01;09

Теория одномерных брэгговских резонаторов планарной геометрии

© П.В. Петров

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики, 456770 Снежинск, Челябинская область, Россия
e-mail: p.v.petrov@vniitf.ru

(Поступило в Редакцию 12 февраля 2001 г. В окончательной редакции 8 июня 2001 г.)

Исследованы отражающие свойства одномерных брэгговских решеток планарной геометрии. Предложена модель связанных резонаторов для исследования процессов дифракции электромагнитных полей при произвольной гофрировке поверхности волновода, в основе которой лежат уравнения, полученные из двумерной граничной задачи для уравнения Гельмгольца без каких-либо приближений. Представлен конкретный вид уравнений для прямоугольной гофрировки пластин, составляющих решетку. Приведены результаты расчетов коэффициентов отражения для брэгговских решеток в зависимости от длины гофрировки и частоты падающего излучения. Для сучая "узкой" гофрировки получено аналитическое решение.

Введение

Одним из перспективных подходов к созданию электродинамических систем для мазеров на свободных электронах (МСЭ) является использование брэгговских резонаторов [1–4], реализующих распределенную обратную связь и обеспечивающих пространственную когерентность излучения. Брэгговские резонаторы представляют собой отрезки волноводов в одно- или двупериодической гофрировкой (брэгговские решетки) [1,5].

Математические модели [1–5], используемые для описания спектра мод и коэффициентов отражения брэгговских решеток, основаны на теории связанных мод, в которой коэффициенты связи волн получаются методом возмущений [6,7]: деформация (гофрировка) поверхности волновода, заданная функцией $l(\mathbf{r})$, заменяется "эквивалентным" граничным условием на невозмущенной поверхности регулярного волновода [7]

$$\mathbf{E}_\tau = \nabla\big(l(\mathbf{r})\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\big) - i\,\frac{\omega}{c}\,l(\mathbf{r})[\mathbf{n},\mathbf{H}], \tag{1}$$

$\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности волновода; $\mathbf{E},\mathbf{H} \sim \exp(-i\omega t)$ — электрическое и магнитное поле в регулярном волноводе; ω — циклическая частота излучения.

Условиями применимости этого приближения являются [7] 1) малость деформации (высота гофры существенно меньше длины волны падающего излучения и периода гофры); 2) малость угла пересечения между деформированной и недеформированной поверхностями. Практически во всех экспериментах с брэгговскими резонаторами используется прямоугольная гофрировка решеток [1–5], при которой, как правило, выполняется условие малости деформации и не выполняется условие малости углов пересечения поверхностей. Даже при синусоидальной гофрировке поверхности, которая широко используется для численного моделирования, угол пересечения поверхностей составляет $\pi/4$ rad, который вряд ли можно в данных условиях считать малым. В связи с этим представляется весьма актуальной задачей разработка физико-математической модели, которая бы адекватно описывала дифракцию электромагнитных волн на одно- и двумерных брэгговских решетках без использования теории возмущений, имела точность прямых численных методов и не сопровождалась присущим им математическим и вычислительным трудностям.

В настоящей работе представлены описание модели связанных резонаторов для расчета электромагнитных полей в планарных одномерных брэгговских решетках и результаты исследования их отражающих свойств.

Уравнение для магнитного поля

Рассмотрим полый планарный волновод с идеально проводящими стенками, бесконечный в направлении оси OY, симметричный относительно плоскости OX, невозмущенный (регулярный) контур которого задан функцией $x = \pm L_x$. Пусть на боковых поверхностях этого волновода на интервале $0 < z < L$ нанесено конечное число гофр M, так же симметричных относительно плоскости OX. Определим контур q-й гофры функцией $x = l_q(z)$ (рис. 1)

$$x = \begin{cases} l_q(z), & z \in [a_{q,1}, a_{q,2}], \\ 0, & z < a_{q,1},\ \ z > a_{q,2},\ \ q = 1, M. \end{cases} \tag{2}$$

Будем считать, что со стороны отрицательных z брэгговская решетка возбуждается одной из собственных мод невозмущенного волновода с продольным волновым числом h_p и поперечным $g_p = \sqrt{k^2 - h_p^2}$. Рассмотрим случай возбуждения ТМ-мод волновода, когда отличны от нуля только компоненты E_x, E_z, H_y. В этом случае исходная векторая задача по нахождению электромагнитных полей сводится к краевой задаче для скалярного уравнения Гельмгольца относительно компоненты магнитного поля $H \equiv H_y(x,z)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H = 0 \tag{3}$$

