01;09

Обобщенная функция Кантора и переходное фрактальное рассеяние

© В.Н. Болотов

Институт электромагнитных исследований,
61022 Харьков, Украина
e-mail: renic@iemr.vl.net.ua

(Поступило в Редакцию 9 января 2001 г.)

Для построения теории фрактальной электродинамики вводится в рассмотрение новая обобщенная функция, построение которой основано на структуре множества Кантора и канторовых мерах. Обсуждаются основные свойства этой обобщенной функции Кантора. Рассмотрена полугруппа операторов, заданных на канторовых мерах. В качестве примера рассмотрена теория переходного рассеяния диссипативного всплеска диэлектрической проницаемости на покоящемся заряде.

Введение

Предмет электродинамики фрактальных сред составляет изучение электромагнитных процессов в пространстве, заполненном веществом, образующим фрактальную структуру. Как и всякая макроскопическая теория, электродинамика фрактальных сред оперирует физическими величинами, усредненными по "физически бесконечно малым" фрактальным элементам объема, не интересуясь атомно-молекулярной структурой вещества. К фрактальным структурам можно отнести фрактальные кластеры, фрактальные поверхности, перколяционные кластеры и другие материальные образования, наблюдаемые в настоящее время в экспериментах. Особенно важным моментом при построении фрактальной электродинамики является процедура усреднения, построение которой возможно с использованием фрактальных и мультифрактальных мер.

Таким образом, в основе построения электродинамики фрактальных сред лежит фундаментальное понятие фрактала и мультифрактала, а точнее структура множества Кантора и пространства с дробной размерностью Хаусдорфа–Безиковича. Существует несколько направлений, развивающих основы математического аппарата фрактальной электродинамики. Например, вводят в рассмотрение дробное интегродифференцирование, фрактальные вейвлеты или берут за основу интерационно-функциональные системы. В данной работе рассматривается аппарат обобщенных функций в качестве математической основы теории фрактальной электродинамики. Этот подход, с точки зрения автора, наиболее общий и содержит в себе как частные случаи и дробное интегродифференцирование, и вейвлеты.

В качестве примера рассматривается формирование фрактального спектра (локализация частот излучения в точках множества Кантора) при переходном рассеянии. Волна диэлектрической проницаемости при этом задается функцией диссипативного всплеска $\gamma_\xi(x)$. Достаточно сложный аналитический вид диэлектрического всплеска может формироваться ударными волнами в диэлектрике, турбулентными движениями в плазмоподобных средах и керровских жидкостях.

Множество Кантора

Конструкция классического триадного множества Кантора с отношением ξ хорошо известна. При его построении единичный отрезок $E_0 = [0, 1]$ делится на три части и выбрасывается средний открытый интервал величиной $1 - 2\xi$. Таким образом, получается множество E_1, состоящее из двух замкнутых сегментов величиной ξ. Затем эта процедура повторяется с двумя отрезками $[0, \xi]$ и $[1 - \xi, 1]$, составляющими множество E_1, и т. д. На n-м шаге получается множество E_n, состоящее из 2^n отрезков длиной ξ^n. Компактное множество E_n называется предканторовым множеством, а само канторово множество есть пересечение предканторовых множеств $E = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ (рис. 1).

Размерность Хаусдорфа–Безиковича канторова множества E равна $d_H = \ln 2/|\ln \xi|$, $0 < \xi < \frac{1}{2}$ [1]. Канторово множество характеризуется точками первого и второго рода. Точки множества E, являющиеся концами (левыми или правыми) смежных интервалов к канторову дисконтинууму, называются точками первого рода множества Кантора (левыми E^L или правыми E^R соответственно). Аналогичные множества E_n^R и E_n^L существуют и для любого из предканторовых множеств E_n. На рис. 1 точки, принадлежащие множеству E_n^R, обозначены кружочками, а точки, которые принадлежат множеству E_n^L — квадратиками. Эти точки естественным образом (слева направо) упорядочены, причем точки первого рода канторова множества образуют счетное множество. Все остальные точки множества называются точками второго рода. Множество всех точек второго рода множества Кантора подобно множеству иррациональных чисел и имеют мощность континуума [1].

Любую точку канторова множества E с отношением ξ можно записать в виде

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \xi^n, \qquad (1)$$

где $\omega_n = \{0, \xi^{-1}, -1\}$ принимает лишь два различных значения.

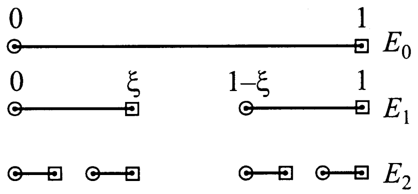

Рис. 1. Предканторовы множества.

Числа $t \in E$, у которых все ω_n, начиная с некоторого, равны между собой, соответствуют точкам множества Кантора первого рода. Таким образом, множество правых точек первого рода множества Кантора E_n^R определяется разложением (1), все коэффициенты которого, начиная с $n+1$ члена, равны 0: $\omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \dots = 0$. Множество левых точек первого рода множества Кантора E_n^L определяются разложением (1), в котором все коэффициенты, начиная с $n+1$, равны между собой и равны $\xi^{-1} - 1$: $\omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \dots = \xi^{-1} - 1$.

