01;05

Эффективные параметры многокомпонентных диэлектриков с гексагональной структурой

© Ю.П. Емец

Институт электродинамики НАН Украины,
03680 Киев, Украина
e-mail: emets@irpen.kiev.ua

(Поступило в Редакцию 29 марта 2001 г.)

Вычислены эффективные параметры матричной диэлектрической среды, содержащей три разновидности однонаправленных цилиндрических включений, образующих гексагональную решетку. При малой концентрации включений удается аналитически рассчитать электрическое поле в такой системе и определить ее средние характеристики. Проведенные исследования позволяют указать малые параметры, характеризующие систему, и представить общую структуру выражения эффективной диэлектрической проницаемости анизотропных многокомпонентных сред.

Введение

В настоящей работе исследуются электрические свойства неоднородных диэлектрических сред с симметричной укладкой разнородных включений в виде однонаправленных цилиндрических волокон. Такая задача возникает при исследовании структурных свойств физических и биологических объектов во многих областях физики и приложений [1–5].

Существует пять способов симметричной укладки однотипных волокон — по числу многоугольников, непрерывно заполняющих всю плоскость без разрывов. Таковыми, как известно, являются косые параллелограммы, прямоугольники, треугольники, квадраты и шестиугольники, имеющие соответственно оси симметрии порядков 1, 2, 3, 4 и 6. Волокна располагаются внутри ячеек плоской сетки. Из числа указанных систем наибольший интерес вызывает решетка с гексагональной текстурой. Изучаемый композитный материал сохраняет периодическую текстуру при симметрической укладке в матрице трех сортов включений. Среда, таким образом, состоит из четырех компонентов. Расположение разнородных включений в системе можно связать с наличием цветной симметрии, когда каждому цвету, в который окрашены группы включений, приписаны определенные физические характеристики компонентов.

В случае, когда неоднородный диэлектрик состоит только из двух компонентов — матрицы и одинаковых параллельных волокон, свойства гексагональной структуры были исследованы в работе [6]. Более общая задача (применительно к расчету теплопроводности) была решена в [7]. В этих работах был использован метод Рэлея [8], который, применяя классическую теорию потенциала, разработал эффективные приемы исследования двух- и трехмерных матричных сред с периодическим расположением соответственно цилиндрических волокон и сферических включений.

Если среда содержит разнотипные волокна, имеющие различные радиусы и физические характеристики, как в рассматриваемой системе, то при расчете электрического поля не удается, к сожалению, применить метод Рэлея. В этом случае предложена другая схема вычислений, основная идея которых состоит в суммировании полей взаимодействующих между собой включений. При этом существенно используется точное решение модельной задачи о взаимодействии двух параллельных цилиндрических тел [9].

Хотя проведенные расчеты касаются непосредственно диэлектрических сред, они в силу известной математической аналогии могут быть использованы также при исследовании траспортных коэффициентов в упрогости, гидродинамике, магнитостатике, тепло- и электропроводности.

Локальное электрическое поле

Рассмотрим диэлектрическую среду, которая состоит из матрицы с проницаемостью ε_1 и симметрично расположенных в ней однонаправленных цилиндрических волокон трех разновидностей. Волокна с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ и ε_4 и соответственно радиусами r_1, r_2 и r_3, периодически чередуясь, образуют гексагональную структуру. Фрагмент неограниченной среды показан на рис. 1. Внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_0$ направлено в плоскости xy нормально к осям параллельных волокон. Уравнения электростатики

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{1}$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ — индукция и напряженность электрического поля, в этом случае двумерны и совпадают с условиями Коши–Римана, что позволяет перейти в плоскость комплексной переменной z и ввести комплексные функции электрического поля

$$D(z) = D_x - iD_y, \quad E(z) = E_x - iE_y \quad (z = x + iy). \tag{2}$$

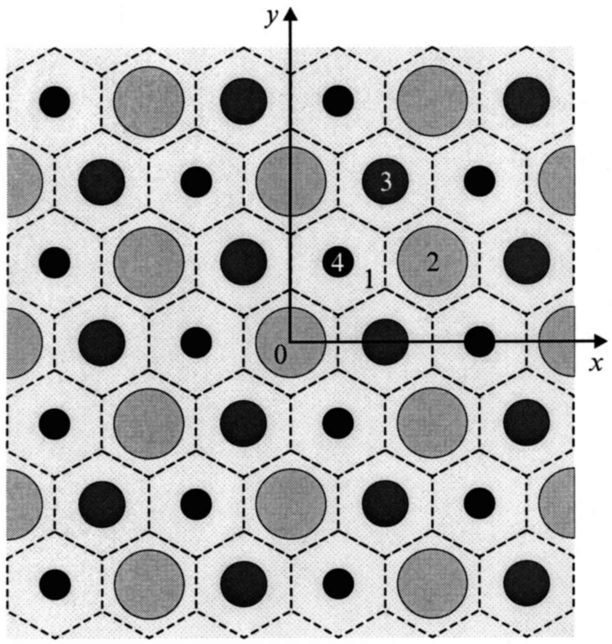

Рис. 1. Фрагмент четырехкомпонентного (*1–4*) диэлектрического материала с гексагональным распределением однонаправленных волокон.

Симметричное строение среды формирует периодическую структуру электрического поля. Поэтому исследование поля во всей системе сводится к его расчету в одном периодическом элементе. Фактически достаточно рассчитать поле в одной шестиугольной ячейке с одним выделенным включением (рис. 1). Поле внутри этого включения и в его непосредственной окрестности зависит от наличия в системе всех остальных включений. Их суммарное влияние можно учесть как взаимодействие выделенного включения с каждым из них в отдельности. Для этого можно воспользоваться решением вспомогательной задачи об электрическом поле двух параллельных диэлектрических цилиндров, погруженных в диэлектрическую среду во внешнем однородном поле. Эта задача имеет точное аналитическое решение при общих условиях, когда радиусы и диэлектрические проницаемости цилиндрических тел различны и они расположены произвольно друг от друга [9].

Математически взаимное влияние цилиндрических включений друг на друга выражается диполь-дипольным взаимодействием. Это линейные индуцированные диполи. Процедура вычисления координат и моментов диполей изложена в [9]. В настоящей работе исследуется система с малой концентрацией включений, что позволяет ограничиться однодипольным приближением электрического поля.