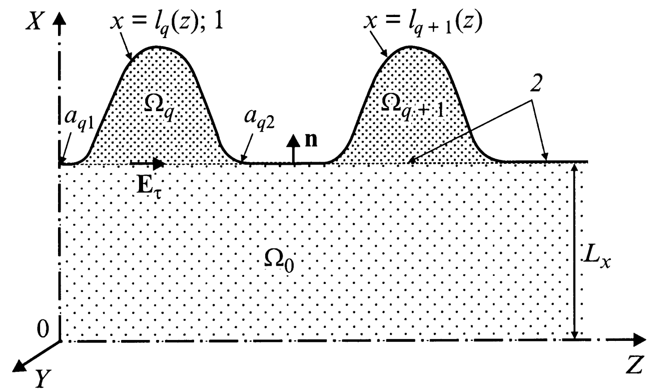

Рис. 1. Планарная модель брэгговской решетки: *1* — контур q-го гофра, *2* — контур "невозмущенного" регулярного волновода.

в области $(x, z) \in \Omega = \bigcup_{q=1}^{M} \Omega_q \bigcup \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{0 < x < L_x, -\infty < z < \infty\}$ — область регулярного волновода; $\Omega_q = \{L_x < x < l_q(z),\ 0 < x < L\}$ — область q-го гофра; $q = 1, M$, со следующими граничными условиями: на металлической поверхности решетки и плоскости симметрии $0Z$ с однородным условием Неймана

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S=\bigcup_q\{x=l_q(z)\}\bigcup\{x=0\}} = 0, \tag{4}$$

при $z = 0$ с условием возбуждения решетки заданной TM-модой

$$\frac{\partial H}{\partial z} + ih_pH = 2ih_p\cos(g_px), \tag{5}$$

при $z = L$ с условием свободного выхода волн из системы

$$\frac{\partial H}{\partial z} - ih_\nu H = 0, \qquad h_\nu = \sqrt{k^2 - g_\nu^2},$$

$$g_\nu = \frac{\pi}{L_x}\nu; \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Компоненты электрического поля определяются из соотношений

$$E_z = -\frac{1}{ik}\frac{\partial H}{\partial x}; \quad E_x = \frac{1}{ik}\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) с граничными условиями (4)–(6) будем искать отдельно для области регулярного волновода Ω_0 и для каждой из гофр Ω_q, $q = 1, M$. В области Ω_0 представим магнитное поле в виде суммы падающего и рассеянного полей

$$H = \begin{cases} H_0 + H_s, & \mathbf{r} \in \Omega_0, \\ H_q, & \mathbf{r} \in \Omega_q, \end{cases} \tag{8}$$

где H_0 — удовлетворяет граничным условиям (4)–(6).

На границе с регулярным волноводом $x = L_x$ тангенциальные компоненты поля непрерывны

$$H_q(z) = H_0(z) + H_s(z) \tag{9}$$

и рассеянное поле H_s удовлетворяет однородным граничным условиям (4) и условию выхода волн при $z = 0, L$.

Будем полагать, что на границе гофры и невозмущенного волновода составляющая электрического поля вдоль оси $0Z$ определяется некоторой функцией $E_z(x = L_x, y, z) = E_\tau(z)$. Тогда для определения H_s в области Ω_0 получаем следующую краевую задачу:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_s = 0, \tag{10}$$

$$\left[\pm\frac{\partial H_s}{\partial z} + ih_\nu H_s\right]\Bigg|_{z=0,L} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\left.\frac{\partial H_s}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial H_s}{\partial x}\right|_{x=L_x} = -ikE_\tau(z), \tag{11}$$

решение которой может быть представлено через функцию Грина [8]

$$H_s(x, z) = -\frac{ik}{4\pi}\int_0^L dz'\mathrm{G}_k(x, z, x' = L_x, z')E_\tau(z'), \tag{12}$$

$$\mathrm{G}_k(x, z, x', z') = \frac{2\pi i}{L_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{h_\nu}\cos(g_\nu x)\cos(g_\nu x')$$

$$\times \exp(ih_\nu|z - z'|),$$

$$g_\nu = \frac{\pi\nu}{L_x}, \quad h_\nu = \sqrt{k^2 - g_\nu^2}, \quad \varepsilon_\nu = \begin{cases} 2, & \nu = 0, \\ 1, & \nu \neq 0. \end{cases} \tag{13}$$

