

01;03

К вопросу о гравитационном движении равномерно нагретой капли в вязкой жидкости

© Н.В. Малай

Белгородский государственный университет,
Белгород, Россия
e-mail: malay@bsu.edu.ru

(Поступило в Редакцию 20 февраля 2001 г. В окончательной редакции 19 мая 2001 г.)

В приближении Стокса проведено теоретическое описание движения равномерно нагретой капли сферической формы под действием силы тяжести. В работе получено обобщение формул Стокса и Адамара-Рыбчинского, позволяющее учесть в широком интервале температур зависимость вязкости от температуры и вычислить силу сопротивления движению и скорость гравитационного падения при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

Постановка задачи

Рассматривается гравитационное движение равномерно нагретой гидрозольной капли, температура поверхности которой равна T_s , в другой, не смешивающейся с ней вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. На бесконечности жидкость покоится. Под нагретой (охлажденной) частицей понимается частица, температура поверхности которой отличается от температуры жидкости вдали от нее. Равномерный нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, выделением тепла при химических реакциях на поверхности частицы, радиоактивным распадом вещества капли, внешним излучением и т.д. В частности, если на каплю падает поток монохроматического излучения (длина волны λ_0) интенсивностью I_0 , то поглощаемая ею энергия равна $\pi R^2 I_0 K_n$, где R — радиус капли, K_n — фактор поглощения [1,2], и распределяется по объему капли равномерно. Это допущение справедливо в том случае, если коэффициент теплопроводности капли по величине много больше коэффициента теплопроводности внешней среды и $\lambda_0 \gg R$. Все процессы в системе частица–жидкая среда протекают квазистационарно в силу малости времени тепловой релаксации системы.

Нагретая поверхность частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики окружающей жидкости и в конечном итоге на распределение полей скорости и давления в ее окрестности.

В отличие от изученного ранее [3–6] в работе получено обобщение формул Стокса и Адамара–Рыбчинского на случай стационарного движения равномерно нагретой сферической капли в вязкой несжимаемой жидкости при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом произвольной зависимости от температуры вязкости жидкости.

Из всех параметров переноса жидкости коэффициент вязкости наиболее сильно зависит от температуры, причем вязкость жидкости уменьшается с температурой по экспоненциальному закону [7,8]. Анализ имеющихся полуэмпирических формул и экспериментальных дан-

ных показал, что для учета зависимости динамической вязкости от температуры формула (1) позволяет наилучшим образом описать изменение вязкости жидкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью (при $F_n = 0$ эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [7])

$$\mu_e = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right)^n \right] \exp \left\{ -A \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right) \right\}, \quad (1)$$

где A и F_n — постоянные; $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, T_∞ — температура жидкости вдали от частицы; здесь и далее индексы e и i будем относить соответственно к вязкой жидкости и к нагретой частице, индексом ∞ обозначены параметры жидкости на бесконечности в невозмущенном потоке, а индексом s — значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности T_s : например, для воды с относительной погрешностью, не превышающей 2%, коэффициенты $A = 5.779$, $F_1 = 2.318$ и $F_2 = 9.118$ в интервале температур от 273 до 363 К при $T_\infty = 273$ К.

Предполагается, что плотности, теплопроводности и теплоемкости жидкости и капли постоянны. Движение частицы достаточно медленное (малые числа Рейнольдса и Пекле) и она сохраняет сферическую форму. Последнее условие справедливо, если силы поверхностного натяжения на поверхности раздела капля–внешняя среда значительно больше сил внешнего вязкого сопротивления, стремящихся нарушить сферическую форму. Аналитически условие сохранения формы капли записывается в виде неравенства, которое выполняется для большинства жидкостей [9]: $(\sigma/R) \gg (\mu_e |U_e|/R)$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения на межфазной границе капля–внешняя среда; U_e — скорость движения капли.