Пусть для определенности начало системы координат совмещено с центром включения, имеющего диэлектрическую проницаемость ε_2. Тогда электрическое поле в шестиугольнике, ограничивающим это включение, можно записать так,

$$E_1(z) = E_0 - \bar{E}_0 \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Delta_{12} r_1^2 (z-a_{mn})^{-2} + \Delta_{13} r_1^2 (z-b_{mn})^{-2} + \Delta_{14} r_1^2 (z-c_{mn})^{-2}\Big],$$

$$E_2(z) = (1+\Delta_{12})\Big\{E_0 + \bar{E}_0\Big[\Delta_{12} r_1^2 z^{-2} - \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Delta_{12} r_1^2 (z-a_{mn})^{-2} + \Delta_{13} r_1^2 (z-b_{mn})^{-2} + \Delta_{14} r_1^2 (z-c_{mn})^{-2}\Big]\Big]\Big\}. \quad (3)$$

Здесь $E_1(z)$ и $E_2(z)$ — комплексные напряженности электрическое поля в матрице и во включении соответственно; $E_0 = E_{0x} - iE_{0y}$ — однородное внешнее электрическое поле (черта над величиной E_0 означает комплексное сопряжение). Безразмерные параметры Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{14} определяются формулами

$$\Delta_{12} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \Delta_{13} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3},$$

$$\Delta_{14} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_4} \quad (-1 \le \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14} \le 1). \quad (4)$$

Электрическое поле, как видно, представлено суммой однородного поля и поля бесконечного числа индуцированных диполей, координаты которых a_{mn}, b_{mn} и c_{mn} совпадают с центрами включений,

$$a_{mn} = \Big\{h(3m + i\sqrt{3}n),\, h\Big[3m + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2n+1)\Big]\Big\},$$

$$b_{mn} = \Big\{h(3m + 1 + i\sqrt{3}n),\, h\Big[3m + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2n+1)\Big]\Big\},$$

$$c_{mn} = \Big\{h(3m+2+i\sqrt{3}n),\, h\Big[3m+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(2n+1)\Big]\Big\}, \quad (5)$$

где h — линейный размер периода вдоль оси x; $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 1).

Если начало координат поместить в центре включения с диэлектрической проницаемостью ε_3, то можно воспользоваться теми же выражениями электрического поля (3) с циклической заменой параметров $\Delta_{12} \to \Delta_{13}$, $\Delta_{13} \to \Delta_{14}$, $\Delta_{14} \to \Delta_{12}$; $r_1 \to r_2$, $r_2 \to r_3$, $r_3 \to r_1$ и аналогично для включения с диэлектрической проницаемостью ε_4 — $\Delta_{12} \to \Delta_{14}$, $\Delta_{13} \to \Delta_{12}$, $\Delta_{14} \to \Delta_{12}$; $r_1 \to r_3$, $r_2 \to r_1$, $r_3 \to r_2$.

При удалении включений друг от друга взаимодействие между ними ослабевает (обратно пропорционально квадрату расстояния между их центрами в соответствии со свойствами линейного дипольного поля). Поэтому в практических вычислениях в выражениях (3) можно отбросить члены с бóльшими значениями индексов m и n (или хотя бы одного из них). Это упрощение позволяет заменить бесконечные суммы конечными.

Выражения электрического поля (3) записаны в однодипольном приближении — учитываются только первые индуцированные диполи. Их моменты пропорциональны параметрам $\Delta_{1\vartheta}$ ($\vartheta = 2, 3, 4$) первой и второй степени, а также квадратам относительных значений радиусов r_ν/h ($\nu = 1, 2, 3$) или, что эквивалентно, сечению волокон ($s_\nu = \pi r_\nu^2/h^2$). Последующие приближения будут содержать диполи, моменты которых пропорциональны более высоким степеням параметров $\Delta_{1\vartheta}$ и s_ν. Эти параметры входят в моменты диполей мультипликативно, что позволяет использовать выражение (3) при малой величине хотя бы одного из этих параметров.

Если взаимное влияние включений друг на друга не учитывается, то в выражениях (3) можно отбросить бесконечные суммы. В этом случае поле внутри включений однородно, а во внешней области представлено диполем. Это приближение лежит в основе расчета эффективных параметров слабонеоднородных материалов [10,11].

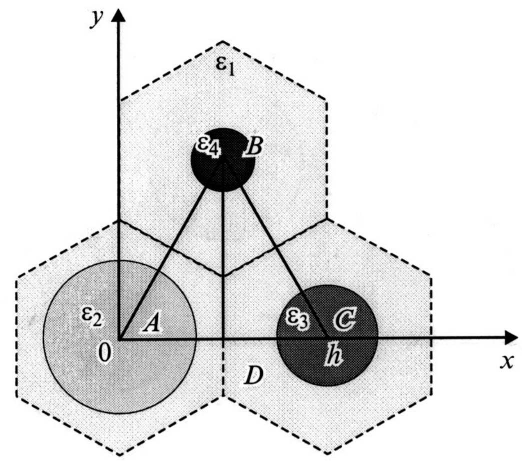

Рис. 2. Периодическая ячейка диэлектрического материала для расчета средних значений поля.

Осреднение локального поля

Макроскопически свойства неоднородного диэлектрическоого материала определяются осредненным материальным уравнением

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \hat{\varepsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{6}$$

где угловые скобки обозначают операцию вычисления средних величин по объему; в настоящем случае осреднение производится по площади элементарной ячейки двоякопериодической системы.