На поверхности регулярного волновода выражение (12) для $H_s^s(z) \equiv H_s(x = L_x, z)$ можно записать в более компактной операторной форме

$$H_s^s = -ik\hat{\mathrm{G}}_R E_\tau, \tag{14}$$

$$\hat{\mathrm{G}}_R = \frac{i}{2L_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{h_\nu}\int_0^L dz'\exp(ih_\nu|z - z'|). \tag{15}$$

Определим связь между электрическим полем $E_\tau(z)$ и магнитным полем H_q на границе пересечения q-го гофра Ω_q с регулярным волноводом $x = L_x$, $a_{q,1} \leqslant z \leqslant a_{q,2}$. Независимо от формы гофрировки внутри области Ω_q магнитное поле H_q является решением уравнения Гельмгольца (3) с однородными условиями Неймана (4) на металлической поверхности гофры $x = l_q(z)$, $a_{q,1} \leqslant z \leqslant a_{q,2}$ и должно удовлетворять соотношению (9) на границе с регулярным волноводом. Используя формулу Грина [8] для определения $H_q(x, z)$ через значения поля на границе $S_q = \{x = l_q(z)\}\bigcup\{x = L_x\}$,

$a_{q,1} \leqslant a_{q,2}$ области q-го гофра Ω_q с регулярным волноводом, получаем

$$H_q(x,z) = \oint\limits_{S_q} d\mathbf{S}_q H(\mathbf{r}'_s)\mathrm{G}_q(x,z,\mathbf{r}'_s)$$

$$= \int\limits_{a_{q,1}}^{a_{q,2}} dz'\big(H_0^s(z') + H_s^s(z')\big)\mathrm{G}_q(x,z,z'), \quad (16)$$

где G_q — поверхностная функция Грина для уравнения Гельмгольца в области Ω_q, удовлетворяющая однородным условиям Неймана (4) на металлической поверхности гофра $\{x = l_q(z),\ a_{q,1} \leqslant z \leqslant a_{q,2}\}$ и неоднородным условиям Дирихле на границе с регулярным волноводом $x = L_x$.

Используя соотношение (7) из (16), получаем следующее выражение для $E_z^q(x,z)$ в области q-й гофры:

$$E_z^q(x,z) = -\frac{1}{ik}\frac{\partial H_q(x,z)}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{ik}\int\limits_{a_{q,1}}^{a_{q,2}} dz'\big(H_0^s(z') + H_s^s(z')\big)\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{G}_q(x,z,z'). \quad (17)$$

Соответственно на границе q-й гофры с регулярным волноводом $E_\tau^q(z) = E_\tau(z) = E_z(x = L_x, z)$, $z \in [a_{q,1}, a_{q,2}]$ может быть записана в следующем операторном виде:

$$E_\tau^q = -\frac{1}{ik}\hat{\mathrm{G}}_{in}^q(H_0^s + H_s^s), \quad (18)$$

где $\hat{\mathrm{G}}_{in}^q$ — оператор сопряжения электрического и магнитного полей в q-й гофре имеет вид

$$\hat{\mathrm{G}}_{in}^q = \int\limits_{a_{q,1}}^{a_{q,2}} dz'\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{G}_q(x,z,z')\Big|_{x=L_x},$$

$$z, z' \in [a_{q,1}, a_{q,2}]. \quad (19)$$

Учитывая расположение гофр, выражение для $E_\tau(z)$ на всей поверхности регулярного волновода $z \in [0, L]$ можно записать через функцию Хэвисайда $\eta(x) = \{0, x < 0; 1, x > 0\}$ в следующем операторном виде:

$$E_\tau(z) = -\frac{1}{ik}\hat{\mathrm{G}}_{in}(H_0^s + H_s^s),$$

$$\hat{\mathrm{G}}_{in} = \sum_{q=1}^{M}\big(\eta(z - a_{q,1}) - \eta(z - a_{q,2})\big)\hat{\mathrm{G}}_{in}^q. \quad (20)$$

Используя соотношения (14) и (20), для определения $H_s^s(z)$ на поверхности регулярного волновода, получим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$H_s^s - \hat{\mathrm{G}}_R\hat{\mathrm{G}}_{in}H_s^s = \hat{G}_R\hat{\mathrm{G}}_{in}H_0^s, \quad (21)$$

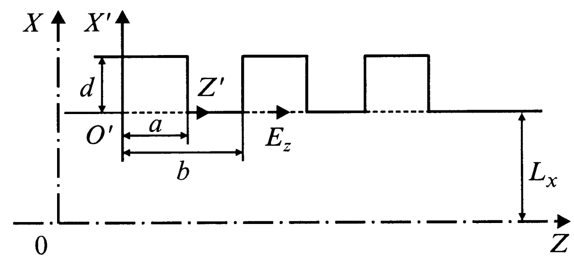

Рис. 2. Прямоугольная периодическая гофрировка в плоском волноводе.

