

01;03

## О взаимодействии двух заряженных проводящих шаров при малых расстояниях между ними

© Е.А. Щерба, А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 7 марта 2001 г. В окончательной редакции 10 мая 2001 г.)

Проведен анализ электростатического взаимодействия двух заряженных электропроводящих шаров при малых расстояниях между ними, когда существенную роль играют поляризационные эффекты. Показано, что короткодействующие поляризационные силы приводят к притяжению одноименно заряженных шаров, которое заменяет силы отталкивания зарядов одного знака при достаточном сближении.

1. Задача исследования электростатического взаимодействия двух близко расположенных заряженных частиц (капель) во внешнем электрическом поле представляет интерес как в связи с проблемой расчета констант коагуляции в заряженных аэродисперсных системах естественного и искусственного происхождения, так и в связи с расчетами закономерностей распада капель, неустойчивых по отношению к собственному и поляризационному поверхностному заряду [1–8]. Как правило, при расчетах электростатического взаимодействия пары заряженных частиц используется закон Кулона как при больших, так и при малых расстояниях между ними. В то же время давно известно [9], что при сближении заряженных частиц на малые расстояния (характерные для процессов коагуляции и распада капель) существенную роль начинает играть поляризационное взаимодействие между ними. В итоге при некоторых соотношениях между размерами и зарядами одноименно заряженных частиц они не отталкиваются, а притягиваются. Однако этим эффектом, как правило, пренебрегали ввиду того, что аналитические выражения, описывающие силу и энергию электростатического взаимодействия заряженных частиц с учетом поляризационных эффектов, содержат весьма громоздкие ряды, малоудобные для практических расчетов. Появление в последние годы пакетов математических программ для аналитического счета сделало возможным количественный и качественный анализ электростатического взаимодействия близко расположенных заряженных сферических частиц. Этому же способствовал и предложенный в [10] способ упрощения вышеупомянутых плохо сходящихся рядов в точном аналитическом выражении для энергии взаимодействия двух заряженных электропроводящих шаров [9].

2. Пусть имеются два проводящих шара с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных на расстоянии  $l$  между центрами. В результате действия электрической индукции заряд первого шара создает во втором электростатическое изображение  $Q_{11}$ , которое в свою очередь становится источником изображения  $q_{12}$  в первом шаре. Таким образом, напряженность поля в произвольной точке  $A$  между шарами на оси, соединяющей их центры,

создается бесконечным числом зарядов изображений, формирующихся в обоих шарах. Если заряжен только первый шар, а  $q_2 = 0$ , то напряженность поля в точке  $A$  представляется в виде [9]

$$E_{A_1} = k \left( \sum_n \frac{q_{1n}}{r_{1n}^2} + \sum_n \frac{Q_{1n}}{R_{1n}^2} \right), \quad k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

где

$$\begin{aligned} q_{1n} &= q_1 \frac{\gamma \sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)[\gamma + \sinh[(n-1)\beta]/\sinh(n\beta)]}, \\ Q_{1n} &= -q_n \frac{\gamma \sinh(\beta)}{r(1+\gamma) \sinh(n\beta)}, \\ r_{1n} &= \frac{1}{1+\gamma} - r + \frac{r\gamma}{\gamma + \sinh[(n-1)\beta]/\sinh(n\beta)}, \\ R_{1n} &= r - \frac{1}{1+\gamma} - \frac{r\gamma[\gamma + \sinh[(n-1)\beta]/\sinh(n\beta)]}{1+\gamma^2+2\gamma \cosh(\beta)}, \\ r &\equiv \frac{l}{R_1+R_2}, \quad \gamma \equiv R_2/R_1, \end{aligned}$$

параметр  $\beta$  связан с расстоянием между центрами шаров соотношением

$$\cosh(\beta) = \frac{r^2(1+\gamma)^2 - (1+\gamma^2)}{2\gamma}.$$

Пусть теперь первый шар не заряжен  $q_1 = 0$ , а второй имеет заряд  $q_2$ . Тогда для напряженности в точке  $A$  имеем

$$\begin{aligned} E_{A_2} &= k \left( -\sum_n \frac{q_{2n}}{r_{2n}^2} + \sum_n \frac{Q_{2n}}{R_{2n}^2} \right), \\ q_{2n} &= q_2 \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)[1+\gamma \sinh[(n-1)\beta]/\sinh(n\beta)]}, \\ Q_{2n} &= -q_2 \frac{\sinh(\beta)}{r(1+\gamma) \sinh(n\beta)}, \\ r_{2n} &= -\frac{1}{1+\gamma} + \frac{r}{1+\gamma \sinh[(n-1)\beta]/\sinh(n\beta)}, \\ R_{2n} &= \frac{1}{1+\gamma} - \frac{r[1+\gamma \sinh[(n-1)\beta]/\sinh(n\beta)]}{1+\gamma^2+2\gamma \cosh(\beta)}. \end{aligned}$$