За счет гексагональной укладки однонаправленных цилиндрических волокон рассматриваемый композитный материал приобретает в среднем анизотропные свойства. В плоскости, нормальной к осям цилиндров, его макроскопические характеристики описываются эффективным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}$. Компоненты симметричного тензора $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}$, приведенного к главным осям $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}} = \{\varepsilon_{\text{eff}xx}, \varepsilon_{\text{eff}yy}\}$, находятся из соотношений

$$\langle D \rangle_x = \varepsilon_{\text{eff}xx} \langle E \rangle_x, \quad \langle D \rangle_y = \varepsilon_{\text{eff}yy} \langle E \rangle_y. \tag{7}$$

Средние значения поля вычисляются осреднением выражений (3) в элементарной ячейке периода системы, в качестве которой можно взять равносторонний треугольник ABC (рис. 2). Если внешнее поле направлено вдоль оси x ($E_0 = E_{0x}$), то в силу зеркальной симметрии системы относительно действительной оси эта ось будет силовой линией поля. Силовыми линиями будут также все линии, параллельные действительной оси и отстоящие от нее на величину, кратную размеру отрезка $BD = \sqrt{3}h/2$ (высота треугольной ячейки). Таким образом, треугольник ABC расположен между двумя соседними силовыми линиями $y = 0$ и $y = \sqrt{3}h/2$, причем одна его сторона AC совпадает с силовой линией $y = 0$, а вершина B расположена на другой линии $y = \sqrt{3}h/2$. В треугольной ячейке указанного вида все три вида включений представлены в относительно равных долях — по 1/6 части их плоского сечения.

Определение средних величин поля по площади ячейки можно заменить, как это всегда делается, вычислением контурных интегралов. Пусть внешнее поле направлено вдоль оси x ($E_0 = E_{0x}$), тогда имеем

$$\langle E \rangle_x = \frac{1}{h} \int\limits_A^C \text{Re} E(x) dx, \quad \langle D \rangle_x = \frac{2}{\sqrt{3}h} \int\limits_D^B \text{Re} E(z) dz. \tag{8}$$

Если же внешнее поле направлено вдоль оси y ($E_0 = -iE_{0y}$), то

$$\langle E \rangle_y = \frac{2}{\sqrt{3}h} \int\limits_D^B \text{Im} E(z) dz, \quad \langle D \rangle_y = \frac{1}{h} \int\limits_A^C \text{Im} E(x) dx. \tag{9}$$

При этом линии, которые в предыдущем случае были силовыми, становятся эквипотенциалями. Простые, но требующие аккуратности, вычисления первого интеграла (8) в конечном итоге дают следующее значение среднего поля в ячейке вдоль оси x

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_x &= 1 + q(\Delta_{12} r_1^2 + \Delta_{13} r_2^2 + \Delta_{14} r_3^2) \\ &+ \Delta_{12}\Delta_{13}[r_1^2 M(r_2) + r_2^2 M(r_1)] + \Delta_{12}\Delta_{14} r_3^2 N(r_1) \\ &+ \Delta_{13}\Delta_{14} r_3^2 N(r_2) + \frac{3}{2}[\Delta_{12}^2 V(r_1) + \Delta_{13}^2 V(r_2)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Выражение (10) и последующие формулы средних значений электрического поля записаны в относительных величинах

$$\langle E \rangle_x^* = \langle E \rangle_x / |E_0|, \ \ r_j^* = r_j/h \ (0 \le r_j^* < \sqrt{3}/2); \ \ j = 1, 2, 3.$$

Для упрощения письма в (10) и далее звездочки опущены. В выражении (10) q — численный параметр. Точное значение параметра q определяется формулами (в расчетах их оказалось две), одна из которых приведена в Приложении A. Вычисления дают $q = 0.8061$. Чтобы не загромождать основной текст излишними деталями, выражения функций $M(\dots)$, $N(\dots)$ и $V(\dots)$ отнесены в Приложение A. Здесь собраны все вспомогательные формулы, которые необходимы в вычислениях при использовании выражения (10) и последующих выражений (11)–(13).

Можно заметить, что среднее электрическое поле $\langle E\rangle_x$, определяемое выражением (10), несимметрично относительно параметров Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{14}, которые являются приведенными значениями диэлектрических проницаемостей включений. Это несоответствие в теоретическом описании структурно-симметричного материала объясняется тем, что форма представления выражения $\langle E\rangle_x$, вообще говоря, зависит от выбора начала системы координат. В данном случае она была фиксирована в центре включения с диэлектрической проницаемостью ε_2 (рис. 1 и 2). Разумеется, что на абсолютную величину $\langle E\rangle_x$ положение начальной точки системы координат не оказывает никакого влияния.

Если, например, начало системы координат поместить в центр включения с диэлектрической проницаемостью ε_3 и проделать все вычисления, аналогичные тем, которые были выполнены при получении выражения (10), то

$$\langle E\rangle_x = 1 + q(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2 + \Delta_{14}r_3^2)$$
$$+ \Delta_{13}\Delta_{14}[r_2^2M(r_3) + r_3^2M(r_2)] + \Delta_{12}\Delta_{13}r_1^2N(r_2)$$
$$+ \Delta_{12}\Delta_{14}r_1^2N(r_3) + \frac{3}{2}[\Delta_{13}^2V(r_2) + \Delta_{14}^2V(r_3)]. \quad (11)$$

Выражение (11) также несимметрично относительно параметров Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{14}, что особенно заметно при сравнении выражений (10) и (11).

Наконец, при помещении начала координат в центр включения с диэлектрической проницаемостью ε_4 вычисления дают

$$\langle E\rangle_x = 1 + q(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2 + \Delta_{14}r_3^2)$$
$$+ \Delta_{12}\Delta_{14}[r_1^2M(r_3) + r_3^2M(r_1)] + \Delta_{12}\Delta_{13}r_2^2N(r_1)$$
$$+ \Delta_{13}\Delta_{14}r_2^2N(r_3) + \frac{3}{2}[\Delta_{12}^2V(r_1) + \Delta_{14}^2V(r_3)]. \quad (12)$$

Хотя выражения (10)–(12) отличаются друг от друга по форме, в действительности они определяют одну и ту же величину среднего электрического поля в системе. В этом можно убедиться, сравнивая вычисления для конкретных параметров в трех рассмотренных случаях.