решение которого можно записать в следующем виде:

$$H_s^s = \big(\hat{I} - \hat{\mathrm{G}}_R\hat{\mathrm{G}}_{in}\big)^{-1}\hat{\mathrm{G}}_R\hat{\mathrm{G}}_{in}H_0^s. \quad (22)$$

Далее по известным значениям $H_s^s(z)$ по формуле (20) можно определить $E_\tau(z)$ и, используя соотношение (12), определить рассеянное магнитное поле во всем объеме волновода.

Построение оператора сопряжения для прямоугольной гофрировки

Оператор $\hat{G}_{in}$ определяет зависимость параметров рассеянного излучения от конкретной формы гофр и их распределения по длине брэгговской решетки. Наиболее простой вид $\hat{G}_{in}$ имеет для прямоугольной гофрировки (рис. 2), нанесенной на поверхность плоского волновода с периодом b.

Введем локальную систему координат $X'O'Z'$ для первой прямоугольной гофры (рис. 2). Функция Грина для уравнения Гельмгольца (3) в прямоугольной области шириной a и высотой d с однородными условиями Неймана на металлических стенках гофра ($z' = [0, a]$; $x' = d$) и неоднородным условием Дирихле на поверхности сопряжения с регулярным волноводом ($x' = 0$) имеет вид [8]

$$\mathrm{G}_q(x,z,z') = \frac{2}{a}\sum_n \cos(\chi_n z)\cos(\chi_n z')\frac{\operatorname{sh}\beta_n(x-d)}{\varepsilon_n \operatorname{ch}\beta_n d},$$

$$\chi_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_n = \sqrt{\chi_n^2 - k^2}. \quad (23)$$

В соответствии с (19) получим следующее выражение для оператора $\hat{\mathrm{G}}_{in}^q$:

$$\hat{\mathrm{G}}_{in}^q(z,z') = -\frac{2}{a}\sum_n \frac{\beta_n}{\varepsilon_n}\tanh(\beta_n d)\cos(\chi_n z)$$

$$\times \int\limits_0^a dz'\cos(\chi_n z') \quad (24)$$

и оператора $\hat{G}_{in}$:

$$\hat{G}_{in}(z, z') = -\frac{2}{a}\sum_{q=0}^{M-1}\left[\eta(z_q) - \eta(z_q - a)\right]$$

$$\times\left(\sum_n \gamma_n \cos(\chi_n z_q)\int\limits_{z_q}^{z_q+a} dz' \cos\big(\chi_n(z' - bd)\big)\right),$$

$$\gamma_n = \frac{\beta_n}{\varepsilon_n}\tanh(\beta_n d), \quad z_q = z - qb. \tag{25}$$

Явный вид для операторов $\hat{G}_{in}$ и $\hat{G}_R$ через выражения (15) и (25) дает возможность получить численное решение $H_s^s(z)$ уравнения (21) и определить коэффициент отражения решетки

$$R = \frac{1}{S_0}\int\limits_0^{L_x} dx\, S_z(x, z_0),$$

$$S_z(x, z_0) = E_x(x, z_0)H_y^*(x, z_0) = \frac{1}{ik}H_y^*\frac{\partial H_y}{\partial z}(x, z_0), \tag{26}$$

где $H_y(x, z_0)$ определяется по формуле (12) для точек с координатой z_0, лежащих вне гофрировки; функция $E_\tau(z)$ вычисляется по формуле (20); S_0 — поток энергии электромагнитной волны, падающей на брэгговскую решетку.