В случае, когда оба шара имеют различные заряды, напряженность поля в точке  $A$  равна

$$E_A = E_{A_1} + E_{A_2}.$$

Интересующие нас потенциальную энергию взаимодействия шаров и силу, действующую на каждый из них, можно выписать в виде [9,10]

$$W = \frac{1 + \gamma}{2\alpha} \frac{\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad \alpha \equiv q_2/q_1, \quad (1)$$

$$F_l = -\frac{\partial W}{\partial l}, \quad (2)$$

где  $c_{ij}$  — емкостные коэффициенты, определенные в единицах  $R_1/k$  соотношениями

$$c_{11} \equiv \gamma \sinh(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma \sinh(n\beta) + \sinh[(n-1)\beta]]^{-1},$$

$$c_{12} \equiv -\gamma \frac{\sinh(\beta)}{(1+\gamma)r} \sum_{n=1}^{\infty} [\sinh(n\beta)]^{-1},$$

$$c_{22} \equiv \gamma \sinh(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} [\sinh(n\beta) + \gamma \sinh[(n-1)\beta]]^{-1}.$$

Обезразмерим энергию взаимодействия (1) на  $k|q_1q_2|/(R_1 + R_2)$  и получим

$$W = \frac{1 + \gamma}{2\alpha} \frac{\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \quad (3)$$

Сила взаимодействия  $F$ , обезразмеренная на величину силы кулоновского взаимодействия точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии, равном расстоянию между центрами соприкасающихся шаров  $k|q_1q_2|/(R_1 + R_2)^2$ , может быть представлена в форме

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{r(1+\gamma)^3}{2\alpha\gamma \sinh(\beta)} \times \left\{ \frac{(\alpha^2 c'_{11} - 2\alpha c'_{12} + c'_{22})(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)^2} - \frac{(\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22})(c'_{11}c_{22} + c_{11}c'_{22} - 2c_{12}c'_{12})}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)^2} \right\}. \quad (4)$$

Производные от емкостных коэффициентов по  $\beta$ , обозначенные штрихами, определены соотношениями

$$c'_{11} \equiv -\sinh(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \times \frac{\cosh(\beta)[n + \gamma(n-1)\cosh(\beta)] - \gamma(n-1)\sinh(n\beta)\sinh(\beta)}{[\sinh(n\beta)[1 + \gamma\cosh(\beta)] - \gamma\cosh(n\beta)\sinh(\beta)]^2} + c_{11} \coth(\beta),$$

$$c'_{22} \equiv -\sinh(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \times \frac{\cosh(\beta)[\gamma n + (n-1)\cosh(\beta)] - (n-1)\sinh(n\beta)\sinh(\beta)}{[\sinh(n\beta)[\gamma + \cosh(\beta)] - \cosh(n\beta)\sinh(\beta)]^2} + c_{22} \cosh(\beta),$$

$$c'_{12} \equiv c_{12} \coth(\beta) - c_{12} \frac{\sinh(\beta)}{(1+\gamma)^2 r^2} + \frac{\sinh(\beta)}{(1+\gamma)r} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cosh(n\beta)}{\sinh^2(n\beta)}.$$

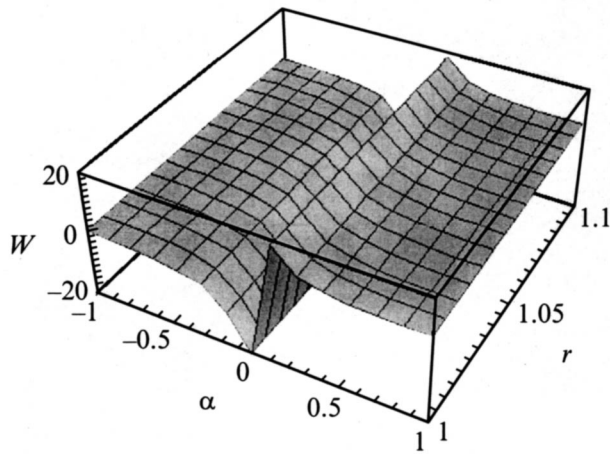
Для дальнейшего компьютерного анализа полученных выражений энергии (3) и силы (4) используем подстановку, предложенную в работе [10]: введем новую переменную  $z \equiv \exp(-\beta)$  и, полагая  $\cosh(\beta) \equiv y$ , получим

$$c_{11} \equiv 2\gamma \sqrt{y^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \times \frac{z^n}{(1-z^{2n})[(\gamma+y) - \sqrt{y^2-1}(1+z^{2n})/(1-z^{2n})]},$$