Для того чтобы получить симметричное выражение для среднего поля $\langle E\rangle_x$ относительно параметров Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{14}, необходимо сложить все три выражения (10)–(12) в сумму разделить на три. В результате получим

$$\langle E\rangle_x = 1 + q(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2 + \Delta_{14}r_3^2)$$
$$+ \Delta_{12}\Delta_{13}U(r_1, r_3) + \Delta_{12}\Delta_{14}U(r_1, r_2)$$
$$+ \Delta_{13}\Delta_{14}U(r_2, r_3) + \Delta_{12}^2V(r_1)$$
$$+ \Delta_{13}^2V(r_2) + \Delta_{14}^2V(r_3). \quad (13)$$

где

$$U(r_\mu, \nu_\nu) = \frac{1}{3}\Big\{r_\mu^2[M(r_\nu) + N(r_\nu)]$$
$$+ r_\nu^2[M(r_\mu) + N(r_\mu)]\Big\} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3; \quad \mu \neq \nu).$$

Теперь, как видно, поле $\langle E\rangle_x$ симметрично относительно указанных параметров, что важно в дальнейшем при получении и анализе тензора эффективной диэлектрической проницаемости.

Чтобы получить среднее значение индукции электрического поля в системе $\langle D\rangle_x$, необходимо вычислить второй интеграл (8). Форма написания выражения $\langle D\rangle_x$ также зависит от фиксированного положения системы координат. Если начало прямоугольной системы координат совмещено с центром включения с диэлектрической проницаемостью ε_2, то вычисления дают

$$\langle D\rangle_x = \varepsilon_1\Big\{1 - p(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2 + \Delta_{14}r_3^2)$$
$$+ \Delta_{12}\Delta_{14}r_1^2L(r_3) + \Delta_{13}\Delta_{14}r_2^2L(r_3) + 2\Delta_{14}^2H(r_3)\Big\}. \quad (14)$$

Здесь p — численный параметр, выражение которого приведено в Приложении B. Оказывается, что $p = 2q$, где число q определено выше (после выражения (10)). Функция $L(r)$ и $H(r)$, как вспомогательные параметры, отнесены в Приложение B.

В случае, когда начало системы координат помещено в центр включения с диэлектрической проницаемостью ε_3, вместо выражения (14) получим

$$\langle D\rangle_x = \varepsilon_1\Big\{1 - p(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2 + \Delta_{14}r_3^2)$$
$$+ \Delta_{12}\Delta_{13}r_2^2L(r_1) + \Delta_{12}\Delta_{14}r_3^2L(r_1) + 3\Delta_{12}^2H(r_1)\Big\}. \quad (15)$$

Если же система координат фиксирована с центром включения с проницаемостью ε_4, то имеем

$$\langle D\rangle_x = \varepsilon_1\Big\{1 - p(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2 + \Delta_{14}r_3^2)$$
$$+ \Delta_{12}\Delta_{13}r_1^2L(r_2) + \Delta_{13}\Delta_{14}r_3^2L(r_3) + 3\Delta_{13}^2H(r_2)\Big\}. \quad (16)$$

Все три выражения (14)–(16) определяют одно и то же значение среднего поля $\langle D\rangle_x$ в системе и отличаются друг от друга только формой написания. Они несимметричны относительно параметров Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{14}. Для симметризации выражения $\langle D \rangle_x$ необходимо, как это было сделано выше, сложить выражения (14)–(16) и сумму разделить на три. Это дает окончательно

$$\begin{aligned}\langle D \rangle_x = \varepsilon_1 \Big\{ 1 - p(\Delta_{12} r_1^2 + \Delta_{13} r_2^2 + \Delta_{14} r_3^2) \\ + \Delta_{12}\Delta_{13} G(r_1, r_2) + \Delta_{12}\Delta_{14} G(r_1, r_3) \\ + \Delta_{13}\Delta_{14} G(r_2, r_3) + \Delta_{12}^2 H(r_1) \\ + \Delta_{13}^2 H(r_2) + \Delta_{14}^2 H(r_3) \Big\},\end{aligned} \qquad (17)$$

где

$$G(r_\mu, r_\nu) = \frac{1}{3}[r_\mu^2 L(r_\nu) + r_\nu^2 L(r_\mu)] \ (\mu, \nu = 1, 2, 3; \ \mu \neq \nu).$$

Выражения (13) и (17) определяют в системе средние значения поля, когда внешнее электрическое поле направлено вдоль оси x ($E_0 = E_{0x}$). Если же внешнее поле ориентировано в системе в направлении оси y ($E_0 = -iE_{0y}$), то для нахождения средних значений поля необходимо вычислить интегралы (9). После вычислений, аналогичных тем, которые были проведены выше, окончательно получаем такие выражения

$$\begin{aligned}\langle E \rangle_y = 1 + p(\Delta_{12} r_1^2 + \Delta_{13} r_2^2 + \Delta_{14} r_3^2) \\ + \Delta_{12}\Delta_{13} G(r_1, r_2) + \Delta_{12}\Delta_{14} G(r_1, r_3) \\ + \Delta_{13}\Delta_{14} G(r_2, r_3) \Delta_{12}^2 H(r_1) + \\ + \Delta_{13}^2 H(r_2) + \Delta_{14}^2 H(r_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle D \rangle_y = \varepsilon_1 \Big\{ 1 - q(\Delta_{12} r_1^2 + \Delta_{13} r_2^2 + \Delta_{14} r_3^2) \\ + \Delta_{12}\Delta_{13} U(r_1, r_2) + \Delta_{12}\Delta_{14} U(r_1, r_3) \\ + \Delta_{13}\Delta_{14} U(r_2, r_3) + \Delta_{12}^2 V(r_1) \\ + \Delta_{13}^2 V(r_2) + \Delta_{14}^2 V(r_3) \Big\}.\end{aligned} \qquad (18)$$

Выражения (18) записаны в симметричном виде относительного параметров Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{14}.

Преобразования симметрии

Сравнивая полученные выражения (13), (17) и (18), можно установить, что компоненты среднего электрического поля в системе удовлетворяют преобразованиям симметрии

$$\begin{aligned}\langle D(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}) \rangle_x = \varepsilon_1 \langle E(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \Delta_{41}) \rangle_y, \\ \langle D(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}) \rangle_y = \varepsilon_1 \langle E(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \Delta_{41}) \rangle_x\end{aligned} \qquad (19)$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned}\langle D(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \Delta_{41}) \rangle_y = \varepsilon_1 \langle E(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}) \rangle_y, \\ \langle D(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \Delta_{41}) \rangle_y = \varepsilon_1 \langle E(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}) \rangle_x.\end{aligned} \qquad (20)$$

В соотношениях (19) и (20), согласно формулам (4), $\Delta_{\vartheta 1} = -\Delta_{1\vartheta}$ ($\vartheta = 2, 3, 4$).