Удобно ввести систему отсчета, связанную с центром движущейся частицы (задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость которого U_∞ подлежит определению). Распределение скорости и температуры обладает акси-

альной симметрией относительно оси OZ , проходящей через центр капли в направлении скорости набегающего потока. Поэтому при анализе используется сферическая система координат, в которой радиус r отсчитывается от центра капли, а угол Θ — от направления скорости набегающего потока.

В рамках сформулированных допущений в приближении Стокса в сферической системе координат r, Θ, φ уравнения и граничные условия для скоростей \mathbf{U} , давления P и температуры T_e вне и внутри капли запишутся в виде [5,10]

$$\nabla P_e = \mu_e \nabla^2 \mathbf{U}_e + 2(\nabla \mu_e) \nabla \mathbf{U}_e + (\nabla \mu_e) \times (\nabla \times \mathbf{U}_e) + \mathbf{F}_g,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U}_e = 0, \quad (2)$$

$$\mu_i \Delta \mathbf{U}_i = \nabla P_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}_i = 0, \quad (3)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad (4)$$

$$r = R, \quad U_r^e = U_r^i = 0, \quad U_\Theta^e = U_\Theta^i, \quad T_e = T_s, \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{U}_e \rightarrow U_\infty \cos \Theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin \Theta \mathbf{e}_\Theta,$$

$$T_e \rightarrow T_\infty, \quad P_e \rightarrow P_\infty, \quad (6)$$

$$r \rightarrow 0, \quad |\mathbf{U}_i| \neq \infty, \quad P_i \neq \infty. \quad (7)$$

Здесь U_r и U_Θ — радиальная и тангенциальная компоненты массовой скорости жидкости \mathbf{U} в сферической системе координат; \mathbf{F}_g — вектор гравитационных сил; $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$, U_∞ — величина скорости набегающего потока, которая подлежит определению из условия обращения в нуль полной силы, действующей на частицу (U_∞ и $|\mathbf{F}_g|$ должны быть связаны так, что полная сила, действующая на каплю, равна нулю); \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_Θ — единичные векторы в сферической системе координат; T_s — средняя температура поверхности капли.

На поверхности капли (5) приняты условия непроницаемости и непрерывности для нормальной и касательной компонент массовой скорости и постоянства температуры поверхности частицы. В качестве граничных условий на бесконечности, т.е. вдали от частицы, взяты условия (6), а конечность физических величин, характеризующих каплю при $r \rightarrow 0$, учтена в (7).

Чтобы получить замкнутую задачу к граничным условиям на поверхности равномерно нагретой капли мы должны еще добавить непрерывность компонентов тензора напряжений — для нормальной и касательной [9,10]

$$-P_e = 2\mu_e \frac{\partial U_r^e}{\partial r} = -P_i + 2\mu_i \frac{\partial U_r^i}{\partial r} + 2\frac{\sigma}{R}, \quad (8)$$

$$\mu_e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \Theta} + \frac{\partial U_\Theta^e}{\partial r} - \frac{U_\Theta^e}{r} \right) = \mu_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r^i}{\partial \Theta} + \frac{\partial U_\Theta^i}{\partial r} - \frac{U_\Theta^i}{r} \right). \quad (9)$$

Поле скоростей и температуры. Скорость дрейфа капли

Чтобы найти скорость падения равномерно нагретой капли необходимо знать распределение температуры, скорости и давления в ее окрестностях. Общее решение уравнения теплопроводности (4), удовлетворяющее соответствующим граничным условиям, имеет вид

$$t_e = 1 + \frac{\gamma}{y}, \quad \gamma = (T_s - T_\infty)/T_\infty, \quad (10)$$

где $y = r/R$ — безразмерная радиальная координата; $t_e = T_e/T_\infty$; γ — безразмерный параметр, характеризующий перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

Подставляя (10) в выражение (1), получаем следующее выражение для динамической вязкости:

$$\mu_e = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right] \exp \left\{ -A \frac{\gamma}{y} \right\}. \quad (11)$$

Формула (11) в дальнейшем используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности равномерно нагретой капли. Вид граничных условий (5)–(9) позволяет разделить переменные при решении уравнений гидродинамики. Выражения для компонент массовой скорости и давления находились в виде

$$U_r(r, \Theta) = U_\infty G(r) \cos \Theta,$$

$$U_\Theta(r, \Theta) = -U_\infty g(r) \sin \Theta, \quad P(r, \theta) = P_0 + h(r) \cos \Theta,$$

где $G(r)$, $g(r)$ и $h(r)$ — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты r .