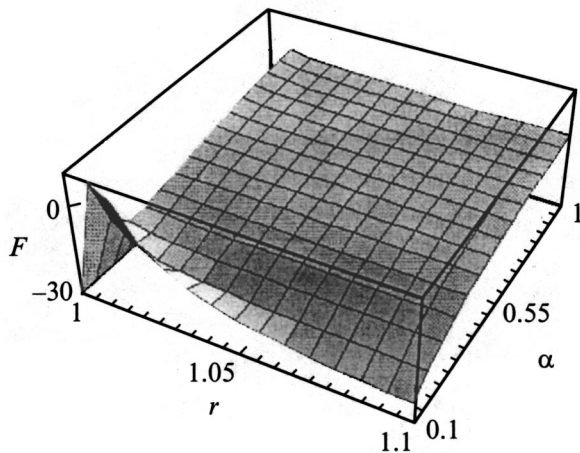
$$c_{22} \equiv 2\gamma \sqrt{y^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \times \frac{z^n}{(1-z^{2n})[(1-\gamma y) - \gamma \sqrt{y^2-1}(1+z^{2n})/(1-z^{2n})]},$$

$$c_{12} \equiv -\frac{2\gamma \sqrt{y^2 - 1}}{r(1+\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^{2n}}. \quad (5)$$

3. На рис. 1 в пространстве параметров безразмерного расстояния  $r \equiv l/(R_1 + R_2)$  и отношения зарядов  $\alpha \equiv q_1/q_2$  приведена поверхность безразмерной энергии  $W$  электростатического взаимодействия заряженных проводящих шаров при фиксированном значении отношения их радиусов  $\gamma = 0.3$ , рассчитанная по (3) с учетом (5). Несложно видеть, что для одноименно заряженных шаров ( $\alpha > 0$ ) энергия взаимодействия принимает как положительные, так и отрицательные значения, тогда как для разноименно заряженных шаров ( $\alpha < 0$ ) знак энергии взаимодействия остается неизменным. Это обстоятельство представляется очевидным, поскольку энергия поляризационного взаимодействия заряженных электропроводных тел всегда отрицательна независимо от знаков их зарядов, так же как и энергия кулоновского взаимодействия зарядов противоположного знака. Энергия же кулоновского взаимодействия одноименно заряженных тел положительна и при сложении с отрицательной энергией поляризационного взаимодействия, быстро растущей с уменьшением расстояния между телами, приводит к отрицательным значениям полной энергии.



**Рис. 1.** Зависимость безразмерной энергии электростатического взаимодействия заряженных проводящих шаров  $W$  от отношения их зарядов  $\alpha$  и безразмерного расстояния между их центрами  $r$ .  $\gamma = 0.3$ .

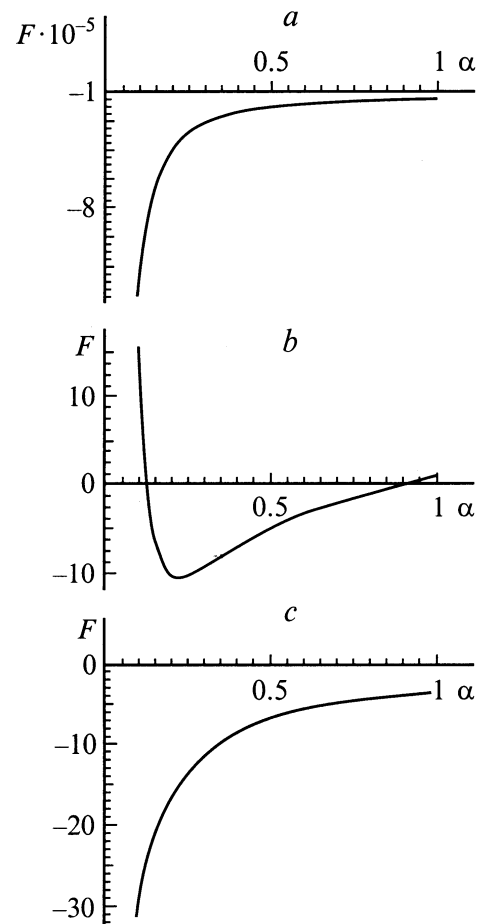


**Рис. 2.** Зависимость безразмерной силы  $F$ , действующей на каждый из одноименно заряженных шаров, от безразмерного расстояния между их центрами  $r$  и отношения их зарядов  $\alpha$ .  $\gamma = 0.3$ .

