$ может существенно изменяться в зависимости от величины констант A_1 и A_2 в формуле (4).

Предположим, что решетка прямоугольная с параметрами a и b . Рассмотрим модель взаимодействия ближайших соседей, в которой для получения уравнений движения каждой частицы (i, j) учитывается ее взаимодействие лишь с четырьмя ближайшими соседями $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$ и $(i, j - 1)$ (рис. 2). Обсудим сначала взаимодействие двух частиц (i, j) и $(i + 1, j)$. Для этого воспользуемся схемой, изображенной на рис. 3. Используем следующие обозначения: $u_{i,j}$ и $u_{i+1,j}$ — x -компоненты смещения частиц, $v_{i,j}$ и $v_{i+1,j}$ — y -компоненты смещения частиц. Квадрат расстояния между частицами равен (рис. 3)

$$r_{(i,j);(i+1,j)}^2 = (a + u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i+1,j} - v_{i,j})^2. \quad (5)$$

Обозначим через φ угол между вектором $\mathbf{r}_{(i,j);(i+1,j)}$ и направлением оси x , так что

$$\sin \varphi \approx (v_{i+1,j} - v_{i,j})/a, \quad \cos \varphi \approx 1. \quad (6)$$

Модуль силы, действующей на частицу (i, j) со стороны частицы $(i + 1, j)$, запишется в виде

$$\begin{aligned} F_{(i,j);(i+1,j)} &= \left| \tilde{\alpha} \left\{ \sqrt{(a + u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i+1,j} - v_{i,j})^2} - a \right\} \right| \\ &\approx \tilde{\alpha} |u_{i+1,j} - u_{i,j}| \end{aligned} \quad (7)$$

(α — постоянная).

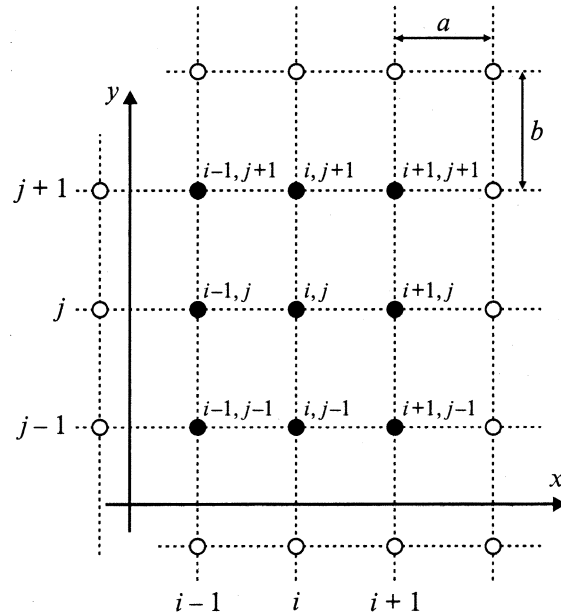


Рис. 2. Схема прямоугольной решетки. Для получения уравнений движения частицы с координатами (i, j) будем учитывать сначала четыре, а затем восемь соседних частиц, отмеченных темными кружками. a и b — расстояния между частицами вдоль осей x и y соответственно.

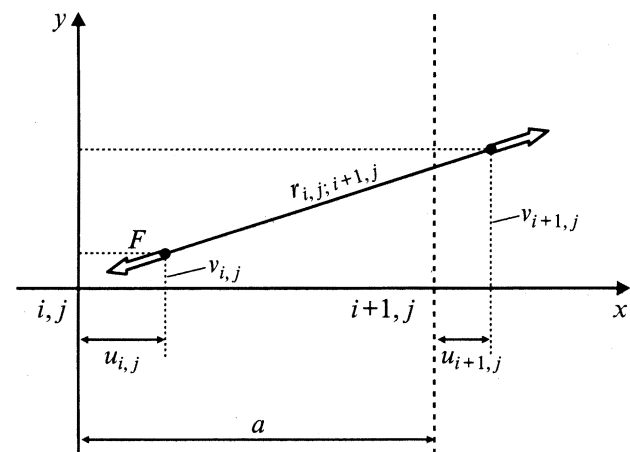


Рис. 3. Схема, иллюстрирующая взаимодействие двух частиц (i, j) и $(i + 1, j)$.