Преобразованиям симметрии (19) и (20) можно придать вид одного соотношения, устанавливающего связь между средними значениями энергий,

$$\langle W(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}) \rangle = \langle W(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \Delta_{41}) \rangle. \qquad (21)$$

где $\langle W \rangle = \langle D \rangle_x \langle E \rangle_x + \langle D \rangle_y \langle E \rangle_y$.

Равенство (21) можно интерпретировать, используя терминологию, предложенную в работе [11], как соотношение между энергиями исходной и взаимной осистем. В заключение отметим, что преобразования симметрии выполняются для кусочно-однородных сред с различным структурным строением. Их практическая ценность состоит в том, что они позволяют контролировать правильность вычислений и, кроме того, могут быть использованы для упрощения расчетов. Например, в рассматриваемом случае, достаточно было вычислить только две из четырех компонент электрического поля, $\langle D \rangle_x$ и $\langle E \rangle_x$ или $\langle D \rangle_y$ и $\langle E \rangle_y$, соответственно две другие можно найти из соотношений (19) или (20).

Тензор эффективной диэлектрической проницаемости

Компонента $\varepsilon_{\text{eff}xx}$ тензора $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}$ находится из соотношения (7). Средние величины электрического поля в этом соотношении определены формулами (13) и (17). В результате получаем

$$\varepsilon_{\text{eff}xx} = \varepsilon_1 \times \frac{\begin{array}{r}1-\alpha(\Delta_{12}s_1+\Delta_{13}s_2+\Delta_{14}s_3)+\Delta_{12}\Delta_{13}G(r_1,r_2)+\Delta_{12}\Delta_{14}G(r_1,r_3)+ \\ +\Delta_{13}\Delta_{14}G(r_2,r_3)+\Delta_{12}^2H(r_1)+\Delta_{13}^2H(r_2)+\Delta_{14}^2H(r_3)\end{array}}{\begin{array}{r}1+\beta(\Delta_{12}s_1+\Delta_{13}s_2+\Delta_{14}s_3)+\Delta_{12}\Delta_{13}U(r_1,r_2)+\Delta_{12}\Delta_{14}U(r_1,r_3)+ \\ +\Delta_{13}\Delta_{14}U(r_2,r_3)+\Delta_{12}^2V(r_1)+\Delta_{13}^2V(r_2)+\Delta_{14}^2V(r_3)\end{array}}, \qquad (22)$$

где α и β — численные параметры, $\alpha + \beta = 2$, $\alpha = 4/3$. Следует отметить, что для композитных материалов, которые в среднем изотропны, эти параметры равны друг другу $\alpha = \beta = 1$. Для материалов же, которые после осреднения приобретают анизотропные свойства $\alpha \neq \beta$, причем выполняется строгое равенство $\alpha + \beta = 2$. Численные значения параметров α и β характеризуют, очевидно, структуру макроскопической анизотропии композитного материала. Величины α и β находятся при расчете средних значений поля (достаточно определить одну из них).

Параметры s_ν ($\nu = 1, 2, 3$) в (22) — концентрация компонентов в среде. Они определены как отношения частей поперечного сечения включений, приходящихся на треугольную область осреднения, к площади этого треугольника (рис. 2). Имеем

$$s_\nu^* = \frac{s_\nu/6}{s_{ABC}} = \frac{\pi r_\nu^2/6}{\sqrt{3}h^2/4} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} r_\nu^{*2}, \qquad (23)$$

где s_{ABC} — площадь треугольника ABC, показанного на рис. 2 (звездочки в выражении (22) и последующих формулах опущены).

Отметим что, параметры α и β связаны с параметрами p и q в выражениях (13) и (17) простыми соотношениями $\alpha = 3\sqrt{3}p/2\pi$, $\beta = 3\sqrt{3}q/2\pi$. Функции от радиусов r_ν, фигурирующие в выражении (22), были определены выше. Другой элемент тензора $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}$, компонента $\varepsilon_{\text{eff}yy}$, находятся из второго соотношения (7). Его можно также получить из соотношения взаимности

$$\varepsilon_{\text{eff}xx}(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14})\varepsilon_{\text{eff}yy}(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \Delta_{41}) = \varepsilon_1^2, \quad (24)$$

которое следует из преобразований симметрии (19) и (20).

1) Малая концентрация включений. Если концентрация каждого из трех разновидностей включений мала и, следовательно, малы радиусы цилиндрических волокон, то функции $U(\dots), G(\dots), V(\dots)$ и $H(\dots)$, как показывают расчеты, пренебрежимо малы. Это позволяет пренебречь в формуле (22) членами, содержащими произведения и квадраты параметров $\Delta_{1\vartheta}$ ($\vartheta = 2, 3, 4$). В результате дробно-рациональное выражение компоненты $\varepsilon_{\text{eff}xx}$ принимает вид дробно-линейной функции

$$\varepsilon_{\text{eff}xx} = \varepsilon_1 \frac{1 - \alpha(\Delta_{12}s_1 + \Delta_{13}s_2 + \Delta_{14}s_3)}{1 + \beta(\Delta_{12}s_1 + \Delta_{13}s_2 + \Delta_{14}s_3)}. \quad (25)$$

При этом допускается, что параметры $\Delta_{1\nu}$ могут принимать произвольные значения. Если дополнительно предположить, что разница между диэлектрическими проницаемостями матрицы и включений мала, т.е. малы абсолютные величины параметров $\Delta_{1\vartheta}$, то выражение (25) можно линеаризовать по этим параметрам

$$\varepsilon_{\text{eff}xx} = \varepsilon_1[1 - 2(\Delta_{12}s_1 + \Delta_{13}s_2 + \Delta_{14}s_3)]. \quad (26)$$

Здесь учтено, что $\alpha + \beta = 2$. Формула (26) определяет эффективную диэлектрическую проницаемость слабонеоднородной среды; она записана с точностью до членов первого порядка малости по двум параметрам s_ν и Δ_ϑ. В среде с такими свойствами гексагональная структура уже не проявляется, композитный материал становится в целом изотропным и его диэлектрическая проницаемость определяется скалярной величиной $\varepsilon_{\text{eff}xx} = \varepsilon_{\text{eff}yy} = \varepsilon_{\text{eff}}$.