Для того чтобы перечислить все точки множества, например E_n^R, необходимо каждому ω_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ придать два значения 0 и $\xi^{-1} - 1$. Таким образом, мы получим 2^n точек множества E_n^R, т.е. $N(E_n^R) = 2^n$. Понятно, что $N(E_n^R) = N(E_n^L)$.

Свободная полугруппа

Триадное канторово множество с отношением ξ порождается алфавитом A, состоящим из двух букв: $A = \{a, \bar{a}\}$ (можно рассматривать $\bar{a}$ как отрицание a). Это обусловлено тем, что взаимно однозначное соответствие отображает $a \to 0$, $\bar{a} \to \xi^{-1} - 1$ и любому слову $\alpha = a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ из множества (конечных и бесконечных) слов Ω соответствует одна единственная точка множества Кантора t_α. Такой подход с использованием пространства слов часто используется в теории фракталов и мультифракталов [2]. При этом любое a_k, входящее в слово α, равно либо a, либо $\bar{a}$. Таким образом, $a_k \to \omega_k$ и

$$t_\alpha = t(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \xi^k. \qquad (2)$$

Например, слову $\alpha = a\bar{a}a\bar{a} \dots (a\bar{a})$, для которого все время повторяется сочетание $(a\bar{a})$, соответствует канторово число $t_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi^{-1} - 1)\xi^{2n} = \xi/(1+\xi)$. Для $\xi = 1/3$ $t_\alpha = 1/4$. В другом случае слову $\beta = \bar{a}a\bar{a}a\bar{a}a \dots (\bar{a}a)$ соответствует канторово число $t_\beta = 1/(1+\xi)$. Для $\xi = 1/3$ $t_\beta = 3/4$.

Числа 1/3 и 3/4, как известно, являются точками второго рода канторова множества [3]. Действительно, в приведенных примерах и в слове α, и в слове β бесконечное число раз повторяется сочетание двух букв из алфавита A, а не одной, что соответствовало бы точкам первого рода.

Множества слов Ω можно разбить на подмножества Ω_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ слов конечной длины. Количество элементов $N(\Omega_k)$ во множестве различных слов длины k равно 2^k. Элементом Ω_0 является пустое слово Λ. Два слова $x_1 x_2 \dots x_m$ и $y_1 y_2 \dots y_n$ считаются равными, если они совпадают как последовательности $m = n$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$.

Отметим также, что биективное отображение $t : \Omega_n \to E_n^R$ ставит в соответствие слову длины n точку предканторова множества E_n^R; $\alpha \to t_\alpha$, $\alpha \in \Omega_n$, $t_\alpha \in E_n^R$.

На множестве Ω всех слов конечной длины в алфавите A можно определить операцию вхождения, или конкатенации (*),

$$x_1 x_2 \dots x_m * y_1 y_2 \dots y_n = x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_n. \qquad (3)$$

Таким образом, для двух слов $\alpha_1 \in \Omega_n$ и $\alpha_2 \in \Omega_n$ (длины n и k) в результате операции конкатенации мы получаем слово длины $n+k$: $\alpha_1 * \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 \in \Omega_{n+k}$.

Операция конкатенации по определению ассоциативна. Таким образом, множество конечных слов Ω с введенной на нем операцией конкатенации образуют свободную полугруппу $\Omega^* = (\Omega, *)$ [4].

Отметим также, что каждое слово из Ω допускает единственное разложение в произведение элементов из A. Напомним, что полугруппой Ω^* называется непустое множество Ω вместе с бинарной операцией $*$, удовлетворяющей ассоциативному закону: $x * (y * z) = (x * y) * z$ для любых $x, y, z \in \Omega$.

Введем на множестве E^R бинарную операцию $(\circ)$ для любого $t_\alpha \in E_k^R$ и $t_\beta \in E_p^R$

$$t_\alpha \circ t_\beta = t_\alpha + \xi^k t_\beta. \qquad (4)$$

Нетрудно прямым вычислением (2) установить, что $t_\alpha \circ t_\beta = t_{\alpha\beta} \in E_{k+p}^R$. Для $t_\beta \circ t_\alpha = t_\beta + \xi^p t_\alpha = t_{\beta\alpha} \in E_{k+p}^R$. Таким образом, $t_{\alpha\beta} \neq t_{\beta\alpha}$ по построению, так что данная бинарная операция некоммутативна, но ассоциативна. Ассоциативность проверяется непосредственным вычислением.

Таким образом, множество E^R с введенной на нем бинарной операцией (4) образуют полугруппу $(E^R, \circ)$.

Т е о р е м а. Если Ω^* — свободная полугруппа, а $(E^R, \circ)$ — полугруппа правых точек первого рода множества Кантора, то существует изоморфизм $t : \Omega^* \to (E^R, \circ)$.

