01

Разложение взаимного расстояния между двумя точками по сфероидальным функциям в связи с задачами математической физики

© А.С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 21 августа 2000 г.
В окончательной редакции 9 июля 2001 г.)

В сфероидальных координатах построена полная система бигармонических функций. В таких функциях дано разложение в двойной ряд взаимного расстояния между двумя точками и его обратной величины. Указаны возможные применения в теории упругости, астрофизике и других областях математической физики.

Введение

Как известно [1,2], в ряде задач математической физики функции, построенные на основе сфероидальных координат, удобнее, чем сферические функции. Подобные примеры часто встречаются в инженерной механике, геофизике и астрофизике. В ряде случаев интерес представляют не только гармонические, но и бигармонические функции [3–5]. Элементарные бигармонические функции в этих условиях строятся довольно просто, но встает задача разложения по ним заданной бигармонической функции. Одним из ключевых моментов при этом является разложение взаимного расстояния D и его обратной величины D^{-1} между двумя произвольными точками по указанным простейшим функциям.

Основные формулы

Основную роль у нас играют, во-первых, гармонические функции

$$V_n^k(t,\tau,\varphi) = P_n^k(t)p_n^k(\tau)e^{ik\varphi},$$

$$W_n^k(t,\tau,\varphi) = P_n^k(t)q_n^k(\tau)e^{ik\varphi}, \qquad (1)$$

где t, τ и φ — сфероидальные координаты, связанные с декартовыми координатами x_1, x_2 и x_3 посредством соотношений

$$x_1 = R\cos\varphi,\ \ x_2 = R\sin\varphi,\ \ R = c\sqrt{(1+\tau^2)(1-t^2)},$$

$$x_3 = c\tau t,\ \ \varphi = \operatorname{arctg}(x_2/x_1) \qquad (2)$$

(ось x_3 выбрана полярной). Подразумевается наличие некоторого опорного сфероида с полуосями $a_1 (= a_2)$ и a_3, причем $a_1 > a_3$ (т.е. рассматривается сжатый сфероид). Введенный в (1) параметр c определяется как фокальное расстояние $c = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$.

Далее, в формулах (1) P_n^k — стандартное обозначение присоединенных функций Лежандра, $p_n^k(\tau) = i^{k-n}P_n^k(i\tau)$, $q_n^k(\tau)$ — функция Лежандра мнимого аргумента второго рода

$$q_n(\tau) = \frac{i^{-n}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{\tau - ix}\,dx\ (k=0),$$

$$q_n^k(\tau) = (-1)^k(1+\tau^2)^{k/2}\frac{d^k}{d\tau^k}q_n(\tau)\ (k>0).$$

Во-вторых, бигармоническому уравнению удовлетворяют функции

$$L_n^k(t,\tau,\varphi) = [p_{n+2}^k(\tau)P_n^k(t) - P_{n+2}^k(t)p_n^k(\tau)]e^{ik\varphi},$$

$$\tilde{L}_n^k(t,\tau,\varphi) = [q_n^k(\tau)P_{n+2}^k(t) - P_n^k(t)q_{n+2}^k(\tau)]e^{ik\varphi}, \qquad (3)$$

Эти функции были введены и исследованы в [5]. Кроме них, как показывает непосредственная проверка, бигармоническими являются сами функции t и τ.

Фиксируем тот из софокусных сфероидов, который соответствует $\mathbf{r}$. Величина D^{-1} как аналитическая функция t и φ при фиксированном τ по общему правилу [1] разлагается по системе ортогональных функций $Y_{nk} = P_n^k(t)e^{ik\varphi}$. Получаем ряд

$$D^{-1} = \sum_{n,k}\alpha_{nk}Y_{nk}.$$

Суммирование по n, k здесь и далее ведется в пределах $n \geq 0,\ -n \leq k \leq n$. Коэффициенты α_{nk} стандартным образом представляются интегралами

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{c_{nk}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}D^{-1}Y_{nk}^*\,dtd\varphi,$$

где

$$c_{nk} = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}|Y_{nk}|^2\,dtd\varphi = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}$$

(здесь и далее звездочка означает комплексное сопряжение).