Тогда для проекций этой силы на оси координат в линейном приближении по величине смещений имеем

$$F_x\{(i, j)(i + 1, j)\} = \tilde{\alpha}(u_{i+1,j} - u_{i,j}), \quad (8)$$

$$F_y\{(i, j)(i + 1, j)\} = 0. \quad (9)$$

Знак в формуле (8) легко проверить. При $u_{i,j} = 0$ и $u_{i+1,j} > 0$ расстояние между частицами увеличивается по сравнению с равновесным (a) и в соответствии с видом потенциала парного взаимодействия (например, (4)) частицы начинают взаимодействовать за счет сил притяжения. При $u_{i,j} = 0$ и $u_{i+1,j} < 0$ частицы взаимодействуют за счет сил отталкивания. Аналогично записываются выражения для проекций сил, действующих на частицу (i, j) со стороны других частиц.

Окончательно нетрудно записать уравнения движения для частицы на узле (n, m) в безразмерных переменных. Для этого в качестве характерной размерной частоты выберем $\omega^* = (\tilde{\alpha}/m)^{1/2}$ и перейдем к безразмерным переменным $\omega^*t \rightarrow t$, $\gamma = \beta/\tilde{\alpha}$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{n,m} &= u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}, \\ \ddot{v}_{n,m} &= \gamma(v_{n,m+1} - 2v_{n,m} + v_{n,m-1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что в используемом приближении мы получили для функций u и v независимые уравнения. Для нахождения дисперсионных соотношений для волн в такой системе рассмотрим систему уравнений на безграничной плоскости. Решения системы уравнений (10) будем искать, как обычно, в виде

$$\begin{aligned} u_{n,m} &= A \exp\{i(k_x na + k_y mb - \omega t)\}, \\ v_{n,m} &= B \exp\{i(k_x na + k_y mb - \omega t)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получаем два независимых уравнения

$$\omega^2 = 4 \sin^2(k_x a/2), \quad \omega^2 = 4\gamma \sin^2(k_y b/2). \quad (12)$$

Для существования незатухающих волн (11) уравнения (12) должны иметь действительные решения ω при действительных k_x, k_y . Введем безразмерные переменные $x = k_x a/2$, $y = k_y b/2$, $\alpha = a/b$. При этом $k_y b/2 = (k_y a/2)(b/a) = y/\alpha$. Причем физический смысл имеют, как обычно, только волны с волновыми векторами из первой зоны Бриллюэна

$$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \quad -\alpha\pi/2 \leq y \leq \alpha\pi/2. \quad (13)$$

В этих переменных уравнения (12) в полярных координатах $\mathbf{r}(x, y) \rightarrow \mathbf{r}(r, \varphi)$, где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, имеют вид

$$\omega^2 = 4 \sin^2(r \cos \varphi), \quad \omega^2 = 4\gamma \sin^2\left(\frac{r}{\alpha} \sin \varphi\right). \quad (14)$$

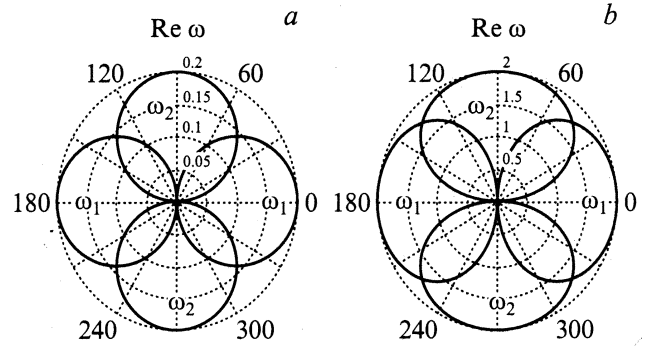


Рис. 4. Действительные решения (14) — графики функций $\omega_1(\varphi)$ и $\omega_2(\varphi)$ в полярных координатах для различных значений параметров. a — $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $r = 0.1$; b — $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $r = 1.5$.