Доказательство этой теоремы достаточно простое: $t(\alpha * \beta) = t(\gamma)$, так как $\alpha * \beta = \gamma$, $\alpha \in \Omega_k$, $\beta \in \Omega_n$, $\gamma \in \Omega_{n+k}$. С другой стороны, $t_\alpha \circ t_\beta = t_\alpha + \xi^k t_\beta = t_\gamma$, где $t_\alpha \in E_k^R$, $t_\beta \in E_n^R$, $t_\gamma \in E_{n+k}^R$. Но так как существует взаимнооднозначное соответствие множеств Ω_{n+k} и E_{n+k}^R, то $t(\gamma) = t_\gamma$.

Обобщенная функция Кантора

Введение обобщенных функций связано с вопросом расширения представления о функциях и вызывается, например, потребностями теоретической физики. В связи с этим функцию можно рассматривать не как набор значений в разных точках, а как математический объект, воздействующий на другую пробную функцию. Наиболее интересен с этой точки зрения подход, связанный с обобщенными функциями, порождаемыми мерами [5]. Как уже указывалось во Введении, построение теории электродинамики фрактальных сред будет основано на фрактальных мерах, а лучше сказать, на канторовых мерах. В данной работе рассматривается введение такой меры с использованием функций Кантора α, называемой также "чертовой лестницей". Функция Кантора — это ограниченная (сверху и снизу) монотонная неубывающая функция, являющаяся пределом последовательности и предканторовых функций, α_n, т.е. $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x)$. Вся совокупность предканторовых функций $\{\alpha_n\}$ строится на отрезке $[0, 1]$ с использованием совокупности множеств $\{E_n\}$. На рис. 2 приведена функция $\alpha_n(x)$ для $n = 2$. Как видно на рис. 2, эта функция $\alpha_2(x)$ равна постоянным значениям на выбрасываемых открытых интервалах и линейно растет на замкнутых интервалах, принадлежащих в данном случае E_2. При увеличении n тангенс угла наклона этих прямых, равный $(2\xi)^{-n}$ (или производная $\alpha_n(x)$ на E_n), растет и в пределе при $n \to \infty$ он стремится к бесконечности. Таким образом, функция Кантора α есть функция скачков в точках канторова множества. В данной работе все построения ведутся с использованием триадного канторова множества с отношением ξ. Так, где это не вызывает сомнений, параметр ξ опускается. Например, $\alpha_n(x;\xi) \equiv \alpha_n(x)$.

На каждом из предканторовых множеств E_n можно задать меры, являющиеся вполне аддитивными функциями и, что особенно важно, порождаемые предканторовыми функциями $\alpha_n(x)$,

$$\mu(E_n) = \int\limits_{E_n} d\alpha_n. \tag{5}$$

Совокупность мер $\{\mu(E_n)\}$ образует последовательность, сходящуюся к мере заданной на множестве Кантора, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$. Мера $\mu(E_n)$ на предканторовом множестве E_n определяет обобщенную функцию Δ_n (для $n = 0, 1, 2, \ldots$) по формуле

$$(\Delta_n, \varphi) = \int \varphi\, d\alpha_n. \tag{6}$$

Используем, как и ранее, сокращенную запись $\Delta_n(x;\xi) \equiv \Delta_n(x)$. Интеграл (6) следует понимать в смысле интеграла Лебега–Стилтьеса [3]. Отметим также, что для $n = 0$ интеграл (6) становится интегралом Римана. Таким образом, предканторовы функции $\alpha_n(x)$ являются порождающими функциями для мер $\mu(E_n)$.

Обобщенную функцию Δ_n следует понимать как функционал, действующий на пространстве основных функций $D(Q)$; $\varphi \in D(Q)$. К этому пространству можно отнести все финитные бесконечно дифференцируемые в Q функции; $D(Q) = C_0^\infty$. В нашем случае $Q = R$ —

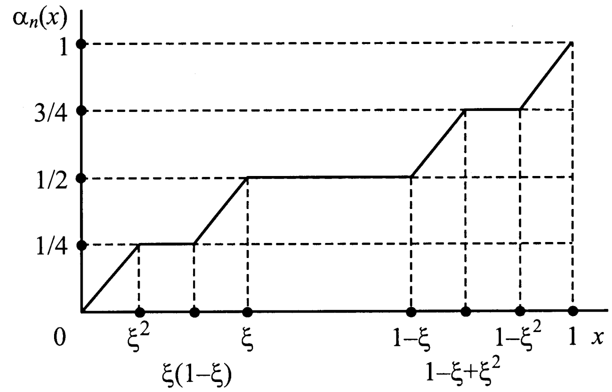

Рис. 2. Функция Кантора для $n = 2$.