Линейная зависимость (26) характеризует эффективную диэлектрическую проницаемость матричного неоднородного материала, в котором взаимодействием между включениями можно пренебречь. Локальное электрическое поле в такой системе описывается уравнениями, устанавливающими, что внутри цилиндрических включений поле однородно.

Если в слабонеоднородной среде выполняется соотношение $\Delta_{12}s_1 + \Delta_{13}s_2 + \Delta_{14}s_3 = 0$, то, согласно (26), ее эффективная диэлектрическая проницаемость принимает значение проницаемости матрицы, хотя материал содержит разнородные включения. Физически это означает, что при определенном сочетании включений и их концентраций, отвечающих указанному соотношению, поляризационные явления в неоднородном материале взаимно компенсируются. Это можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть все включения имеют одинаковые концентрации $s_1 = s_2 = s_3$, тогда имеем $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} = 0$. Последнее равенство выполняется, если по крайней мере один из параметров $\Delta_{1\vartheta}$ ($\vartheta = 2, 3, 4$) принимает отрицательное значение и, следовательно, по меньшей мере одно из включений будет иметь диэлектрическую проницаемость больше проницаемости матрицы. Наличие в неоднородной среде нескольких видов включений с проницаемостями больше и меньше диэлектрической проницаемости матрицы создает в диэлектрике поляризованность включений с противоположными направлениями, которые при соблюдении указанных равенств взаимно уравновешиваются.

Интересно отметить, что при этих условиях формула эффективной диэлектрической проницаемости (25) приобретает значение проницаемости матрицы, причем только в этом особом случае отсутствует анизотропия среды, у которой, как отмечалось, параметры $\Delta_{1\vartheta}$ не обязательно малы.

2) Двухкомпонентные диэлектрики. Из общего выражения (22) следует как частный случай формула эффективной диэлектрической проницаемости двухкомпонентных диэлектриков. Варьируя величины параметров $\Delta_{1\vartheta}$ ($\vartheta = 2, 3, 4$) и радиусы включений r_ν ($\nu = 1, 2, 3$), можно получить несколько различных формул, отвечающих различным структурам. Среди них наиболее интересен случай, когда двухкомпонентный диэлектрик сохраняет гексагональное строение. К такой системе можно прийти, если положить, что все включения в материале имеют одинаковые радиусы $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$ и диэлектрические проницаемости $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$ ($\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{14}$). В результате из (22) получим

$$\varepsilon_{\text{eff}xx} = \varepsilon_1 \frac{1 - 4\Delta_{12}s + \Delta_{12}^2 L(r)}{1 - 4\Delta_{12}s + \Delta_{12}^2 M(r)}. \quad (27)$$

Здесь $L(r) = 3[G(r) + H(r)]$, $M(r) = 3[U(r) + V(r)]$, где $r = r_\nu$ и $s = s_\nu$. Двухкомпонентный диэлектрик с таким строением был исследован в работах [6,7], с помощью метода Рэлея авторы указанных работ получили следующее выражение компоненты $\varepsilon_{\text{eff}xx}$ тензора $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}$ (здесь оно записанное в символах настоящей работы):

$$\varepsilon_{\text{eff}xx} = \varepsilon_1 \frac{\begin{matrix}1 - \Delta_{12}s_0 - \Delta_{12}^2 s_0^6[a + (b + c)s_0^6] + \\ + b\Delta_{12}^3 s_0^{13} + bc\Delta_{12}^4 s_0^{24}\end{matrix}}{\begin{matrix}1 + \Delta_{12}s_0 - \Delta_{12}^2 s_0^6[a + (b + c)s_0^6] - \\ - b\Delta_{12}^3 s_0^{13} + bc\Delta_{12}^4 s_0^{24}\end{matrix}}, \quad (28)$$

где $s_0 = 3s$ — суммарная концентрация всех включений; a, b и c — численные коэффициенты: $a = 0.075422$, $b = 1.060283$, $c = 0.000076$; решение (28) получено с точностью до четвертого порядка — в разложениях по параметру Δ_{12} удерживаются члены четвертой степени этого параметра.

Детальное исследование точности решений, полученных с помощью метода Рэлея, было предпринято Мантеуфелом и Тодрисом [7], изучавших погрешности аналитических решений в приближениях до одинадцатого порядка. Авторы работы [7] установили, в частности, что вычисления эффективной диэлектрической проницаемости по формуле (28) отличаются от численных расчетов менее чем на 0.1% при произвольных величинах параметра $|\Delta_{12}|$, если концентрация включений не превосходит значения $s_0 \sim 0.8$. Для сильнонеоднородных сред, когда параметры s_0 и $|\Delta_{12}|$ принимают предельно большие значения $s_0 \to s_{0\,\max}$ ($s_{0\,\max}$ — концентрация при плотнейшей упаковке включений, $s_{0\,\max} = \pi/2\sqrt{3}$) и $|\Delta_{12}| \to 1$, метод Рэлея требует приближений высоких порядков.

Точность формулы (28) достаточно высока, и поэтому, сравнивая с ней результаты вычислений по формуле (27) при одинаковых условиях, можно судить также о точности однодипольного приближения при расчете средних параметров диэлектриков с рассматриваемой структурой. Для наглядности сравнения на рис. 3–5 построены зависимости $\varepsilon_{\text{eff}xx}(\Delta_{21})$ для трех концентраций $s_0 = 3s = 0.25$, 0.5 и 0.75 при $\varepsilon_1 = 1$. Здесь сплошная кривая отвечает формуле (27), штриховая кривая построена по формуле (28) и штрихпунктир соответствует формуле (25). Последняя формула особенно проста и поэтому удобна для оценочных расчетов. Как видно, при концентрации включений 0.75 формулы (27) и (28) дают совпадающие результаты во всем диапазоне изменения диэлектрической проницаемости вкоючений ε_2 (параметра Δ_{21}). При меньших концентрациях формула (27) дает несколько завышенные значения $\varepsilon_{\text{eff}xx}$, начиная с величины параметра $\Delta_{21} = 0.5$ ($\varepsilon_2 \geq 3$); погрешность растет по мере увеличения параметра Δ_{21} и достигает максимальной величины в предельном случае $\varepsilon_2 \to \infty$ ($\Delta_{21} = 1$). Из графиков следует, что формула (25) точно описывает эффективные параметры среды при малых концентрациях включений и при малом отличии их проницаемости от проницаемости матрицы.