Решения уравнений (14) — действительные ($\text{Re } \omega$) значения ω двух ветвей дисперсионных кривых $\omega_1(\varphi)$ и $\omega_2(\varphi)$ — показаны на рис. 4 для различных значений параметров. Заметим, что две ветви ($\text{Re } \omega_1$ и $\text{Re } \omega_2$) являются незатухающими, так как для них $\text{Im } \omega_1 = \text{Im } \omega_2 = 0$. Таким образом, в приближении взаимодействия ближайших соседей мы получили пересекающиеся кривые.

Возникновение пересекающихся кривых для дисперсионных зависимостей связано с симметрией прямоугольной решетки и с приближением, в котором учитывается взаимодействие ближайших соседей. В этом приближении уравнения для проекций смещения разделяются, и колебания вдоль осей x и y оказываются независимыми. Следует отметить, что такое расщепление уравнений движения не является спецификой двумерного случая и будет также иметь место в трехмерной решетке. Однако такое пересечение дисперсионных кривых неверно с общезначимой точки зрения. Поэтому для получения разумных дисперсионных кривых нужно или рассматривать решетки более сложной симметрии, или, если ограничиться случаем прямоугольной решетки, учесть взаимодействия с другими атомами, что приведет к связным (неразделяющимся) уравнениям для смещений u и v . Проиллюстрируем это путем учета взаимодействия рассматриваемой частицы прямоугольной решетки со следующими (более далекими) четырьмя соседями.

2) Взаимодействие с восемью соседними частицами. Учтем теперь взаимодействие с восемью ближайшими соседями, что схематично показано на рис. 2. Рассмотрим взаимодействие „по диагонали“ между частицами (i, j) и $(i + 1, j + 1)$. Вычислив величину проекций на оси координат силы взаимодействия между этими частицами, легко записать аналогичные выражения для сил взаимодействия с другими частицами. Схема такого взаимодействия изображена на рис. 5. Все вычисления проводим в линейном приближении по величине смещения частиц.

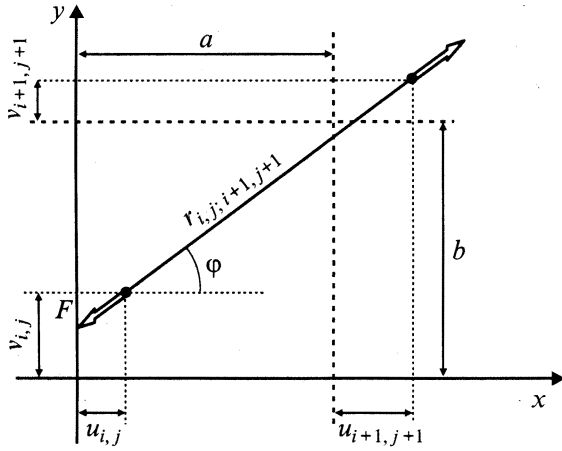


Рис. 5. Схема, иллюстрирующая взаимодействие между частицами (i, j) и $(i + 1, j + 1)$.

Расстояние между частицами (i, j) и $(i + 1, j + 1)$ находится по формуле

$$r_{(i,j)(i+1,j+1)}^2 = (a + u_{i+1,j+1} - u_{i,j})^2 + (b + v_{i+1,j+1} - v_{i,j})^2 \approx (a^2 + b^2) + 2a(u_{i+1,j+1} - u_{i,j}) + 2b(v_{i+1,j+1} - v_{i,j}). \quad (15)$$

Если ближайшие соседи (уже рассмотренные нами четыре частицы) занимают положения, приблизительно соответствующие минимуму потенциала ϕ (точка $r = r_0$ на рис. 1), то более далекие частицы (в том числе и „диагональные“ $(i + 1, j + 1)$, $(i + 1, j - 1)$, $(i - 1, j + 1)$, $(i - 1, j - 1)$) взаимодействуют с частицей (i, j) силами притяжения (см. также рис. 1).