вещественная ось. Сходимость в пространстве основных функций $D(Q)$ $\varphi_k \to \varphi$ определяется сходимостью последовательности функций $\{\varphi_k\}$ и всех производных $\varphi_k^{(n)} \to \varphi^{(n)}$. Для обобщенных функций Δ_n функционал (Δ_n, φ) имеет вид

$$\int \varphi\, d\alpha_n = \int \Delta_n \varphi\, dx \equiv (\Delta_n, \varphi). \tag{7}$$

Таким образом, для предканторовых обобщенных функций Δ_n существует их явное выражение через производную от $\alpha_n(x)$

$$\frac{d}{dx}\alpha_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E_n, \\ \dfrac{1}{(2\xi)^n}, & x \in E_n. \end{cases} \tag{8}$$

Из выражений (7) и (8) следует, что

$$(\Delta_n, \varphi) = \int\limits_{E_n \subset R} \frac{1}{(2\xi)^n} \chi_{E_n}(x)\varphi(x)\, dx, \tag{9}$$

χ_{E_n} — характеристическая функция множества E_n

$$\chi_{E_n} = \begin{cases} 1, & x \in E_n, \\ 0, & x \notin E_n. \end{cases} \tag{10}$$

Выражение (9) несложно преобразовать к виду

$$(\Delta_n, \varphi) = \frac{1}{2^n} \int\limits_0^1 \sum_{\alpha \in \Omega_n} \varphi(\xi^n x + x_\alpha)\, dx, \tag{11}$$

где $x_\alpha \in E_n^R$; следует отметить, что $(\Delta_n, 1) = 1$ для всех n.

Функционал (11) показывает действие обобщенных функций Δ_n на пробную функцию $\varphi(x)$ из пространства основных функций. Результат этого действия сводится фактически к взятию среднего от $\varphi(x)$ на E_n. Носителями обобщенных функций $\{\Delta_n\}$ являются предканторовые множества $\{E_n\}$, т.е. $\operatorname{supp}\Delta_n = E_n$. Таким образом, обобщенные функции $\{\Delta_n\}$ есть функционалы на $D(Q)$ и $\Delta_n \in D'(R)$ для всех n. $D'(R)$ — линейное пространство всех обобщенных функций, сопряженное к $D(R)$. При этом сходимость в $D'(R)$ вводится как слабая сходимость функционалов. Таким образом, последовательность Δ_n определяет обобщенную функцию Кантора

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_n, \varphi) = (\Delta_\xi, \varphi). \tag{12}$$

Используя (11) и (12), представим обобщенную функцию Кантора в виде

$$(\Delta_\xi, \varphi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{\alpha\in\Omega_n}\varphi(x_\alpha), \quad (\Delta_\xi, 1) = 1. \tag{13}$$

Понятно, что $\operatorname{supp}\Delta_\xi = E$.

Возвращаясь к процедуре введения обобщенных функций через меры (5), можно представить Δ_ξ выражением, которое наиболее удобно для проведения расчетов и из которых видна связь функции Кантора α, порождающей меру $\mu(E)$, с обобщенной функцией Кантора Δ_ξ, являющейся функционалом,

$$(\Delta_\xi, \varphi) = \int\limits_R \varphi\, d\alpha. \tag{14}$$

Из (13) несложно показать, что обобщенная функция Δ_ξ является сингулярной обобщенной функцией. Сравнивая обобщенную функцию Дирака δ и Δ_ξ, следует отметить, что обе они являются сингулярными обобщенными функциями и их носителями являются множества меры нуль: $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$ и $\operatorname{supp}\Delta_\xi = E$.

Обобщенная фукнция Кантора Δ_ξ определяет канторову структуру точки. С точки зрения автора возможно ее применение при построении физических теорий на не гладких многообразиях, а на многообразиях, каждая точка которых является множеством Кантора, например, на фрактальном пространстве-времени.

Полугруппа операторов на канторовых мерах $\mu(E_n)$

Введем в рассмотрение множество операторов $\{A_n\}$, которые действуют на множестве мер $\{\mu(E_n)\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, по следующему закону:

$$A_k\mu(E_n) = \mu(E_{k+n}). \tag{15}$$

Операторы $\{A_k\}$, заданные действием (15), образуют полугруппу G, так как легко показать, что $A_kA_n = A_{k+n}$ и выполнен закон ассоциации $A_k(A_nA_j) = (A_kA_n)A_j$. Оператор A_0, который оставляет меру неизменной, является единицей данной полугруппы. Действие оператора $\{A_n\}$ можно распространить на функциональные пространства, например на пространство основных функций $D(Q)$. Для получения явного вида операторов $\{A_k\}$ полагаем, что любой $A_k \in G$ обладает следующим свойством:

$$(A_k\Delta_n, \varphi) = (\Delta_n, A_k\varphi). \tag{16}$$

Такое свойство операторов $\{A_k\}$ выбрано по аналогии с действием оператора дифференцирования на обобщенные функции из $D'(Q)$: $(D^n f, \varphi) = (-1)^n(f, D^n\varphi)$, где n — порядок производной. Аналогично действует и оператор преобразования Фурье (29). Для того чтобы получить явный вид операторов $\{A_k\}$, положим в выражении (16) $n = 0$. В этом случае $(A_k\Delta_0, \varphi) = (\Delta_0, A_k\varphi)$. Другая запись этого выражения имеет вид

$$\int\limits_R \varphi\, d\alpha_k = \int\limits_R A_k\varphi\, dx. \tag{17}$$

Используя выражения (7), (11) и (17), можно получить явный вид операторов $\{A_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$A_k\varphi(t) = \frac{1}{2^k}\sum_{\alpha\in\Omega_k}\varphi(\xi^k t + t_\alpha). \tag{18}$$

Для $k = 0$ $A_0\varphi = \varphi$. Операторы A_k отображают пространство основных функций в себя. Их действие заключается в том, что они преобразуют $t \to t' = \xi^k t + t_\alpha$ $(t \in R,\ t' \in R,\ t_\alpha \in E_k^R)$ и производят усреднение по правым точкам первого рода множества Кантора.