Для наглядности пользуемся вытекающими из соотношения (2) выражениями элемента поверхности сфероида $d\sigma = c^2\sqrt{(1+\tau^2)(t^2+\tau^2)}dtd\varphi$ и элемента нормали в окрестности сфероида $dn = c\sqrt{(t^2+\tau^2)/(1+\tau^2)}d\tau$. Тогда

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{c_{nk}c^2\sqrt{1+\tau^2}}\iint \frac{Y^*_{nk}}{\sqrt{t^2+\tau^2}}\,d\sigma \qquad (4)$$

с интегрированием по всей поверхности сфероида.

Получается потенциал простого слоя с плотностью $Y^*_{nk}/\sqrt{t^2+\tau^2}$. Этот потенциал ищем отдельно во внутренней и внешней области в виде $v_i = \beta_i p^k_n(\tau_1)P^k_n(t_1)\times$ $\times\exp(-ik\varphi_1)$, $v_e = \beta_e p^k_n(\tau_1)P^k_n(t_1)\exp(-ik\varphi_1)$, где β_i и β_e — неизвестные пока численные коэффициенты. Для их нахождения используем обычные условия сшивания на поверхности: совпадение самих β_i и β_e при наличии скачка нормальной производной, равного плотности слоя с коэффициентом 4π.

Используем известное в теории сферических функций соотношение (определитель Вронского)

$$q^k_n(\tau)\,\frac{dp^k_n(\tau)}{d\tau} - p^k_n(\tau)\,\frac{dq^k_n(\tau)}{d\tau} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!}\,(1+\tau^2)^{-1}, \quad (5)$$

где численный коэффициент легко находится из асимптотических выражений при $\tau\to\infty$ для p^k_n и q^k_n.

Условие сшивания самого потенциала при $\tau_1=\tau$ имеет вид $\beta_i p^k_n(\tau) = \beta_e q^k_n(\tau)$, а при сшивании нормальных производных $\partial v_i/\partial n_1$, $\partial v_e/\partial n_1$ вследствие вытекающего из формул (2) соотношения

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1+\tau^2}{\tau^2+t^2}}\,\frac{\partial}{\partial \tau}$$

получается

$$\frac{1}{c}\sqrt{1+\tau^2}\left[\beta_e {q'}^k_n(\tau_1) - \beta_i {p'}^k_n(\tau_1)\right] = -4\pi,$$

откуда с учетом формулы (5) находим

$$\beta_i = 4\pi\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\sqrt{1+\tau^2}q^k_n(\tau),$$

$$\beta_e = 4\pi\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\sqrt{1+\tau^2}p^k_n(\tau).$$

Возвращаемся к формуле (4) и получаем

$$\alpha_{nk} = \frac{2n+1}{c}\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2 q^k_n(\tau)p^k_n(\tau_1)$$
$$\times P^k_n(t_1)\exp(-ik\varphi_1) \quad (\tau_1<\tau)$$

или

$$\alpha_{nk} = \frac{2n+1}{c}\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2 p^k_n(\tau)q^k_n(\tau_1)$$
$$\times P^k_n(t_1)\exp(-ik\varphi_1) \quad (\tau_1>\tau). \qquad (6)$$

После этого элементарные выкладки с учетом определений (1) дают

$$D^{-1} = \frac{1}{c}\sum_{n,k}(2n+1)\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2 {V^*}^k_n(\mathbf{r})W^k_n(\mathbf{r}_1)$$

или

$$D^{-1} = \frac{1}{c}\sum_{n,k}(2n+1)\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2 W^k_n(\mathbf{r}){V^*}^k_n(\mathbf{r}_1), \qquad (7)$$

причем первая формула (7) используется при $\tau<\tau_1$, а вторая — при $\tau>\tau_1$. Формулы для D^{-1} приведены в [1] и совпадают с нашими формулами (7), если раскрыть функции P и Q от мнимых аргументов через наши p и q. При предельном переходе $c\to 0$ формулы (7) превращаются в известные формулы для сферических функций [6].