При различных значениях параметров потенциала спектры собственных волн могут получаться разными. Для простоты вместо рассмотрения потенциала (4) для силы взаимодействия частиц запишем следующее выражение:

$$F\{(i, j)(i + 1, j + 1)\} \simeq F\left(r = \sqrt{a^2 + b^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{r=\sqrt{a^2+b^2}} \delta \mathbf{r}. \quad (16)$$

Обозначим $F(r = \sqrt{a^2 + b^2}) = F_0 > 0$ (в данном случае реализуется притяжение частиц),

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r=\sqrt{a^2+b^2}} = F_0 g (a^2 + b^2)^{-1/2}.$$

Введенная здесь константа g может принимать положительные, отрицательные значения и быть равной нулю в зависимости от параметров потенциала межатомного взаимодействия. Схематично соответствующие области ($g > 0$, $g = 0$, $g < 0$) отмечены на рис. 1. Следует заметить, что для изображенного на рис. 1 потенциала взаимодействия для „диагонального“ взаимодействия частиц реализуется $g < 0$ (при $a = b$, $r = r_0$ — расстояние

между ближайшими соседями, тогда расстояние „по диагонали“ составляет $r_0\sqrt{2} \approx 1.41r_0$). Но при других значениях параметров потенциала взаимодействия, если минимум $F(r)$ сдвинется вправо (в область $r \geq r_0\sqrt{2}$), возможен случай $g \geq 0$. Введенные здесь константы F_0 и g будем использовать вместо констант потенциала (4). Отличие заключается только в том, что смысл этих констант более очевиден (напомним, что мы рассматриваем только малые отклонения частиц от положения равновесия). Теперь можно записать

$$F\{(i, j)(i + 1, j + 1)\} = F_0 \left\{ 1 + \frac{ga(u_{i+1,j+1} - u_{i,j})}{(a^2 + b^2)} + \frac{gb(v_{i+1,j+1} - v_{i,j})}{(a^2 + b^2)} \right\}. \quad (17)$$

Подставляя выражения для $\cos \phi$ и $\sin \phi$, для проекций сил на оси координат в линейном приближении имеем

$$F_x\{(i, j)(i + 1, j + 1)\} = F\{(i, j)(i + 1, j + 1)\} \cos \phi \approx \frac{F_0 a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left\{ 1 + \frac{(b^2 + ga^2)}{a(a^2 + b^2)}(u_{i+1,j+1} - u_{i,j}) + \frac{b(g - 1)}{(a^2 + b^2)}(v_{i+1,j+1} - v_{i,j}) \right\}, \quad (18)$$

$$F_y\{(i, j)(i + 1, j + 1)\} = F\{(i, j)(i + 1, j + 1)\} \sin \phi \approx \frac{F_0 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left\{ 1 + \frac{a(g - 1)}{(a^2 + b^2)}(u_{i+1,j+1} - u_{i,j}) + \frac{(a^2 + gb^2)}{b(a^2 + b^2)}(v_{i+1,j+1} - v_{i,j}) \right\}. \quad (19)$$

Аналогично можно записать выражения для проекций сил, действующих на частицу (i, j) со стороны других частиц. Суммируя проекции сил, действующих на частицу (i, j) , получаем следующие уравнения для смещений $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$, которые теперь не являются независимыми:

$$m\ddot{u}_{i,j} = \tilde{\alpha}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{F_0 ab}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \times \left\{ \frac{(b^2 + ga^2)}{ab} [(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j-1}) + (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j+1})] + (g - 1) \times [(v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1}) - (v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j+1})] \right\}, \quad (20)$$

$$m\ddot{v}_{i,j} = \tilde{\beta}(v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}) + \frac{F_0 ab}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \times \left\{ \frac{(a^2 + gb^2)}{ab} [(v_{i+1,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j-1}) + (v_{i+1,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j+1})] + (g - 1) \times [(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}) - (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1})] \right\}. \quad (21)$$