Аналитическое решение для одномодового рассеяния на узкой гофре

В общем случае уравнение (21) решается численными методами, но в случае узкой гофры (ширина гофры a мала по сравнению с длиной волны падающего излучения λ) для него можно получить аналитическое решение. В этом случае в представлении оператора $\hat{G}_{in}$ (25) достаточно ограничиться только одним, первым, членом. Тогда связь между электрическим и магнитным полями на поверхности гофра и регулярного волновода (18) сводится к соотношению

$$E_z^q(z) = \frac{i}{a}\tan(kd)\int\limits_{bq}^{bq+a} dz'\big(H_0^s(z') + H_s^s(z')\big). \tag{27}$$

В пределе бесконечно узкой гофрировки $a \to 0$ это соотношение переходит в импедансное граничное условие, использованное в [9] при расчете поверхностных волн над гребенчатой структурой,

$$E_\tau^q = i\tan(kd)\big(H_0^s(bq) + H_s^s(bq)\big), \tag{28}$$

а оператор $\hat{G}_{in}$ вырождается в сумму дельта-функций Дирака

$$\hat{G}_{in} = -ka\tan(kd)\sum_{q=0}^{M-1}\boldsymbol{\delta}(z - qb). \tag{29}$$

Ограничимся рассмотрением взаимного рассеяния TEM-волн (одномодовое рассеяние): $\nu = 0$, $H_0^s = \exp(ikz)$. Уравнение (21) принимает вид

$$H_s^s(z) = i\beta\sum_{q=0}^{M-1}\int\limits_0^L dz' \exp(ik|z - z'|)$$

$$\times\big(H_s^s(z') + \exp(ikz')\big)\boldsymbol{\delta}(z' - qb), \tag{30}$$

где безразмерный параметр

$$\beta = \frac{a}{2L_x}\tan(kd) \tag{31}$$

определяет зависимость решения от параметров гофры и волновода. Для частного случая $h_p = k = \pi/b$, соответствующего условию брэгговского резонанса [1],

$$h_p + h_0 = h, \tag{32}$$

его решение может быть записано в аналитическом виде

$$H_s^s(z) = \frac{i\beta}{1 - i\beta M}\sum_{q=0}^{M-1}(-1)^q\exp(ik|z - qb|). \tag{33}$$

Соответственно для коэффициента отражения получаем следующее выражение

$$R = \frac{\beta^2M^2}{1 + \beta^2M^2}. \tag{34}$$

В рамках этого приближения оказывается возможным определить область возникновения резонанса. Здесь удобно перейти от интегрального уравнения (30) к дифференциальному уравнению 2-го порядка [8]. Для определения области резонанса достаточно рассмотреть однородное уравнение для решетки с бесконечным числом гофр

$$\frac{d^2H_s^s(z)}{dz^2} + \big(k^2 + \mathrm{F}(z)\big)H_s^s(z) = 0,$$

$$\mathrm{F}(z) = 2k\beta\sum_{q=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\delta}(z - qb). \tag{35}$$

Функция $\mathrm{F}(z)$ является периодичной функцией с периодом b и может быть представлена в виде ряда Фурье, где переходя к переменной $x = k_0 z$, получим

$$\frac{d^2H_s^s}{dx^2} + \left(\frac{k^2}{k_0^2} + 2\frac{\beta k}{\pi k_0}\right.$$

$$\times\left.\big(1 + 2\cos(2x) + 2\cos(4x) + \ldots\big)\right)H_s^s = 0. \tag{36}$$

Известно, что уравнение (36) описывает явление параметрического резонанса [10]. Если рассматривать только первый (самый интенсивный резонанс), который возникает при $k/k_0 \simeq 1$ [10], и пренебречь влиянием

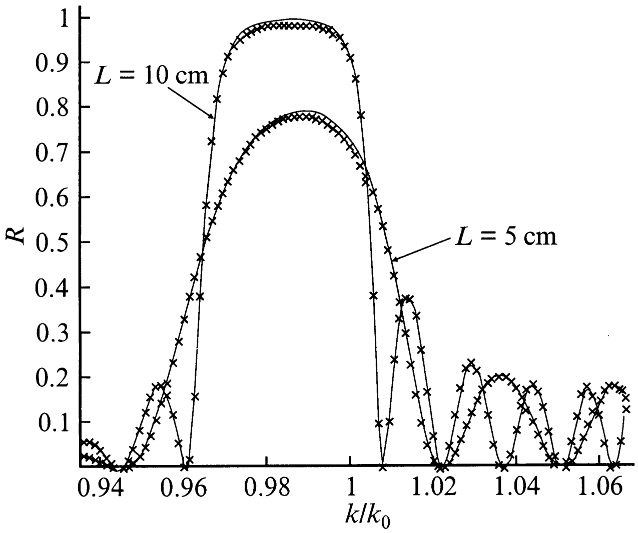

Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от величины волнового вектора для одномодового рассеивания электромагнитной волны, рассчитанного для брэгговских решеток различной длины с узкой гофрой ($a = 0.01$ cm, $d = 0.09$ cm). Кривая — уравнение (20), $\nu = 0$, $a = 1e-2$ cm, $d = 9e-2$ cm; $\times$ — уравнение (29), β — $6.3e-2$.