Перейдем к разложению самой величины D, аналогичному предыдущему для D^{-1}, т.е.

$$D = \sum_{n,k}\xi_{nk}(\mathbf{r_1})Y_{nk}(t,\varphi),$$

где

$$\xi_{nk} = \frac{1}{c_{nk}c^2\sqrt{1+\tau^2}}\iint\frac{DY^*_{nk}}{\sqrt{t^2+\tau^2}}\,d\sigma.$$

Рассмотрим сперва частный случай $n=k=0$, представляющий, как будет видно из дальнейшего, некоторые трудности в расчете. Тогда

$$\xi_{00} = \frac{1}{c^2\sqrt{1+\tau^2}}\iint\frac{D}{\sqrt{t^2+\tau^2}}\,d\sigma.$$

Воспользуемся вспомогательной функцией $\eta(\tau) =$ $= q_0(\tau)-q_0(\tau_*)$, где через τ_* мы обозначили величину τ, соответствующую выбранному сфероиду, поскольку мы сейчас должны перейти от интегрирования по поверхности сфероида $\tau=\tau_*$ к интегрированию по объему. Легко находится нормальная производная

$$\frac{\partial\eta}{\partial n} = \frac{1}{c\sqrt{(t^2+\tau^2)/(1+\tau^2)}}\,\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = -\frac{1}{c\sqrt{(t^2+\tau^2)(1+\tau^2)}},$$

поэтому

$$\xi_{00} = -\frac{1}{c}\iint D\,\frac{\partial\eta}{\partial n}\,d\sigma.$$

Если $\tau_1<\tau_*$, то мы имеем право применить теорему Грина [7] по отношению к внешнему пространству, точнее, к области между сфероидами $\tau=\tau_*$ и бóльшим сфероидом с $\tau=\hat\tau$, где $\hat\tau$ потом устремим к бесконечности. В наших обозначениях

$$\iint_{\tau=\hat\tau}\left(D\,\frac{\partial\eta}{\partial n} - \eta\,\frac{\partial D}{\partial n}\right)d\sigma - \iint_{\tau=\tau_*} D\,\frac{\partial\eta}{\partial n}\,d\sigma$$
$$= \iiint(D\Delta\eta - \eta\Delta D)d\mathbf{r} = -2\int\frac{\eta}{D}\,d\mathbf{r},$$

причем мы сразу использовали тот факт, что $\eta(\mathbf{r})$ — гармоническая функция. Объемный интеграл в предыдущих равенствах представляет собой потенциал во внутренней точке $\mathbf{r}_1$, создаваемый неоднородным сфероидом с софокусным распределением слоев равной плотности. Подобные потенциалы хорошо известны [8]. Разбиение по слоям приводит к интегралу Стильтьеса

$$\int \frac{\eta}{D}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\tau_*}^{\hat\tau} \eta(\tau)dU(\tau),$$

где $U(\tau)$ — потенциал на фиксированную внутреннюю точку $\mathbf{r}_1$, создаваемый однородным эллипсоидом единичной плотности, ограниченным поверхностью $\tau = \mathrm{const}$. Интегрирование по частям дает

$$\int \frac{\eta}{D}\,d\mathbf{r} = \eta(\hat\tau)U(\hat\tau) + \int\limits_{\tau_*}^{\hat\tau} \frac{U(\tau)}{1+\tau^2}\,d\tau.$$

Сам же потенциал $U(\tau)$ определяется известным выражением

$$U = \pi a'^2 c' \int_0^\infty \left(1 - \frac{R_1^2}{a'^2+s} - \frac{z_1^2}{c'^2+s}\right) \times \frac{ds}{(a'^2+s)\sqrt{c'^2+s}},$$

где цилиндрические координаты $R = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $z = x_3$ относятся к точке $\mathbf{r}_1$; a', c' — полуоси сфероида, отвечающего параметру τ, т.е. $a' = c\sqrt{1+\tau^2}$, $c' = c\tau$.

После взятия интегралов по s получаем

$$U = \pi c^2 \tau(1+\tau^2)\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau} - \frac{R_1^2}{c^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{1+\tau^2}\right) - 2\frac{z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{\tau} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\tau}\right)\right],$$

$$\int \frac{U(\tau)}{1+\tau^2}\,d\tau = \frac{\pi}{2}\left\{c^2\left[(1+\tau^2)^2\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau} + \tau + \frac{\tau^3}{3}\right] - \frac{R_1^2}{2}\left[(1+\tau^2)^2\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau} + \tau - \tau^3\right] - z_1^2\left[3\tau + \tau^3 - (1+\tau^2)^2\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau}\right]\right\}.$$