Операторы $\{A_k\} \in G$ сохраняют структуру полугруппы, так как непосредственным вычислением, используя (18), легко показать, что $A_kA_n\varphi = A_{k+n}\varphi$. Действительно, используя тот факт, что $t_\beta + \xi^k t_\alpha = t_\gamma$, где $\alpha \in \Omega_n$, $\beta \in \Omega_k$, $\gamma \in \Omega_{n+k}$, получаем

$$A_nA_k\varphi(t) = \frac{1}{2^n2^k}\sum_{\alpha\in\Omega_n}\sum_{\beta\in\Omega_k}\varphi(\xi^{n+k}t + \xi^k t_\alpha + t_\beta)$$
$$= \frac{1}{2^{n+k}}\sum_{\gamma\in\Omega_{n+k}}\varphi(\xi^{n+k}t + t_\gamma). \tag{19}$$

Из выражения (15) и (16) при $n \to \infty$ вытекает одно очень важное свойство инвариантности, которое необходимо при вычислении функционалов Δ_ξ, а именно

$$A_k\mu(E) = A_n\mu(E), \qquad (\Delta_\xi, A_k\varphi) = (\Delta_\xi, A_n\varphi). \tag{20}$$

Равенство (20) справедливо для любых n $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Для примера можно вычислить конкретный функционал

$$I(\nu) = (\Delta_\xi, x^\nu) = \int\limits_0^1 x^\nu\, d\alpha. \tag{21}$$

Используя соотношения (21) для A_1 и выражение (18), несложно получить значение функционал $I(\nu)$

$$I(\nu) = \int\limits_0^1 A_1x^\nu\, d\alpha = \int\limits_0^1 \frac{(\xi x)^\nu + (1 - \xi + \xi x)^\nu}{2}\, d\alpha. \tag{22}$$

Таким образом можно получить функциональное соотношение для функционалов $I(\nu)$

$$I(\nu) = \frac{(1-\xi)^\nu}{2-\xi^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} (\xi^{-1}-1)^{-k} I(k),$$

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{k!}. \qquad (23)$$

Для $\nu = m$ $m \in Z$, и, используя тот факт, что $I(0) = 1$, выражение (23) преобретает вид

$$I(m) = \frac{(1-\xi)^m}{2(1-\xi^m)} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (\xi^{-1}-1)^{-k} I(k). \qquad (24)$$

Для $m = 1$ $I(1) = 1/2$. В этом случае интеграл Лебега–Стилтьеса (21) не отличается от интеграла Римана для функции x^m. Но для $m = 2$ $I(2) = 1/(2(1+\xi))$. Этот результат уже существенно отличается от значения интеграла Римана, который равен 1/3. Оба результата совпадают для $\xi = 1/2$. Замечу также, что $1/(2(1+\xi)) > 1/3$ для $0 < \xi < 1/2$.

Ниже приведены выражения для некоторых функционалов, вычисленных с использованием описанной выше процедуры,

$$(\Delta_\xi, e^{\eta t}) = e^{\eta/2} \prod_{n=0}^{\infty} \mathrm{ch}\left[\frac{(1-\xi)\xi^n}{2}\,\eta\right], \qquad (25)$$

$$(\Delta_\xi, e^{i\pi a t}) = e^{i\pi a/2} \gamma_\xi(\pi a),$$

$$\gamma_\xi(\pi a) = \prod_{n=0}^{\infty} \cos\left[\frac{(1-\xi)\xi^k}{2}\,\pi a\right]. \qquad (26)$$

Сравнивая выражения для функционалов (26) и (13), легко получить выражение, используемое в дальнейшем,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha\in\Omega_n} e^{i t_\alpha \omega} = e^{i\omega/2} \gamma_\xi(\omega). \qquad (27)$$

Таким образом, инвариант (20) дает простую возможность вычислять функционалы Δ_ξ.

Преобразование Фурье обобщенной функции Кантора

Пусть φ локально интегрируемая на R^n функция. Преобразование Фурье этой функции представляется в виде

$$F[\varphi](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} e^{-i(\xi,x)}\,dx. \qquad (28)$$

При этом имеется в ввиду, что $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ являются в общем случае псевдоевклидовыми координатами. Скалярное произведение (ξ, x) этих векторов вводится, как обычно, с помощью псевдоэвклидовой метрики. Интеграл (28) считается сходящимся в смысле главного значения.