Переходя к безразмерным переменным $\omega^* = (\tilde{\alpha}/m)^{1/2}$, $\omega^*t \rightarrow t$, $\alpha = a/b$, $\gamma = \beta/\tilde{\alpha}$, $F = F_0ab/[\tilde{\alpha}(a^2 + b^2)^{3/2}]$ и подставляя в (20) и (21) решения в виде (11), из условия равенства нулю детерминанта системы алгебраических уравнений получаем следующее дисперсионное уравнение, которое в данном случае является биквадратным уравнением относительно ω :

$$\begin{aligned} & \omega^4 - 2\omega^2 \left\{ \sin^2 x + \gamma \sin^2 \left(\frac{y}{\alpha} \right) + \frac{F}{\alpha} (1+g)(1+\alpha^2) \right. \\ & \times \left[\sin^2 \left(x + \frac{y}{\alpha} \right) + \sin^2 \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) \right] \left. \right\} + 16 \left\{ \sin^2 x \right. \\ & + \frac{F}{\alpha} (1+g\alpha^2) \left[\sin^2 \left(x + \frac{y}{\alpha} \right) + \sin^2 \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) \right] \left. \right\} \quad (22) \\ & \times \left\{ \gamma \sin^2 \left(\frac{y}{\alpha} \right) + \frac{F}{\alpha} (\alpha^2 + g) \left[\sin^2 \left(x + \frac{y}{\alpha} \right) + \sin^2 \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) \right] \right\} \\ & - \left[4F(g-1) \sin(2x) \sin \left(\frac{2y}{\alpha} \right) \right]^2 = 0. \end{aligned}$$

Решения уравнения (22) легко записываются аналитически и могут быть проанализированы с помощью численных расчетов. Рассмотрим угловую зависимость дисперсионных кривых при заданных значениях модуля волнового числа. Для этого перейдем к полярным координатам в импульсном пространстве $\mathbf{r}(x, y) \rightarrow \mathbf{r}(r, \varphi)$. Уравнение (22) имеет два комплексных решения: ω_1

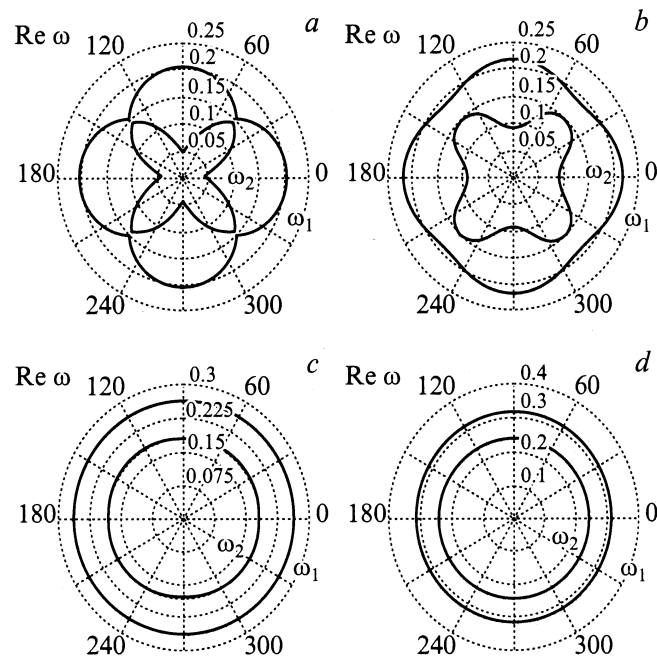


Рис. 6. Решения уравнения (22) — графики функций $\omega_1(\varphi)$ и $\omega_2(\varphi)$ в полярных координатах для значений параметров $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $r = 0.1$. *a* — $F = 0.03$, $g = 0.03$; *b* — $F = 0.1$, $g = 0.1$; *c* — $F = 0.3$, $g = 0.3$; *d* — $F = 0.5$, $g = 0.5$. Во всех этих случаях решения действительные, $\text{Im } \omega = 0$.