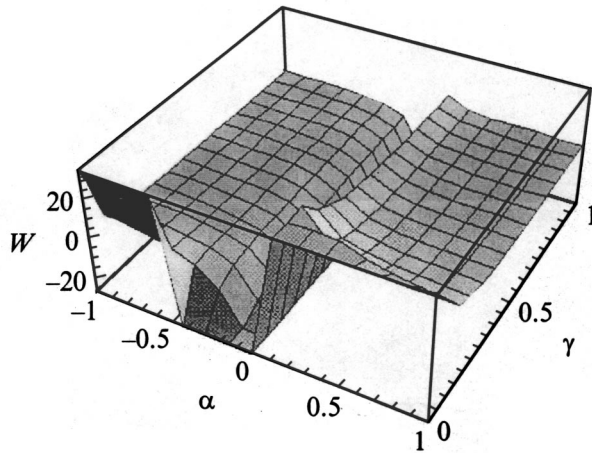
На рис. 2 в пространстве параметров  $r$  и  $\alpha$  при фиксированном отношении радиусов шаров  $\gamma = 0.3$  показана поверхность безразмерной силы, действующей на каждый из шаров. Видно, что в большей части использованной при расчетах области значений параметров  $r$  и  $\alpha$  одноименно заряженные шары притягиваются, за исключением небольшой области, ограниченной малыми значениями отношений зарядов шаров и расстояний между ними, в которой между одноименно заряженными шарами действуют силы отталкивания. Область, в которой при малых расстояниях действуют силы отталкивания, соответствует подробно рассмотренному в [10] случаю, когда отношение зарядов шаров равно отношению квадратов их радиусов (когда напряженности

поля собственного заряда у поверхности шаров равны), в такой ситуации между одноименными зарядами силы отталкивания действуют при как угодно малых расстояниях.

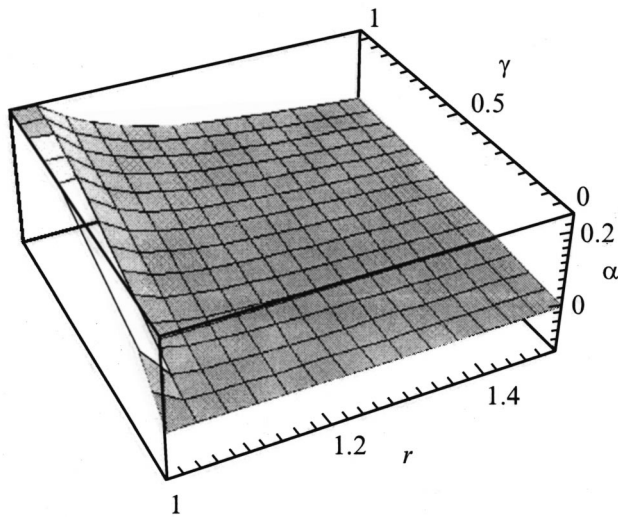
Сказанное по поводу рис. 2 иллюстрируется также двумерными графиками рис. 3, *a–c*, где представлены зависимости безразмерной силы  $F$ , действующей на каждый шар, от отношения зарядов при  $\gamma = 0.3$  и различных значениях расстояния  $r$ . Из рис. 3, *a* следует, что при очень малом расстоянии ( $r = 1.0001$ ) между одноименно заряженными шарами сила, действующая на каждый из них, есть сила притяжения, причем ее значения, уменьшающиеся с ростом  $\alpha$ , весьма велики при малых  $\alpha$ : более чем на пять порядков превышает силу кулоновского взаимодействия точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии, равном расстоянию между центрами шаров при соприкосновении (это видно из способа обезразмеривания силы). На расстоянии  $r = 1.01$  (рис. 3, *b*) сила отталкивания, действующая на шары с увеличением  $\alpha$ , сначала убывает до нуля, меняет знак и становится силой притяжения, достигает максимума и с дальнейшим увеличением  $\alpha$  убывает до



**Рис. 3.** Зависимость безразмерной силы  $F$ , действующей на каждый из одноименно заряженных шаров, от отношения из зарядов  $\alpha$  при  $\gamma = 0.3$ ;  $r$ : *a* — 1.0001, *b* — 1.01, *c* — 1.1.