С другой стороны, поверхностный интеграл представляется в виде

$$\iint\limits_{\tau=\hat\tau}\left(D\frac{\partial\eta}{\partial n} - \eta\frac{\partial D}{\partial n}\right)d\sigma = \iint\left[-\frac{D}{c\sqrt{(t^2+\hat\tau^2)(1+\hat\tau^2)}} - \frac{\partial D}{\partial n}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\hat\tau} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\tau_*}\right)\right]d\sigma.$$

В сфероидальных координатах

$$D^2 = c^2\Big[2 + \tau^2 + \tau_1^2 - t^2 - t_1^2 - 2\tau t\tau_1 t_1 - 2\cos(\varphi-\varphi_1)\sqrt{(1+\tau^2)(1+\tau_1^2)(1-t^2)(1-t_1^2)}\Big],$$

а при больших τ имеем

$$D = c\Big[\tau - t\tau_1 t_1 - \cos(\varphi-\varphi_1) \times \sqrt{(1+\tau_1^2)(1-t^2)(1-t_1^2)}\Big] + O(\tau^{-1}).$$

После подстановки этого асимптотического выражения в поверхностный интеграл мы устремляем $\hat\tau$ к ∞, и $\hat\tau$ как вспомогательная величина исчезает из формул. Цилиндрические координаты R_1, z_1 выражаем через сфероидальные согласно формулам (1). Звездочку при τ_* можно теперь опустить, и окончательно получается

$$\xi_{00} = -2\pi c\left\{\left[\frac{(1+\tau_1^2)(1-t_1^2)(\tau^2-1)}{2} - (1+t_1^2\tau_1^2)(1+\tau^2)\right]\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau} + \tau(t_1^2\tau_1^2 - 1) - \frac{\tau}{2}(1+\tau_1^2)(1-t_1^2)\right\}$$

или после использования конкретных выражений сначала для функций Лежандра, а затем для их комбинаций $V, W, L, \tilde L$

$$\xi_{00} = 2\pi c\left\{\tau + \frac{4}{9}[1 + V_2^0(\mathbf{r}_1)][\tilde L_0^0(\mathbf{r}) + P_2(t)] + \frac{4}{9}L_0^0(\mathbf{r}_1)W_0^0(\mathbf{r})\right\}. \tag{8}$$

Затруднение в данном случае возникало из-за того, что $\xi_{00}(\mathbf{r}_1)$ — неограниченная функция. Для остальных ξ_{nk} этого нет, так как главный член в асимптотике D сразу исчезает при интегрировании и $\xi_{nk}(\mathbf{r}_1)$ оказывается ограниченной функцией. Ее можно найти по значению лапласиана. Поскольку

$$\Delta D = \Delta^{(1)}D = \frac{2}{D} \tag{9}$$

(индекс (1) означает, что берется координата точки $\mathbf{r}_1$), то просто

$$\Delta^{(1)}\xi_{nk} = 2\alpha_{nk},$$

где α_{nk} определены формулами (6).

Достаточно построить ограниченное и всюду непрерывное решение этого уравнения Пуассона, тогда в силу теоремы Лиувилля [9] оно будет совпадать с искомой функцией $\xi_{nk}(\mathbf{r}_1)$ с точностью до аддитивной постоянной (которая при проверке оказывается равной нулю).

Существенно, что мы можем воспользоваться формулой (доказательство опускаем)

$$\Delta\left\{\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+3)^2}L_n^k + \frac{(n+k-1)(n+k)}{(2n-1)^2}L_{n-2}^k\right\} = \frac{2(2n+1)}{c^2}V_n^k \quad (10)$$

и построить точно такую же формулу, связывающую функции $\tilde{L}$ и $-W$. При этом требуется некоторая осторожность с определением функций L_{n-2}^k и $\tilde{L}_{n-2}^k$ при $n=k$ или $n=k+1$, так как надо следить, чтобы для функций p и q, входящих в их состав, выполнялись известные рекуррентные формулы. Несложное рассмотрение показывает, что функции p_n^k при $n<k$ надо считать тождественными нулям, а для функций q_n^k надлежит руководствоваться следующим доопределением:

$$q_{k-1}^k(\tau) = (2k-2)!!(1+\tau^2)^{-k/2},$$

$$q_{k-2}^k(\tau) = (2k-2)!!\tau(1+\tau^2)^{-k/2}. \quad (11)$$

Исключение составляет случай $k=0$. Тогда формулы (11) недействительны и соответствующие функции мы не определяем, а две из формул (10) заменяются на следующие:

$$c^2\Delta\left\{-\frac{1}{9}\tilde{L}_0^0 + \frac{\tau}{2}\right\} = W_0^0,$$

$$c^2\Delta\left\{-\frac{1}{25}\tilde{L}_0^0 - \frac{t}{6}\right\} = W_1^0. \quad (12)$$