резонансов более высокого порядка, то уравнение (36) сведется к уравнению Матье [11]

$$\frac{d^2H_s^s}{dx^2} + \big(s(k) - 2p(k)\cos(2x)\big)H_s^s = 0,$$

$$s(k) = \frac{k^2}{k_0^2} + 2\,\frac{\beta k}{\pi k_0}; \quad p(k) = -2\,\frac{\beta k}{\pi k_0}. \qquad (37)$$

Условия возникновения параметрического резонанса соответствуют области неустойчивости функций Матье и для $p(k) \leqslant 0$ лежат между кривыми [11]

$$s_{2r+1}(p) \leqslant s \leqslant c_{2r+1}(p). \qquad (38)$$

Здесь s_r, c_r — собственные числа уравнения Матье, соответствующие четным и нечетным решениям при фиксированном p. Для первого резонанса $r = 0$ в области $k \approx k_0$ функции $s_1(p), c_1(p)$ могут быть представлены в виде степенных рядов по p [11]

$$s_1(p) = 1 + p - \frac{p^2}{8} + \ldots, \quad c_1(p) = 1 - p - \frac{p^2}{8} + \ldots \quad (39)$$

Подставляя в (38) выражения (39) с функциями $s(k)$, $p(k)$ из (37), получим диапазон значений k, при которых возникает параметрический резонанс. С точностью до величин порядка β получаем

$$k_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\,\beta\right) \leqslant k \leqslant k_0. \qquad (40)$$

Отсюда видно, что условие возникновения брэгговского резонанса (32), использованное в работах [1–5], является приближенным и показывает только примерное положение резонанса. Это подтверждается расчетами зависимости коэффициента отражения электромагнитной волны, рассчитанного из (22) в одномодовом режиме, от величины волнового вектора для брэгговских решеток с узкой гофрировкой ($L_x = 0.5$ cm, $a = 0.01$ cm, $d = 0.09$ cm, $\beta = 6.3 \cdot 10^{-2}$) длиной $L = 5$ и 10 cm, приведенными на рис. 3. На этом же графике дан коэффициент отражения, полученный из решения (30) с $\beta = 6.3 \cdot 10^{-2}$ для гофрировки в виде $\boldsymbol{\delta}$-функций.

Расчеты коэффициентов отражения одномерных брэгговских решеток

Практическое использование брэгговских решеток в основном связано с использованием их отражающих свойств. Наибольший интерес представляют зависимости коэффициента отражения от длины гофрировки и частоты падающего излучения с заданными значениями периода гофры и ее глубины. Определение отражающих свойств одномерных брэгговских решеток проводилось для плоского волновода с расстоянием между пластинами $2L_x = 1$ cm и прямоугольной гофрировкой с периодом — 0.2 cm.

На рис. 4 приведены результаты расчетов зависимости коэффициента отражения электромагнитной волны с частотой $\nu = 75$ GHz от длины брэгговских решеток с различными значениями ширины и глубины гофры, но одинаковым значением параметра $\beta \cong 6.3 \cdot 10^{-2}$,