**Рис. 4.** Зависимость безразмерной энергии  $W$  от отношения их зарядов  $\alpha$  и отношения радиусов  $\gamma$ .  $r = 1.01$ .



**Рис. 5.** Поверхность, разделяющая области значений параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $r$ , в которых между одноименно заряженными шарами действуют силы отталкивания и силы притяжения.

нуля, опять меняет знак и снова становится силой отталкивания. При  $r = 1.1$  (рис. 3, *c*) в использованной при расчетах области значений параметров на одноименно заряженные проводящие шары действует только сила притяжения.

Большие значения силы притяжения, возникающие между одноименно заряженными частицами при малых расстояниях между ними (рис. 3, *a*), соответствуют большим значениям напряженности электростатического поля и в реальной ситуации приведут к электрическому пробоя воздушного (или вакуумного) промежутка между сближающимися одноименно заряженными частицами, сопровождающемуся перераспределением заряда между ними. Направление переноса заряда при разряде между одноименно заряженными частицами определяет-

ся направлением уменьшения электростатической энергии системы при таком процессе. На рис. 4 приведена зависимость безразмерной энергии электростатического взаимодействия двух проводящих шаров  $W$  от отношения их зарядов  $\alpha$  и отношения радиусов  $\gamma$ . Имея в виду, что самопроизвольно в замкнутой системе могут идти только процессы, приводящие к уменьшению потенциальной энергии системы (в рассматриваемой ситуации энергии электростатического взаимодействия), из рис. 4 несложно видеть, что при  $\alpha > 0$  и постоянном отношении радиусов шаров (при  $\gamma = \text{const}$ ) потенциальная энергия будет уменьшаться только при увеличении отношения зарядов  $\alpha$ .

Если сближаются не твердые шары, а заряженные капельки, то еще при меньших значениях напряженности, чем требуется для пробоя воздушного промежутка, реализуется электростатическая неустойчивость поверхности одной из капелек, сопровождающаяся выбросом струйки жидкости в сторону соседней, как это наблюдалось в экспериментах [11–15], что может привести к коагуляции одноименно заряженных капелек. Для анализа направления переноса заряда и массы жидкости при реализации электрогидродинамической неустойчивости одноименно заряженных капелек в униполярно заряженных жидкокапельных системах можно опять же воспользоваться рис. 4, из которого видно, что потенциальная энергия замкнутой системы из двух шаров будет уменьшаться при увеличении отношения радиусов  $\alpha$  и увеличении отношения радиусов  $\gamma$ , т.е. будет иметь место тенденция  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\gamma \rightarrow 1$ , поскольку точка  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$  характеризуется наименьшим значением потенциальной энергии на рис. 4.

На рис. 5 в пространстве параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $r$ , определяющих отношение зарядов, радиусов и безразмерное расстояние, приведена поверхность (на которой сила, определенная соотношением (4) обращается в нуль), разделяющая области значений параметров, в которых между одноименно заряженными шарами действуют силы отталкивания (ниже приведенной поверхности) и притяжения (выше приведенной поверхности).

## Заключение

При сближении одноименно заряженных электропроводных частиц (капель) силы электростатического отталкивания сменяются на силы поляризационного притяжения при малых расстояниях между частицами (каплями). Напряженность электростатического поля между вершинами сближающихся капелек при малых расстояниях между ними может стать достаточной для реализации электрического пробоя воздушного (вакуумного) промежутка, в результате чего будет иметь место перенос заряда между твердыми частицами, а между каплями, кроме того, будет переноситься и жидкость вследствие развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости в окрестности вершин сближающихся капелек.

## Список литературы

- [1] *Davis M.H.* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1964. Vol. 176. N 4. P. 499–511.
- [2] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // J. Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [4] *Мухина Е.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 2. С. 18–26.
- [5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [6] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 8. С. 31–38.
- [7] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
- [8] *Мазец И.Е.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 8–10.
- [9] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.
- [10] *Саранин В.А.* // УФН. 1999. Т. 169. № 4. С. 453–458.
- [11] *Masky W.A.* // Pros. Roy. Soc. London. 1931. Vol. A133. N 822. P. 565–587.
- [12] *Latham J., Roxburgh I.W.* // Pros. Roy. Soc. London. 1966. Vol. A295. P. 84–97.
- [13] *Latham J.* // Planetary Electrodynamics. 1969. Vol. 1. P. 345–358.
- [14] *Miller A.H., Shelden C.E., Atkinson W.R.* // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. N 11. P. 1921–1928.
- [15] *Sartor J.D., Abbott C.E.* // J. Geophys. Res. 1968. Vol. 73. N 20. P. 6415–6423.