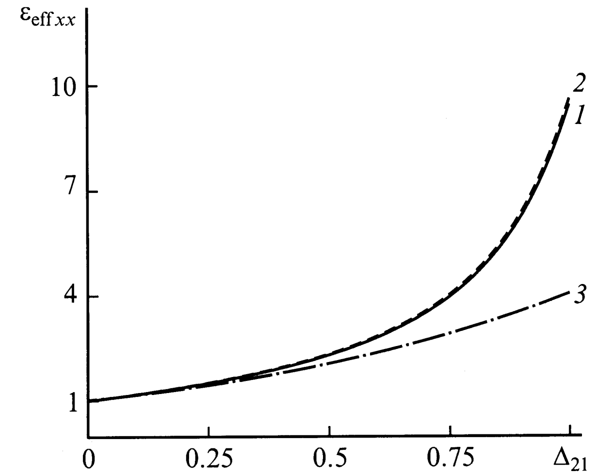

Рис. 5. То же, что на рис. 3, при $s_0 = 3s = 0.75$.

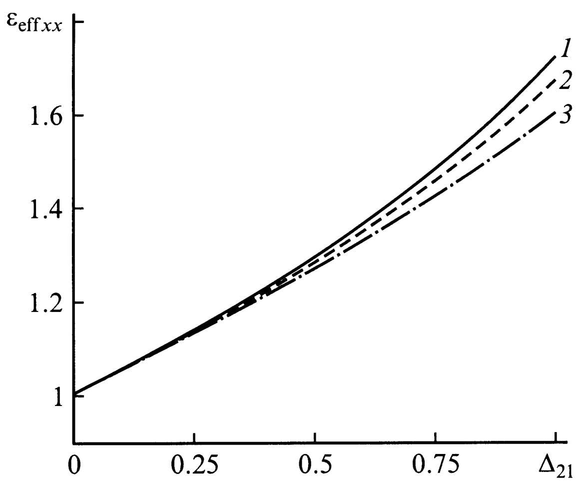

Рис. 3. Зависимости $\varepsilon_{\text{eff}xx}$ от параметра Δ_{21} двухкомпонентного волокнистого диэлектрика, рассчитанные по формулам: *1* — (27), *2* — (28), *3* — (25). $\varepsilon_1 = 1$, $s_0 = 3s = 0.25$.

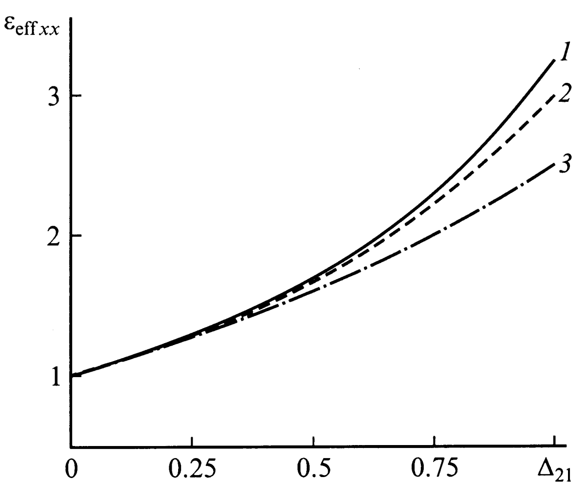

Рис. 4. То же, что на рис. 3, при $s_0 = 3s = 0.5$.

Заключение

Аналитическое изучение четырехкомпонентного диэлектрического материала оказалось возможным благодаря высокому порядку симметрии, которым обладают гексагональные структуры. Исследуемая система имеет регулярное строение и характеризуется операцией зеркального отражения относительно оси x и операцией дискретного вращения (ось *3*) — при повороте на 120° система совмещается сама с собой (рис. 1).

В практическом плане физические свойства четырехкомпонентных диэлектриков более разнообразны по сравнению с двухкомпонентными, что связано с разнородным проявлением у них поляризационных явлений. Как показано в работе, при определенном сочетании концентраций и диэлектрических проницаемостей включений в четырехкомпонентном диэлектрике можно получить эффективную диэлектрическую проницаемость композита, равную проницаемости матрицы. Двухкомпонентные диэлектрики такими свойствами не обладают.

Приложение А. В этом разделе дана формула, устанавливающая значение параметра q, и приведены выражения функций $M(\dots)$, $N(\dots)$ и $V(\dots)$, фигурирующих в формулах (10)–(13). Параметр q определяется так:

$$q = 2\Bigg\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3m-1} - \frac{1}{3m-2}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{3m-1}{(3m-1)^2+3n^2} - \frac{3m-2}{(3m-2)^2+3n^2} + 2\left[\frac{6m-5}{(6m-5)^2+3(2n-1)^2} - \frac{6m-1}{(6m-1)^2+3(2n-1)^2}\right] + 4\left[\frac{m}{12m^2+(2n-1)^2} - \frac{m-1}{12(m-1)^2+(2n-1)^2}\right]\Bigg\}\Bigg\}. \tag{A1}$$

Следует отметить, что формула (A1) есть точное значение параметра q; она справедлива для всех приближений при расчете электрического поля, начиная с однодипольного. Функция $M(r)$, где $r = r_1, r_2, r_3$, имеет вид

$$M(r) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3m-2} - \frac{1}{3m-1} + \frac{1}{r+3m-1} + \frac{1}{r-3m+2}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{3m-2}{(3m-2)^2+3n^2} - \frac{3m-1}{(3m-1)^2+3n^2} + \frac{r-3m+2}{(r-3m+2)^2+3n^2} + \frac{r+3m-1}{(r+3m-1)^2+3n^2} + 2\left[\frac{6m-1}{(6m-1)^2+3(2n-1)^2} - \frac{6m-5}{(6m-5)^2+3(2n-1)^2} + \frac{2r-6m+1}{(2r-6m+1)^2+3(2n-1)^2} - \frac{2r+6m-5}{(2r+6m-5)^2+3(2n-1)^2}\right]\Bigg\}. \tag{A2}$$