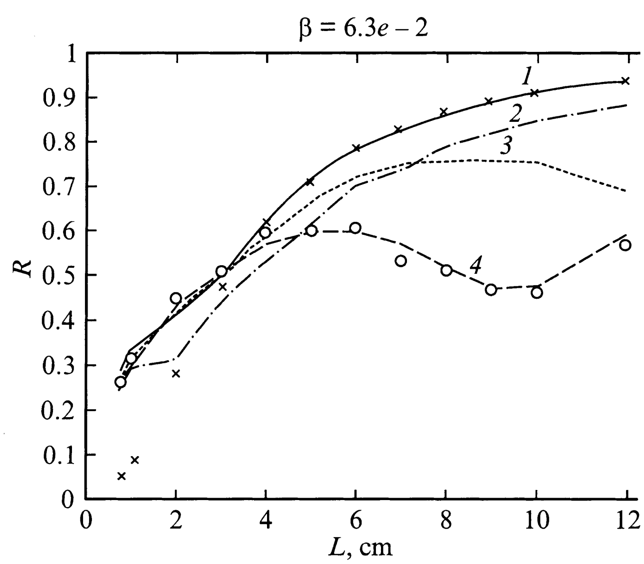

Рис. 4. Графики зависимости коэффициента отражения *TEM*-волны ($\nu = 75$ GHz) от длины одномерной брэгговской решетки с периодом 0.2 cm для гофрировки различной ширины и глубины, но одинаковым значением параметра $\beta = 6.3 \cdot 10^{-2}$. *1* — $a = 4e-3$ cm, $d = 9.6e-2$ cm; *2* — $a = 1e-2$ cm, $d = 9e-2$ cm; *3* — $a = 4e-2$ cm, $d = 6.4e-2$ cm; *4* — $a = 0.1$ cm, $d = 3.6e-2$ cm; $\times$ — аналитическое представление (32); $\circ$ — метод КЭ ($a = 0.1$ cm, $d = 3.6e-2$ cm).

Модовый состав отраженного излучения при падении на брэгговскую решетку длиной L TEM-моды планарного волновода с $L_x = 0.5$ cm

L, cm	Модовый состав излучения, %; для "узкой" гофрировки $a = 0.01$ cm, $d = 0.09$ cm			Модовый состав излучения, %; для "широкой" гофрировки $a = 0.1$ cm, $d = 0.36$ cm		
	TEM	TM_{02}	TM_{04}	TEM	TM_{02}	TM_{04}
0.8	30.1	60.3	9.7	28.6	61.0	10.4
1	33.5	64.4	2.2	31.8	65.7	2.4
2	46.4	46.3	7.2	36.3	58.0	5.6
3	62.5	32.5	5.0	49.9	43.0	7.1
4	75.5	23.8	0.7	66.5	28.3	5.2
5	84.4	15.4	0.2	80.2	16.9	3.0
6	89.9	9.0	1.1	87.9	10.0	2.1
7	92.7	6.2	1.1	87.9	10.7	1.4
8	94.2	5.5	0.2	76.6	22.7	0.7
9	95.6	4.3	0.0	55.2	43.7	1.1
10	96.9	2.8	0.3	45.0	53.1	1.9
12	97.9	1.9	0.1	71.4	24.9	3.7

полученными численным решением уравнения (21) с оператором $\hat{G}_{in}$ в виде (25). Для сравнения здесь же представлены значения коэффициента отражения, полученные для бесконечно узкой гофры по формуле (34), и данные расчета методом конечных элементов [12].

Полученные данные показывают, что формула (34) достаточно точно описывает зависимость коэффициента отражения R от длины гофрировки для длинных решеток. Отличие расчетных значений R от величин, предсказываемых аналитической формулой для малых длин гофры, связано с модовым составом отраженного излучения. Формула (34) получена в предположении, что при падении TEM-моды на решетку отражение также происходит в TEM-моду. Однако анализ модового состава отраженного излучения показывает, что для малых длин и "широкой" гофры значительная часть энергии отраженной электромагнитной волны находится с $TM_{02,04}$-модах (см. таблицу). С увеличением длины решетки доля энергии в этих модах уменьшается и рассеяние начинает проходить в одномодовом режиме $TEM \Rightarrow TEM$.

Из расчетов видно, что в случае узкой гофры $a \ll \lambda$, где достаточно хорошо работает импедансное граничное условие (28), отражающие свойства решетки определя-

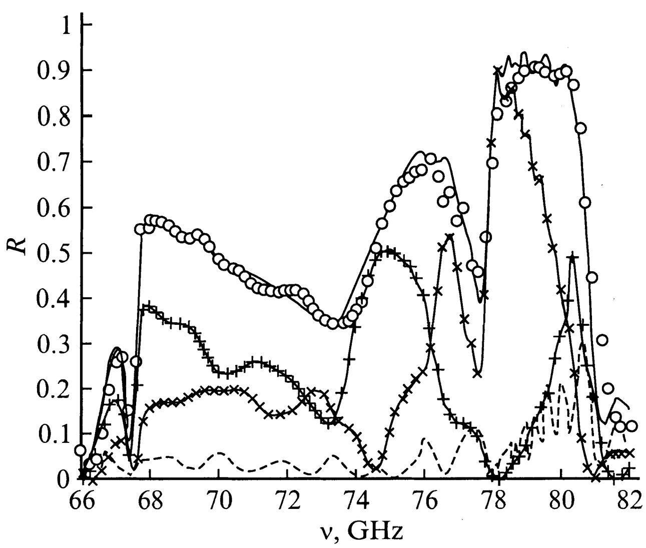

Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения TEM-волны для одномерной брэгговской решетки длиной $L = 5$ cm с периодом 0.2 cm и прямоугольной гофрировкой $a = 0.01$ cm, $d = 0.09$ cm в зависимости от частоты. Сплошная кривая — R_{tot}, штриховая — R_{TM02}, $\circ$ — R_{tot}-метод КЭ, $+$ — R_{TEM}, $\times$ — R_{TM02}.