Поэтому, кроме еще одного особого случая $n=1$, $k=0$, можно сразу написать

$$\xi_{nk}(\mathbf{r}_1) = c\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2 q_n^k(\tau)\left[\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+3)^2}\times L_n^k(\mathbf{r}_1) + \frac{(n+k-1)(n+k)}{(2n-1)^2}L_{n-2}^k(\mathbf{r}_1)\right] + \tilde{\xi}(\mathbf{r}_1)$$

при $\tau > \tau_1$, а при $\tau < \tau_1$

$$\xi_{nk}(\mathbf{r}_1) = -c\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2 p_n^k(\tau)\left[\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+3)^2}\times \tilde{L}_n^k(\mathbf{r}_1) + \frac{(n+k-1)(n+k)}{(2n-1)^2}\tilde{L}_{n-2}^k(\mathbf{r}_1)\right] + \tilde{\xi}(\mathbf{r}_1) \quad (13)$$

с некоторыми гармоническими функциями ξ и $\tilde{\xi}$, которые определяются из условия сшивания на сфероиде $\tau = \mathrm{const}$ самих функций ξ_{nk} и их нормальных производных (последнее эквивалентно сравнению производных по τ_1 в точке $\tau = \tau_1$). В результате некоторого анализа, пояснения к которому даны ниже, мы приходим к нужному выражению, а именно

$$\xi(\mathbf{r}_1) = \left\{\frac{(n-k+2)!(n-k)!}{(2n+3)^2[(n+k)!]^2}P_n^k(t_1)p_n^k(\tau_1)q_{n+2}^k(\tau) - \frac{[(n-k)!]^2}{(2n-1)^2(n+k-2)!(n+k)!}P_n^k(t_1)p_n^k(\tau_1)q_{n-2}^k(\tau) + \frac{[(n-k+2)!]^2}{(2n+3)^2(n+k)!(n+k+2)!}P_{n+2}^k(t_1)p_{n+2}^k(\tau_1)q_{n+2}^k(\tau) + \frac{(n-k)!(n-k-2)!}{(2n-1)^2[(n+k-2)!]^2}P_{n-2}^k(t_1)p_{n-2}^k(\tau_1)q_{n-2}^k(\tau) + \gamma_{nk}P_n^k(t_1)p_n^k(\tau_1)q_n^k(\tau)\right\}c\exp(-ik\varphi_1),$$

где

$$\gamma_{nk} = -\frac{4(4k^2-1)(2n+1)}{(2n-1)^2(2n+3)^2}\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2, \quad (14)$$

а $\tilde{\xi}$ выражается точно так же, но символы p и q везде меняются местами. При проверке приходится опираться на некоторые тождества для функций Лежандра, не содержащиеся в обычных руководствах и требующие специального вывода.

Во-первых, мы вводим функцию $M_n^k = q_{n+2}^k p_n^k - q_n^k p_{n+2}^k$. Из определения функций q легко вывести, что $M_n^k(\tau)$ — полином первой степени, обладающий нечетностью по τ. Следовательно, достаточно определить один коэффициент при помощи асимптотики p и q при больших τ. Расчет дает

$$M_n^k = -(2n+3)\frac{(n+k)!}{(n-k+2)!}\tau. \quad (15)$$

Во-вторых, мы используем комбинацию $\Omega_n^k = q'^k_{n+2}p_n^k + q'^k_n p_{n+2}^k - q_{n+2}^k p'^k_n - q_n^k p'^k_{n+2}$. Дифференцируя ее и заменяя появившиеся вторые производные согласно известным дифференциальным уравнениям для p_n^k и q_n^k [1], находим

$$\Omega'^k_n = -\frac{2\tau}{1+\tau^2}\Omega_n^k + \frac{2(2n+3)}{1+\tau^2}M_n^k, \quad (16)$$

где функция M_n^k определена формулой (15).