Вычисления дают следующее выражение для функции $N(r)$:

$$N(r) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3m-1} - \frac{1}{3m-2} + \frac{1}{r-3m+1} + \frac{1}{r+3m-2}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{3m-1}{(3m-1)^2+3n^2} - \frac{3m-2}{(3m-2)^2+3n^2} + \frac{r-3m+1}{(r-3m+1)^2+3n^2} + \frac{r+3m-2}{(r+3m-2)^2+3n^2} + 2\left[\frac{6m-5}{(6m-5)^2+3(2n-1)^2} - \frac{6m-1}{(6m-1)^2+3(2n-1)^2} + \frac{2r+6m-1}{(2r+6m-1)^2+3(2n-1)^2} + \frac{2r-6m+5}{(2r-6m+5)^2+3(2n-1)^2}\right]\Bigg\}. \tag{A3}$$

Функция $V(r)$ записывается так:

$$V(r) = \frac{4}{3}r^2\Bigg\{r\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r^2+3m^2} + \frac{1}{r^2-9m^2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{r-3m}{(r-3m)^2+3n^2} + \frac{r+3m}{(r+3m)^2+3n^2} + 2\left[\frac{2r-6m-3}{(2r-6m+3)^2+3(2n-1)^2} + \frac{2r+6m-3}{(2r+6m-3)^2+3(2n-1)^2}\right]\Bigg\}\Bigg\}. \tag{A4}$$

Приложение В. В выражениях (14)–(16) параметр p и функции $L(r)$ и $H(r)$ имеют следующие представления. Численный параметр p определяется формулой

$$p = 2\Bigg\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}p\left[\frac{1}{1+27m^2} + \frac{1}{1-9m^2} + \frac{2}{1+27(2m-1)^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1+3n)}{(1+3n)^2+27m^2} + \frac{4(5-6n)}{(5-6n)^2+27(2m-1)^2} + \frac{4(1+6n)}{(1+6n)^2+27(2m-1)^2} + \frac{2-3n}{(2-3n)^2+27(m-1)^2} + \frac{3n-1}{(3n-1)^2+27(m-1)^2} + \frac{2-3n}{(2-3n)^2+27m^2} + \frac{1-3n}{(1-3n)^2+27m^2}\right]\Bigg\}. \tag{B1}$$

В расчетах параметр p представлен также двумя другими формулами, но все они дают одно и то же численное значение $p = 1.612$.

Функция $L(r)$, где $r = r_1, r_2, r_3$, имеет вид

$$L(r) = \frac{2}{\sqrt{3}}\Bigg\{r\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{r^2+(3m-1)^2}+\frac{1}{r^2+(3m-2)^2}\Bigg]$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{r+\sqrt{3}n}{(r+\sqrt{3}n)^2+(3m-1)^2}$$

$$+\frac{r-\sqrt{3}n}{(r-\sqrt{3}n)^2+(3m-1)^2}+\frac{r+\sqrt{3}n}{(r+\sqrt{3}n)^2+(3m-2)^2}$$

$$+\frac{r-\sqrt{3}n}{(r-\sqrt{3}n)^2+(3m-2)^2}$$

$$+2\Bigg[\frac{2r+\sqrt{3}(2n-1)}{[2r+\sqrt{3}(2n-1)]^2+(6m-1)^2}$$

$$+\frac{2r-\sqrt{3}(2n-1)}{[2r-\sqrt{3}(2n-1)]^2+(6m-1)^2}$$

$$+\frac{2r+\sqrt{3}(2n-1)}{[2r+\sqrt{3}(2n-1)]^2+(6m-5)^2}$$

$$+\frac{2r-\sqrt{3}(2n-1)}{[2r-\sqrt{3}(2n-1)]^2+(6m-5)^2}\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}. \qquad (B2)$$

Функция $H(r)$ имеет вид

$$H(r) = \frac{4r^2}{3\sqrt{3}}\Bigg\{r\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r^2+9m^2}+\frac{1}{r^2-3m^2}\right)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{r+\sqrt{3}n}{(r+\sqrt{3}n)^2+9m^2}+\frac{r-\sqrt{3}n}{(r-\sqrt{3}n)^2+9m^2}$$

$$+2\Bigg[\frac{2r+\sqrt{3}(2n-1)}{[2r+\sqrt{3}(2n-1)]^2+9(2m-1)^2}$$

$$+\frac{2r-\sqrt{3}(2n-1)}{[2r-\sqrt{3}(2n-1)]^2+9(2m-1)^2}\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}. \qquad (B3)$$

Параметр p и функции $L(r)$ и $H(r)$, как и параметр q и функции $M(r), N(r)$ и $V(r)$, получены в результате интегирования комплексных выражений диполей, фигурирующих в формулах электрического поля (3), и аналогичных им.

Список литературы

[1] Современная кристаллография. Физические свойства кристаллов. Т. 4 / Под ред. Б.К. Вайнштейна, А.А. Чернова, Л.А. Шувалова. М.: Наука, 1981. 496 с.

[2] *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наукова думка, 1989. 208 с.

[3] *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 503 с.

[4] Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. М.: Мир, 1978. 564 с.

[5] *Фокин А.Г.* // УФЕ. 1996. № 10. С. 1069–1093.

[6] *Perrins W.T., McKenzie D.R., McPhedran R.C.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1979. Vol. 369. P. 207–225.

[7] *Manteufel R.D., Todreas N.E.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. Vol. 37. N 4. P. 647–657.

[8] *Lord Rayleigh* // Phil. Mag. 1992. Vol. 34. P. 481–502.

[9] *Emets Yu.P., Onofrichuk Yu.P.* // IEEE Trans. DEI. 1996. Vol. 3. N 1. P. 87–98.

[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

[11] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. Вып. 2. С. 665–671.