Из уравнения непрерывности находилась связь между функциями $G(r)$ и $g(r)$. Потом это все подставлялось в соответствующие уравнения Стокса. В конечном итоге было получено обыкновенное однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка для функции $G(r)$ аналогично уравнению, приведенному в работе [11], решение которого искалось в виде обобщенных степенных рядов. Для компонент массовой скорости и давления были получены следующие выражения:

$$U_r^e(y, \Theta) = U_\infty \cos \Theta [1 + A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y)], \quad (12)$$

$$U_\Theta^e(y, \Theta) = -U_\infty \sin \Theta [1 + A_1 G_3(y) + A_2 G_4(y)] \quad (13)$$

$$P_e(y, \Theta) = P_\infty + \frac{\mu_e U_\infty}{R} \cos \Theta [A_1 G_5 + A_2 G_6], \quad (14)$$

$$U_r^i(y, \Theta) = U_\infty \cos \Theta (A_3 + A_4 y^2), \quad (15)$$

$$U_\Theta^i(y, \Theta) = -U_\infty \sin \Theta (A_3 + 2A_4 y^2), \quad (16)$$

$$P_i(y, \Theta) = P_0 + 10 \frac{\mu_i U_\infty}{R} A_4 \cos \Theta, \quad (17)$$

где

$$G_1(y) = -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)y^n}, \quad G_3(y) = G_1(y) + \frac{1}{2} y G_1^I,$$

$$G_2(y) = -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(2)}}{(n+1)y^n} - \frac{\alpha}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3) \ln \frac{1}{y} - 1 \right] \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)^2 y^n},$$

$$G_5(y) = \frac{1}{2} y G_1''' + y \left(3 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_1'' + \left(2 + \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_1',$$

$$G_6(y) = \frac{1}{2} y G_2''' + y \left(3 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_2'' + \left(2 + \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_2',$$

$$s_n = AF_{n-1} - nF_n - \sum_{k=1}^n s_{n-k} F_k, \quad F_0 = 1,$$

F_n при n меньше нуля равны нулю, $G_4(y) = G_2(y) + \frac{1}{2} y G_2'$, G_1' , G_1'' , G_1''' , G_2' , G_2'' , G_2''' — первая, вторая, третья производная по y от соответствующих функций G_1 , G_2 ,

$$\Delta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)} \sum_{k=1}^n \left[(n+4-k) \times (\alpha_k^{(1)}(n+5-k) - \alpha_k^{(2)}) + \alpha_k^{(3)} \right] \gamma^k \Delta_{n-k}^{(1)} \quad (n \geq 1), \quad (18)$$

$$\Delta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n+3)(n-2)} \left[-6\alpha_n^{(4)} \gamma^n + \sum_{k=1}^n \left[(n+2-k) \times \left\{ (n+3-k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)} \right\} + \alpha_k^{(3)} \right] \gamma^k \Delta_{n-k}^{(2)} + \alpha \sum_{k=0}^n \left[(2n+5-2k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)} \right] \gamma^k \Delta_{n-k-2}^{(1)} \right] \quad (n \geq 3). \quad (19)$$