Мы рассматриваем формулу (15) как дифференциальное уравнение для Ω_n^k. Оно легко интегрируется

$$(1+\tau^2)\Omega_n^k = -\frac{(2n+3)^2(n+k)!}{(n-k+2)!}(\tau^2 + C).$$

Постоянную интегрирования C в предыдущей формуле можно определить хотя бы подстановкой $\tau = i$. Получаем

$$\Omega_n^k = -\frac{(2n+3)^2(n+k)!}{(n-k+2)!} + \left[\frac{(n+k)!}{(n-k)!} + \frac{(n+k+2)!}{(n-k+2)!}\right]\frac{1}{1+\tau^2}.$$

При сравнении производных по τ с обеих сторон, кроме $\Omega_n^k(\tau)$ и $M'^k_n(\tau)$, используется также известное дифференциальное соотношение (5).

Вышеуказанных соотношений достаточно, чтобы убедиться в правильности выбора функций ξ и $\tilde{\xi}$ (в добавлении константы нет необходимости, так как выражение для $\xi_{nk}(\mathbf{r}_1)$ обладает правильным асимптотическим поведением, обращаясь в 0 при $r_1 \to \infty$ хотя бы в среднем по сфере). В стоящем особняком случае $n = 1$, $k = 0$ во второй формуле (13) вместо второго члена в квадратных скобках должно стоять $-t/6$, согласно формулам (12).

Остается собрать все члены в разложении D, причем напрашивается попарная группировка при каждом k некоторых членов, у которых значение индекса n отличается на 2. Особые случаи $n = 0$ и $n = 1$ при $k = 0$ дают дополнительные члены с отдельно стоящими τ и t. В результате имеем

$$D = c\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|k|}^{\infty}\left[\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^2\Bigg[-\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+3)^2}$$
$$\times \tilde{L}_n^k(\mathbf{r})V^{*k}_n(\mathbf{r}_1) - \frac{(n+k-1)(n+k)}{(2n-1)^2}\tilde{L}_{n-2}^k(\mathbf{r})V^{*k}_n(\mathbf{r}_1)$$
$$+ \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+3)^2}L^{*k}_n(\mathbf{r}_1)W_n^k(\mathbf{r})$$
$$+ \frac{(n+k-1)(n+k)}{(2n-1)^2}L^{*k}_{n-2}(\mathbf{r}_1)W_n^k(\mathbf{r})$$
$$+ \gamma_{nk}V^{*k}_n(\mathbf{r}_1)W_n^k(\mathbf{r})\Bigg] + c(\tau - tt_1\tau_1) \qquad (17)$$

в области $\tau \ge \tau_1$, иначе $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$, как и соответствующие координаты, меняются ролями. Члены с L_{n-2}^k и $\tilde{L}_{n-2}^k$ отбрасываются при $|k| \ge n - 1$ [5].

Итак, формула (17) с конкретными γ_{nk}, определяемыми соотношениями (14), полностью доказана. Для проверки можно, например, рассмотреть случай, когда обе точки находятся на полярной оси, т.е. $t = t_1 = 1$, $r = c\tau$, $r_1 = c\tau_1$. Если положить для определенности $r \ge r_1$, то несложная перегруппировка членов в правой части (17) (остаются только члены с $k = 0$, причем взаимно уничтожающиеся, кроме отдельно стоящего $c|\tau - \tau_1|$) сразу приводит к правильному выражению расстояния $D = r - r_1$. Другая проверка получается при одновременном и пропорциональном стремлении r и r_1 к бесконечности с сохранением угловых координат. Тогда асимптотически $r \approx c\tau$, $t \approx \cos\theta$ (напомним, что θ — полярный угол) и аналогично для другой точки. Из формулы (17) получаем соотношение

$$D = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|k|}^{\infty}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\left[\frac{r_1^{n+2}}{(2n+3)r^{n+1}} - \frac{r_1^n}{(2n-1)r^{n-1}}\right]$$
$$\times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\theta_1)\exp[ik(\varphi - \varphi_1)],$$

которое нетрудно вывести и непосредственно на основании теории сферических функций. Для этого достаточно известный ряд (см., например, [1, с. 145])

$$D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\nu}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{r_1^s}{r^{s+1}}P_s(\cos\nu)$$

умножить на $D^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1\cos\nu$ и воспользоваться рекуррентной формулой $(n - k + 1)P_{n+1}^k(t) - (2n+1)tP_n^k(t) + (n+k)P_{n-1}^k(t) = 0$.