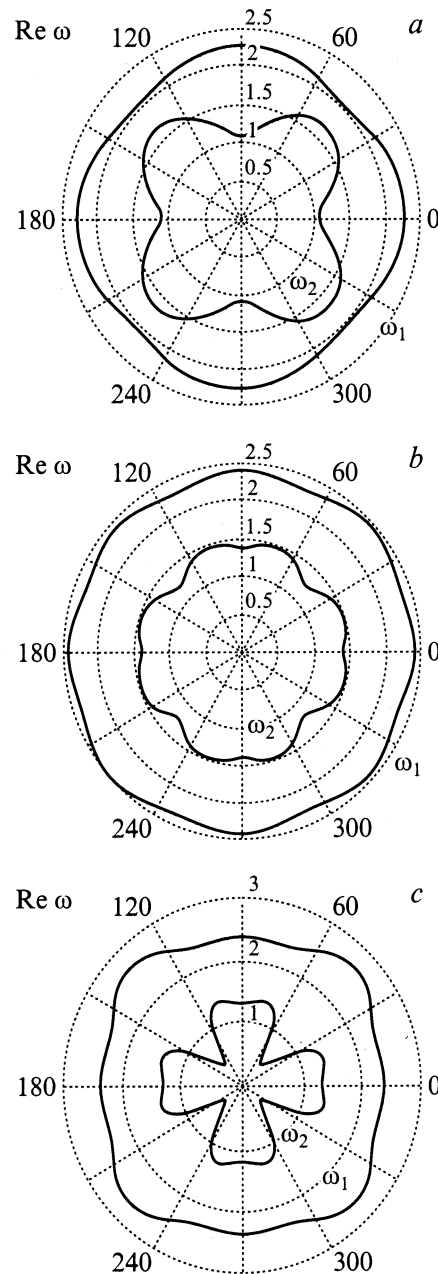


Рис. 7. Решения уравнения (22) — графики функций $\omega_1(\varphi)$ и $\omega_2(\varphi)$ в полярных координатах для значений параметров $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $r = 1.5$. *a* — $F = 0.2$, $g = -0.2$; *b* — $F = 0.5$, $g = -0.5$; *c* — $F = 0.7$, $g = -0.7$. Во всех этих случаях решения действительные, $\text{Im } \omega = 0$.

и ω_2 . Эти решения в полярных координатах для различных значений параметров показаны на рис. 6–9.

Из (22) видно, что при $F = 0$ это уравнение переходит в записанную нами ранее систему уравнений (14), которая дает вырожденные решения типа изображенных на рис. 4. Снятие вырождения в спектре собственных волн для акустических фононов иллюстрирует рис. 6, *a–d*. Отметим, что в данном случае $g > 0$, т.е. потенциал

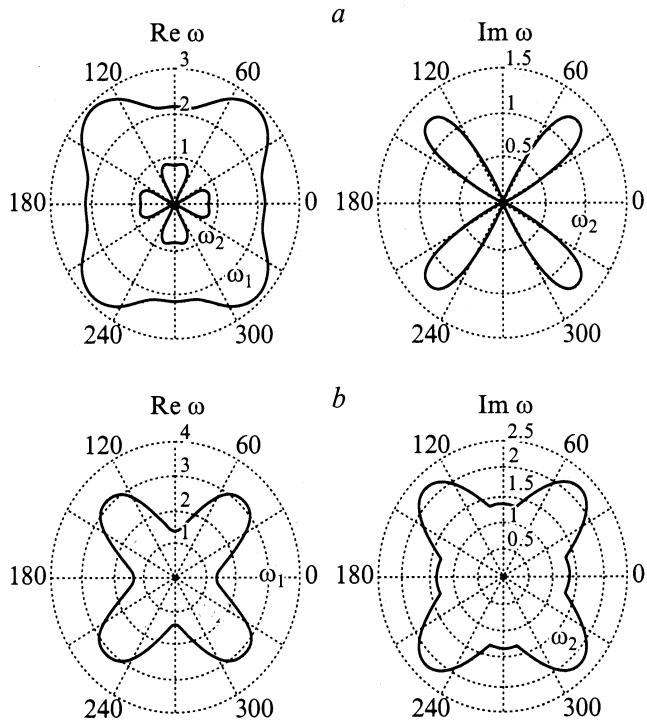


Рис. 8. Решения уравнения (22) в полярных координатах; $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $r = 1.5$. *a* — $F = 0.9$, $g = -0.9$, для этого случая $\text{Im } \omega_1 = 0$; *b* — $F = 1.2$, $g = -1.2$, для этого случая $\text{Re } \omega_2 = 0$, $\text{Im } \omega_1 = 0$.