При вычислении коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$, $\Delta_n^{(2)}$ по рекуррентным формулам (18), (19) необходимо учитывать, что

$$\Delta_0^{(1)} = -3, \quad \Delta_0^{(2)} = -1, \quad \Delta_2^{(2)} = 1,$$

$$\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(4)} = 1, \quad \alpha_0^{(2)} = 4, \quad \alpha_0^{(3)} = -4,$$

$$\alpha_n^{(1)} = F_n, \quad \alpha_n^{(2)} = (4-n)F_n + AF_{n-1},$$

$$\alpha_n^{(3)} = 2AF_{n-1} - 2(2+n)AF_n,$$

$$\alpha_n^{(4)} = A^n/n!,$$

$$\alpha = -\frac{\gamma}{15} \left\{ 6\gamma^2 \alpha_2^{(4)} - \left[3 \left(4\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)} \right) + \alpha_1^{(3)} \right] \Delta_1^{(2)} + \left[2 \left(3\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)} \right) + \alpha_2^{(3)} \right] \gamma \right\},$$

$$\Delta_1^{(2)} = -\frac{\gamma}{4} \left[6\alpha_1^{(4)} + 2 \left(3\alpha_1 - \alpha_1^{(2)} \right) + \alpha_1^{(3)} \right].$$

Постоянные интегрирования A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , входящие в выражения (13)–(17), определяются при их подстановке в соответствующие граничные условия на поверхности капли. После того как они определены, сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по ее поверхности [12]

$$\mathbf{F} = \int_{(S)} (-P_e \cos \Theta + P_{rr} \cos \Theta - P_{0r} \sin \Theta) r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi \mathbf{n}_z, \quad (20)$$

где

$$P_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^e}{\partial r}, \quad P_{r\Theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_{\Theta}^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \Theta} - \frac{U_{\Theta}^e}{r} \right)$$

— компоненты тензора напряжений в сферической системе координат; \mathbf{n}_z — единичный вектор, направленный вдоль оси z декартовой системы координат.

Подставляя в (20) выражения (13), (14), после интегрирования получаем

$$\mathbf{F} = 4\pi R \mu_{\infty} U_{\infty} A_2 \exp\{-A\gamma\} \mathbf{n}_z, \quad (21)$$

где

$$A_2 = - \left(N_3 + N_4 \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} \right) / \left(N_1 + N_2 \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} \right),$$

$$N_1|_{y=1} = [G_1 G_2' - G_2 G_1'],$$

$$N_2|_{y=1} = [G_2 (2G_1' + G_1'') - G_1 (2G_2' + G_2'')],$$

$$N_4|_{y=1} = [2G_1' + G_1''],$$

$$N_3|_{y=1} = -G_1'.$$

Подставляя коэффициент A_2 в (21), получаем выражение для силы сопротивления падающей в поле силы тяжести равномерно нагретой капли

$$\mathbf{F} = -6\pi R \mu_{\infty} U_{\infty} f_{\mu} \mathbf{n}_z, \quad (22)$$

где

$$f_{\mu} = \frac{2}{3} \exp\{-A\gamma\} \left(N_3 + N_4 \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} \right) / \left(N_1 + N_2 \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} \right).$$

Сферическая капля, падающая под действием силы тяжести в вязкой жидкости, в конце концов начинает двигаться с постоянной скоростью, при которой действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами. Сила тяжести, действующая на частицу, с учетом выталкивающей силы равна

$$\mathbf{F} = (\rho_i - \rho_e) g \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{n}_z, \quad (23)$$

где g — ускорение свободного падения.

Приравнивая оба выражения (22) и (23), получаем скорость падения равномерно нагретой сферической капли (аналог формулы Адамара–Рыбчинского)

$$U_e = h_{\mu} \mathbf{n}_z \quad \left(h_{\mu} = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho_i - \rho_e}{\mu_{\infty} f_{\mu}} g \right). \quad (24)$$

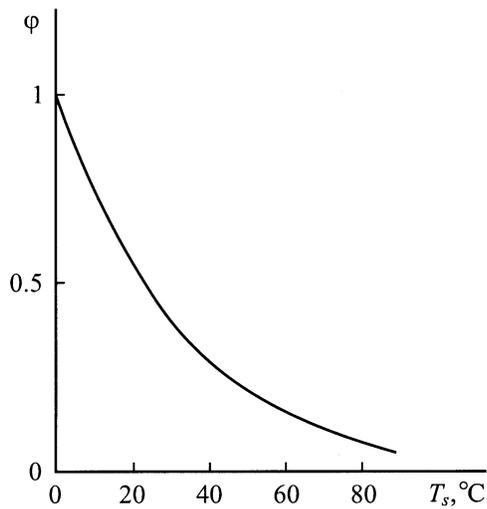


Рис. 1. Зависимость φ от средней температуры поверхности T_s .