Для построения преобразования Фурье обобщенных функций вводится в рассмотрение пространство основных функций (быстро убывающих) $\mathcal{L}$ и пространство обобщенных функций (медленного роста) $\mathcal{L}'$ [5]. Пространство основных функций $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^n)$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых в R^n функций, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. При этом $\mathcal{L} \supset D$. Обобщенной функцией медленного роста называется любой линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{L}$. Пространство обобщенных функций $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(R^n)$ состоит из множества всех обобщенных функций медленного роста. Очевидно, что $\mathcal{L}' \subset D'$.

Пусть $f(x) \in \mathcal{L}$, а $\varphi(x) \in \mathcal{L}$, тогда по определению преобразования Фурье обобщенных функций можно представить равенством

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]). \qquad (29)$$

Так как операция $\varphi \to F[\varphi]$ линейна и непрерывна из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}$, то функционал, определяемый правой частью равенства (29), представляет собой обобщенную функцию из $\mathcal{L}'$. Операция $f \to F[f]$ линейна и непрерывна из $\mathcal{L}'$ в $\mathcal{L}'$ [5].

Если f — обобщенная функция с компактным носителем, то она является обобщенной функцией медленного роста и ее преобразование Фурье существует [5]. Именно этот случай представляет интерес, так как обобщенная функция Кантора имеет компактный носитель $\mathrm{supp}\,\Delta_\xi = E$. Следует отметить, что обобщенные функции $\{\Delta_n\}$ также имеют компактные носители $\mathrm{supp}\,\Delta_n = E_n$, что указывает на существование преобразования Фурье и для них. На основании теоремы, приведенной в [5], преобразование Фурье $F[f]$ для $f \in \mathcal{L}'$ и, следовательно, для $\Delta_\xi \in \mathcal{L}'$ можно представить в виде

$$F[\Delta_n](k) = \left(\Delta_n, \eta(x)\,\frac{e^{ikx}}{2\pi}\right), \qquad (30)$$

где $\eta \in D$ и равна единице в окрестности $\mathrm{supp}\,\Delta_n$.

Используя алгоритм вычисления функционала (11), несложно получить Фурье-образ для Δ_n

$$F[\Delta_n] = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha\in\Omega_n} e^{ikx_\alpha} e^{ik\xi^n/2}\,\frac{\sin(k\xi^n/2)}{k\xi^n/2}. \qquad (31)$$

Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции Кантора имеет вид

$$F[\Delta_\xi] = \lim_{n\to\infty} F[\Delta_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha\in\Omega_n} e^{ikx_\alpha}, \qquad (32)$$

где $x_\alpha \in E_n^R$.

Используя ранее полученный результат (27), $F[\Delta_\xi]$ можно преобразовать к виду

$$F[\Delta_\xi](k) = \frac{e^{ik/2}\gamma_\xi(k)}{2\pi}. \qquad (33)$$

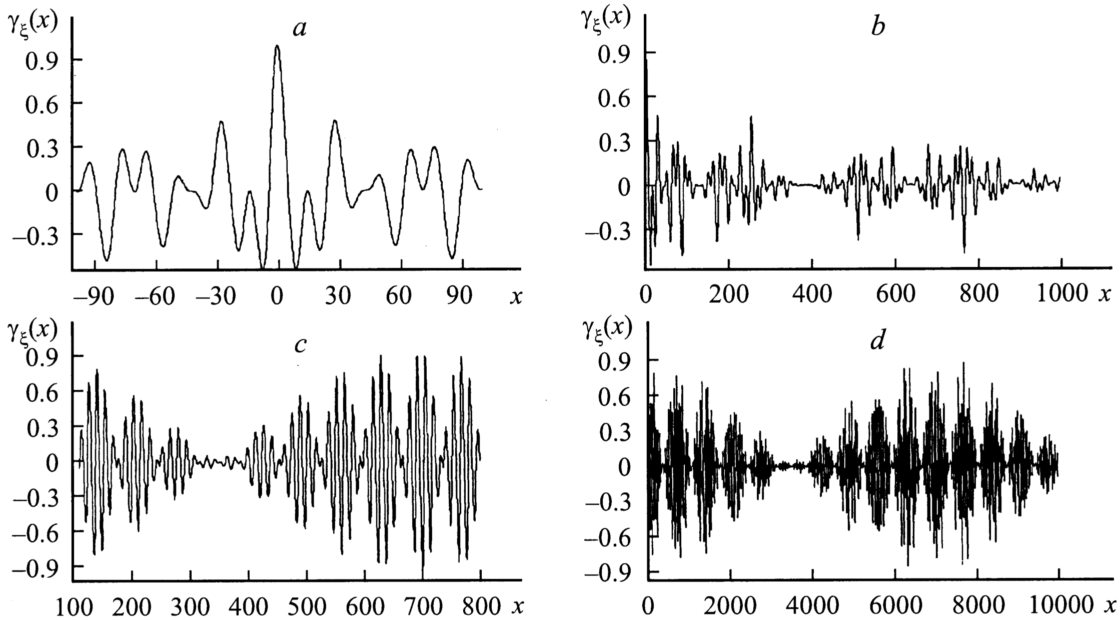

Рис. 3. Графики функции $\gamma_\xi(x)$ для различных ξ: a, b — 1/3; c, d — 1/10. Изменение функции x: a — от -90 до $+90$, b — от 0 до 1000, c — от 100 до 800, d — от 0 до 10 000.