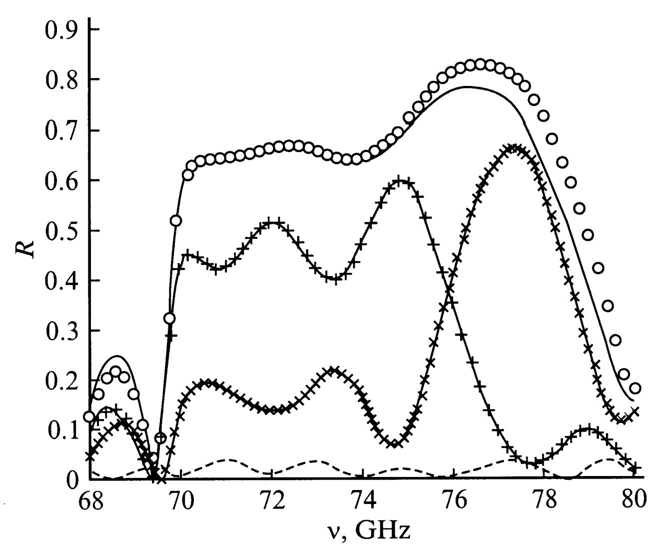

Рис. 6. Зависимость коэффициента отражения TEM-волны для одномерной брэгговской решетки длиной $L = 5$ cm с периодом 0.2 cm и прямоугольной гофрировкой $a = 0.1$ cm, $d = 0.03$ cm в зависимости от частоты. Обозначения те же, что и на рис. 5.

ются безразмерным параметром β (31), как и предсказывает теория. С увеличением ширины гофры условия применимости (28) нарушаются и для корректного описания дифракции в представлении для оператора $\hat{G}_{in}$ необходимо оставлять члены более высокого порядка. Это подтверждается сравнением с прямыми расчетами рассеяния электромагнитной волны методом конечных элементов [12].

Зависимости полного коэффициента рассеяния и коэффициентов рассеяния по парциальным TM-модам от частоты TEM-моды, падающей на брэгговские решетки с "узкой" $a = 0.01$ cm, $d = 0.09$ cm и "широкой" $a = 0.1$ cm, $d = 0.03$ cm гофрировкой длиной $L = 5$ cm, приведены на рис. 5, 6.

Заключение

В работе представлена теория возбуждения электромагнитных полей одномерными брэгговскими решетками на основе метода связанных резонаторов. Метод основан на применении Грина для двумерной краевой задачи уравнения Гельмгольца, получен без каких-либо приближений и вследствие этого может быть использован для расчета гофрированных структур произвольной формы и размеров. Представлены результаты анализа уравнений, из которых для случая "узкой" гофрировки получено аналитическое решение, зависящее только от одного безразмерного параметра, который определяется формой и размерами гофра брэгговской решетки. Приведены результаты численных расчетов для коэффициента отражения TEM-моды от одномерных брэгговских решеток различной длины и на различных частотах. Проведено сравнение полученных данных с результатами аналитического рассмотрения для случая "узкой" гофрировки и прямых численных расчетов методом конечных элементов.

Список литературы

[1] *Денисов Г.Г., Резников М.Г.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. XXM. № 5. С. 562.

[2] *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г.* // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 21. С. 1320.

[3] *Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 9. С. 23.

[4] *Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S.* et al. // Nuclear Instr. and Meth. Phys. Res. A. 1995. Vol. A358. P. 189.

[5] *Песков Н.Ю., Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г.* и др. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 8. С. 72.

[6] *Ковалев Н.Ф., Орлова И.М., Петелин М.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 5. С. 783.

[7] *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.

[8] *Морс Ф.М., Фишбах Г.* Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958.

[9] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.

[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988.

[11] *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

[12] *Partial* Differential Equation Toolbox User's Guide. The Mathworks Inc., 1997.