взаимодействия более плавный, чем изображенный на рис. 1: рассматриваемый здесь случай $g > 0$ означает, что на расстоянии между частицами по диагонали (для квадратной решетки $r = r_0\sqrt{2}$) мы попадаем в область $g > 0$. На рис. 6 случаи *a-d* соответствуют последовательно увеличивающимся параметрам взаимодействия частиц. Сначала при слабом взаимодействии (рис. 6, *a*) происходит снятие вырождения: дисперсионные кривые расщепляются. При этом оба решения (ω_1 и ω_2) остаются действительными. С увеличением взаимодействия (рис. 6, *c*) это расщепление увеличивается, и мы приходим к двум действительным изотропным методам (рис. 6, *c* и *d*). Причем для случая *d* расстояние между модами ω_1 и ω_2 несколько уменьшается. Очевидно, что в рассматриваемом нами приближении (из уравнения (22)) при сильном увеличении параметров взаимодействия F и g дисперсионные кривые снова начнут пересекаться. Это означает, что при больших значениях F и g приближение взаимодействия атома с восьмью ближайшими соседями перестает работать, и для получения разумных дисперсионных кривых необходимо учитывать более далекие взаимодействия. В целом для этого случая (рис. 6) мы получили довольно естественный результат: взаимодействие „по диагонали“ приводит к снятию вырождения и формированию спектра, состоящего из двух мод.

Более сложные анизотропные спектры могут формироваться при $g < 0$ (это случай, практически соответствующий форме потенциала, показанной на рис. 1: при $r = r_0\sqrt{2}$ мы как раз имеем $g < 0$). В этом случае при увеличении параметров потенциала взаимодействия сначала, как раньше, происходит расщепление мод (рис. 7, *a*). Затем (рис. 7, *b*) формируется почти изотропный двухмодовый спектр. Далее (рис. 7, *c*) одна мода спектра (ω_2) становится сильно анизотропной, но оба решения при этом остаются действительными. При дальнейшем увеличении F и $|g|$ (рис. 8), как только $\text{Re } \omega_2$ (в направлениях 45°) обратится в нуль, в решении ω_2 появляется мнимая часть (рис. 8, *a*), а действительная часть $\text{Re } \omega_2$ начинает убывать. Затем (рис. 8, *b*) $\text{Re } \omega_2$ становится равной нулю, а $\text{Re } \omega_1$ становится сильно анизотропной. И наконец (рис. 9), формируется решение ω_1 , имеющее действительную и мнимую части (но по разным направлениям: если в некотором направлении φ $\text{Re } \omega_1 \neq 0$, то при этом $\text{Im } \omega_1 = 0$, а при $\text{Re } \omega_1 = 0$ $\text{Im } \omega_1 \neq 0$). При этом второе решение (ω_2) является чисто мнимым.

Рассмотренный нами случай формирования двумерных акустических фононных мод показывает, что даже на квадратной решетке при определенных параметрах потенциала парного взаимодействия возможно формирование сильно анизотропных спектров собственных волн.

Выше нами рассмотрено формирование нормальных волн в двумерных решетках на примере прямоугольных