Определим в $\mathcal{L}'$ обратное преобразование Фурье, обозначенное через F^{-1}, по формуле

$$F^{-1}[f] = F[f(-x)](2\pi)^n, \qquad (34)$$

где $f(-x)$ — отражение $f(x)$. Операция F^{-1} — линейная и непрерывная из $\mathcal{L}'$ в $\mathcal{L}'$. Операция F^{-1} является обратной операции F, т.е.

$$F^{-1}\big[F[f]\big] = f, \qquad F\big[F^{-1}[f]\big] = f, \qquad f \in \mathcal{L}'. \qquad (35)$$

Таким образом, обобщенную функцию Кантора можно выразить через обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}\big[e^{ik/2}\gamma_\xi(k)\big] = 2\pi\Delta_\xi. \qquad (36)$$

С другой стороны, несложно показать, что

$$F\left[\Delta_\xi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right](k) = \frac{1}{2\pi}\,\gamma_\xi(k). \qquad (37)$$

На рис. 3 построена функция $\gamma_\xi(x)$ для различных значений ξ.

Переходное рассеяние фрактального типа

Известно, что волны диэлектрической проницаемости, рассеивающиеся на заряде, порождают электромагнитное (переходное) излучение. Этот процесс называется переходным рассеянием по двум причинам: во-первых, этот эффект возможен и на покоящемся заряде, во-вторых, такого типа излучение происходит во всем пространстве непрерывно, а не в области, локализованной вблизи одной границы. Это приводит к интерференционным явлениям электромагнитных волн [6,7]. Переходное рассеяние достаточно хорошо изучено при изменении диэлектрической проницаемости ε по периодическому закону. Диэлектрическая проницаемость может зависеть лишь от концентрации среды N. Если в такой среде распространяется продольная акустическая волна, то плотность $N = N_0 + \Delta N \cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)$. Таким образом,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_o t), \qquad (38)$$

ε_1 — изменение ε, обусловленное изменением N ($\varepsilon_1 \sim \Delta N$).

Вокруг заряда, помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ε_0, возникает индукция $\mathbf{D}$, связанная с электростатическим полем заряда,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^3}. \qquad (39)$$

С появлением волны диэлектрической проницаемости $\mathbf{D}(\mathbf{r}) \to \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. В первом приближении $|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_0|$ вокруг заряда возникает переменная поляризация [7]

$$\delta\mathbf{P} = \frac{\delta\mathbf{D}}{4\pi} = \frac{\varepsilon_1\mathbf{E}_0}{4\pi}\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t). \qquad (40)$$

Такая переменная поляризация вызывает появление расходящейся от заряда электромагнитной волны с частотой ω_0.

В данной работе исследуется переходное рассеяние, причиной которого является непериодическое, диссипативное возмущение диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\gamma_\xi(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t). \qquad (41)$$

Всплеск диэлектрической проницаемости (41) (возмущение плотности среды) может быть связан с различными причинами, например с ударными волнами в данной среде или с неоднородностями концентрации в плазме. В данной работе проведено моделирование процесса переходного рассеяния с помощью функции $\gamma_\xi(x)$, основной особенностью которой является связь ее фурье-представления с множеством Кантора. Характер поведения этой функции для различных ξ приведен на рис. 3.

Преобразование Фурье $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$ для индукции $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид (28)

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{r} dt e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} \varepsilon(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (42)$$

Подставляя в это выражение значение $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ из (41) и используя формулу (36), несложно получить выражения для $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + 2\pi\varepsilon_1 \int\limits_{-1/2}^{1/2} d\nu \mathbf{E}(\mathbf{k} - \nu\mathbf{k}_0, \omega - \nu\omega_0) \Delta_\xi \left(\nu + \frac{1}{2}\right). \quad (43)$$

Рассмотрим переходное рассеяние в случае покоящегося заряда. Хорошо известно, как фурье-компоненты индукции поля $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$ связаны с компонентами Фурье вектора поляризации $\delta\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + 4\pi\delta\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega). \quad (44)$$

Таким образом,

$$\delta\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\varepsilon_1}{2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} dx \Delta_\xi \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{k} - x\mathbf{k}_0, \omega - x\omega_0). \quad (45)$$

Рассмотрим переходное рассеяние в случае покоящегося заряда. Уравнение поля в этом случае, как хорошо известно, можно записать следующим образом:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D} = 0. \quad (46)$$

Из этих уравнений несложно получить уравнение для фурье-образов в рассматриваемом случае (43)

$$\left(k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\delta_{ij}\right) E_j(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2\pi\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 \times \int\limits_{-1/2}^{1/2} d\nu\, E_i(\mathbf{k} - \nu\mathbf{k}_0, \omega - \nu\omega_0) \Delta_\xi \left(\nu + \frac{1}{2}\right). \quad (47)$$