Заключение

Значение разложений (7) и (17) состоит в том, что они дают в определенной системе координат решение соответственно уравнения Пуассона и уравнения

$$\Delta\Delta u(\mathbf{r}) = 4\pi f(\mathbf{r}). \qquad (18)$$

Действительно, как известно [10], частным решением уравнения (18) является

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\iiint Df(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1. \qquad (19)$$

Если функция f отлична от нуля только в конечной области пространства, то во всей остальной области функция (18) оказывается бигармонической и взятие интеграла после применения разложения (17) дает для этой бигармонической функции выражение в виде ряда по некоторому стандартному набору функций. Этим, кстати, и обосновывается полнота системы бигармонических функций V_n^k и L_n^k внутри конкретного сжатия сфероида S. Действительно, функцию v, гармоническую внутри сфероида, всегда можно представить потенциалом простого слоя

$$v(\mathbf{r}) = \int\limits_S \frac{\mu(\mathbf{r}_1)}{D}\,d\sigma_1,$$

где $d\sigma_1$ — элемент поверхности S, μ — некоторая поверхностная плотность.

Для произвольной, достаточно гладкой бигармонической (четыре раза дифференцируемой) функции ψ внутри сфероида отождествляем v с $\Delta\psi$. Тогда для функции

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\int\limits_S D\mu(\mathbf{r}_1)d\sigma_1$$

получаем $\Delta\psi_1 = v$. Следовательно, исходная функция ψ представляется суммой

$$\psi = \frac{1}{2}\int\limits_S D\mu(\mathbf{r}_1)d\sigma_1 + \chi, \qquad (20)$$

где χ — некоторая гармоническая функция.

Но $\chi(\mathbf{r})$ всегда можно разложить по системе функций V [1]. Раскрытие D, согласно нашей основной формуле (17), представляет интеграл в формуле (20) как суперпозицию из V, L, t и τ, так что полнота этой системы в упомянутом классе достаточно гладких бигармонических функций внутри сфероида доказана. Совершенно аналогично доказывается полнота системы функций $W, \tilde{L}, t$ и τ во внешней области сжатого сфероида в классе достаточно гладких бигармонических функций, ограниченных на бесконечности.

Напомним, что иногда характер задачи требует применения именно сфероидальных координат. В частности, такие условия естественным образом появляются, если сама функция f наиболее удобно выражается в сфероидальных координатах. Физически такое положение может быть связано с особой ролью некоторого опорного сфероида или в предельном случае круга конечного радиуса в конкретной задаче. Пример астрофизических приложений дается в [11]. Более сложные примеры получаются, по-видимому, в динамике самогравитирующих жидких масс с учетом вязкости. Разработанный в настоящей работе аппарат может найти разнообразные технические приложения, поскольку уравнение (18) и сходные с ним часто встречаются в задачах теории упругости, теории пластичности и гидродинамики [12,13]. Особая роль некоторого круга также достаточно обычна в технических задачах равновесия трехмерной упругой среды [14].

Автор искренне признателен В.А. Антонову за постоянный интерес и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Гобсон Е.И.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.

[2] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988.

[3] *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

[4] *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

[5] *Баранов А.С.* // ЖВВМФ. 1997. Т. 37. 4. С. 395–403.

[6] *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.: Гостехтеориздат, 1946.

[7] *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики. Вып. 1. М.: Мир, 1969.

[8] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.

[9] *Тиман А.Ф., Трофимов В.М.* Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.

[10] *Boussinesq J.* Application des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des solides élastiques. Paris: Libraire Scient. Techn., 1969.

[11] *Chandrasekhar S., Lebovitz N.R.* // Astrophys. J. 1962. Vol. 136. P. 1037–1047.

[12] *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968.

[13] *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

[14] *Андрейкив А.Е.* Пространственные задачи теории трещин. Киев: Наукова думка, 1982.