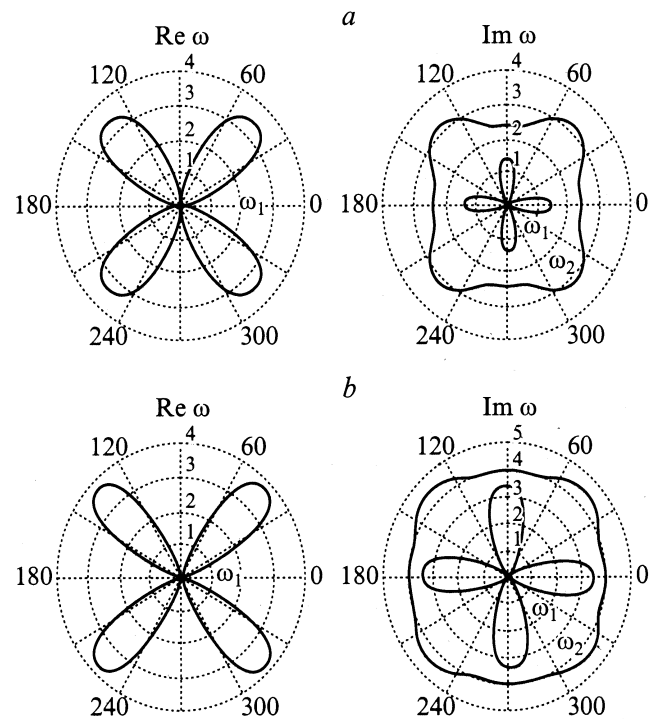


Рис. 9. Решения уравнения (22) в полярных координатах; $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $r = 1.5$. *a* — $F = 1.5$, $g = -1.5$, для этого случая $\text{Re } \omega_2 = 0$; *b* — $F = 2$, $g = -2$, для этого случая $\text{Re } \omega_2 = 0$.

решеток, состоящих из нейтральных атомов. Изучение спектров нормальных волн в двумерных системах важно как для понимания механизма их формирования, так и для объяснения анизотропии различных физических свойств, наблюдающейся в экспериментах. Анизотропия волн связана в основном с коротковолновыми незатухающими возбуждениями, для исследования которых существенна дискретность модели (рассмотрение разностных уравнений) и невозможен переход к континуальному пределу (к дифференциальным пространственным операторам). Напомним, что переход к пространственным дифференциальным операторам возможен лишь для функций на дискретной решетке, имеющих пространственные масштабы, намного большие характерного масштаба дискретности (для правильной дискретной решетки это просто период решетки). Хотя часть спектра рассмотренных волн и соответствует длинным волнам, но общая картина является более сложной.

Показано, что учет „диагональных“ взаимодействий между частицами приводит к снятию вырождения в спектре нормальных волн для случая примитивной прямоугольной решетки атомов. При определенных параметрах потенциала взаимодействия атомов возможно возникновение сильной анизотропии спектров нормальных волн. Анизотропия фононных спектров может проявляться в различных кинетических эффектах, в которых электрон-фононное взаимодействие играет важную роль. Она может, например, способствовать пониманию анизотропии сверхпроводящего параметра порядка в рамках традиционного механизма спаривания заряженных частиц вследствие электрон-фононного взаимодействия.

Список литературы

- [1] Frank J. Blatt. *Physics of Electronic Conduction in Solids*. McGraw-Hill, N. Y. (1968).
- [2] J.A. Reissland. *The Physics of Phonons*. John Wiley and Sons Ltd., London–N. Y.–Sydney–Toronto (1973).
- [3] C.W. Chu. *J. Superconduct.* **12**, 1, 85 (1999).
- [4] D.T. Jover, H. Wilhelm, R.J. Wijngaarden, R.S. Liu. *Phys. Rev.* **B55**, 17, 11 832 (1997).
- [5] C.W. Chu, Y.Y. Xue, Z.L. Du, Y.Y. Sun, L. Gao, N.L. Wu, Y. Cao, I. Rusakova, K. Ross. *Science* **277**, 5, 1081 (1997).
- [6] J.M. Tranquada, J.D. Axe, N. Ichikawa, A.R. Moodenbaugh, Y. Nakamura, S. Uchida. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2, 338 (1997).
- [7] A. Bianconi, M. Lusignoli, N.L. Saini, P. Bordet, A. Kvik, P.G. Radaelli. *Phys. Rev.* **B54**, 6, 4310 (1996).
- [8] Y. Ando, A.N. Lavrov, K. Segawa. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 14, 2813 (1999).
- [9] J. Mesot, M.R. Norman, H. Ding, M. Randeria, J.C. Campuzano, A. Paramekanti, H.M. Fretwell, A. Kaminski, T. Takeuchi, T. Yokoya, T. Sato, T. Takahashi, T. Mochiku, K. Kadowaki. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4, 840 (1999).
- [10] A. Kaminski, J. Mesot, H. Fretwell, J.C. Campuzano, M.R. Norman, M. Randeria, H. Ding, T. Sato, T. Takahashi, T. Mochiku, K. Kadowaki, H. Hoehst. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 8, 1788 (2000).