Как обычно, суммирование ведется по повторяющимся индексам. Будем считать, что $|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_0|$. В этом случае правую часть равенства (47) можно рассматривать как возмущение, связанное с изменением поляризации в окрестности заряда. В первом порядке теории возмущений используем фурье-компоненты поля неподвижного заряда

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{4\pi i q\mathbf{k}}{(2\pi)^3\varepsilon_0 k^2}. \quad (48)$$

Таким образом, возмущение поляризации в окрестности заряда можно получить, подставляя (48) в (45),

$$\delta\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{iq\varepsilon_1}{4\pi^2\varepsilon_0\omega_0} \frac{(\mathbf{k} - \omega\mathbf{k}_0/\omega_0)}{(\mathbf{k} - \omega\mathbf{k}_0/\omega_0)^2} \Delta_\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{2}\right). \quad (49)$$

Если рассеянные волны для конкретности считать поперечными (по отношению к вектору $\mathbf{k}$), то выражение (47) примет вид

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right) \mathbf{E}^\tau(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \frac{\big[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \delta\mathbf{P}, (\mathbf{k}, \omega)]\big]}{k^2}. \quad (50)$$

Выражение (50) и (49) дают возможность вычислить поле рассеянных поперечных волн

$$\mathbf{E}^\tau(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{iq\omega^3\big[\mathbf{k}, [\mathbf{k}_0, \mathbf{k}]\big]}{\pi(\omega_0 kc)^2(k^2 - \omega^2\varepsilon_0/c^2)(\mathbf{k} - \omega\mathbf{k}_0/\omega_0)^2} \times \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\Delta_\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{2}\right). \quad (51)$$

Выражение (51) аналогично выражению для фурье-компонент электрического поля, полученного в [6] для волны диэлектрической проницаемости вида (38). Основное отличие заключается в том, что в данной работе в формулу (51) входит обобщенная функция Кантора Δ_ξ, а не δ-функция. Это отличие указывает на тот факт, что в данном случае электромагнитное излучение происходит не на одной частоте, а в некотором диапазоне частот, определенных обобщенной функцией Кантора.

В работе [8] показано, что интенсивность излучения поперечных волн описывается выражением

$$W\left(\omega, \frac{\mathbf{k}}{k}\right) d\omega\, do = (2\pi)^6 \frac{\omega^4}{c^3}\sqrt{\varepsilon_0}\big|\delta\mathbf{P}^\tau(\mathbf{k}, \omega)\big|^2 d\omega\, do, \quad (52)$$

где $\delta\mathbf{P}^\tau(\mathbf{k}, \omega)$ — поперечная поляризация, которая легко находится из выражения (49)

$$\delta\mathbf{P}^\tau(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\big[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \delta\mathbf{P}, (\mathbf{k}, \omega)]\big]}{k^2}, \quad (53)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{k}/k\sqrt{\varepsilon_0}\,\omega/c$.

Таким образом, выражения (49), (51), (52) показывают, что спектр электромагнитных волн при переходном фрактальном рассеянии локализуется вблизи частот $\omega = \omega_0(\omega_\alpha - 1/2)$. Числа ω_α принадлежат точкам множества Кантора и определяются выражением (2).

Заключение

Данная работа является продолжением работ, связанных с построением теории переходного фрактального излучения [9], но она носит более общий характер и ее результаты могут быть использованы при построении теории фрактальной электродинамики. В работе была введена в рассмотрение обобщенная функция Кантора. Ее построение основано на канторовых мерах. Приведен алгоритм вычисления функционалов с обобщенной функцией Кантора и получено ее преобразование Фурье.

В качестве примера рассмотрено переходное рассеяние диссипативного всплеска диэлектрической проницаемости (41) при его падении на заряд. Такого вида пространственно-временная функция диэлектрической проницаемости при рассеянии на покоящемся заряде формирует широкодиапазонный фрактальный спектр излучения (частоты излучения локализованы в точках множества Кантора). Достаточно сложный вид диэлектрического всплеска может формироваться ударными волнами в диэлектрике, турбулентными движениями в плазмоподобных средах и керровских жидкостях.

Переходное фрактальное рассеяние в данном случае может служить, с одной стороны, источником широкодиапазонного электромагнитного излучения, а с другой стороны, может быть использовано для диагностики хаотической динамики различных сред.

Список литературы

[1] *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1997. 368 с.
[2] *Eric Olivier.* // Nonlinearity. 1999. Vol. 12. P. 1571–1585.
[3] *Колмогоров А.В., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
[4] *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. 440 с.
[5] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
[6] *Гинзбург В.Л., Цытович В.Н.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 1818–1824.
[7] *Гинзбург В.Л., Цытович В.Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
[8] *Колесов В.В.* // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. Вып. 1 (7). С. 77–89.
[9] *Болотов В.Н.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 12. С. 98–102.