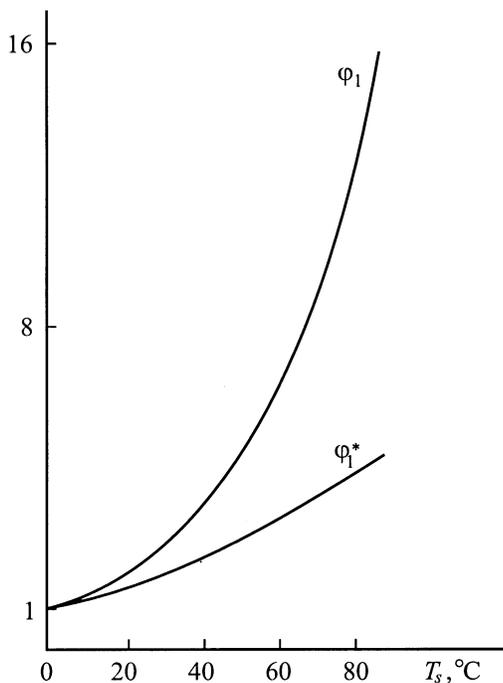


Рис. 2. Зависимости φ_1 и φ_1^* от средней температуры поверхности T_s .

Если в (22) $\mu_e^s/\mu_i^s \rightarrow 0$, то мы получаем формулу для силы сопротивления твердой равномерно нагретой частицы (аналог формулы Стокса).

В случае, когда величина нагрева поверхности капли достаточно мала, т.е. средняя температура поверхности капли незначительно отличается от температуре окружающей среды на бесконечности ($\gamma = (T_s - T_\infty)/T_\infty \rightarrow 0$), зависимостью коэффициента динамической вязкости от температуры можно пренебречь и тогда $G_1 = -1/3$,

$G_1^I = 1$, $G_1^{II} = -4$, $G_1^{III} = 20$, $G_2 = -1$, $G_2^I = 1$, $G_2^{II} = -2$, $G_2^{III} = 6$, $N_1 = 2/3$, $N_2 = 2$, $N_3 = -1$, $N_4 = -2$. В этом случае формула (22) переходит в известные выражения для сферы, полученные Адамаром, а также Рыбчинским и Стоксом [10].

Для иллюстрации вклада в силу сопротивления и скорости падения капли нагрева поверхности частицы, т.е. учета зависимости вязкости от температуры, представленной формулой (1), на рис. 1 и 2 приведены кривые, связывающие значения $\psi = f_\mu/f_\mu|_{T_s=273\text{K}}$ и $\psi_1 = h_\mu/h_\mu|_{T_s=273\text{K}}$ со значениями T_s для крупных капель ртути с радиусом $R = 2 \cdot 10^{-5}$ м, движущихся в воде при $T_\infty = 273$ К. Кривая ψ_1^* строилась по формуле при малых относительных перепадах температуры ($\gamma \rightarrow 0$) [10], но коэффициенты молекулярного переноса брались при $T_e = T_s$. Как видно из приведенных кривых, нагрев поверхности капли существенно влияет на силу сопротивления и скорость ее гравитационного падения.

Таким образом, в работе получены выражения, обобщающие формулы Стокса и Адамара–Рыбчинского на случай стационарного движения равномерно нагретой твердой сферической частицы или капли в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда.

Список литературы

- [1] Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
- [2] Кузиковский А.В. // Изв. вузов. Физика. 1970. № 5. С. 89–94.
- [3] Acrivos A., Taylor T.D. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. N 4. P. 387–394.
- [4] Kassoy D.R., Adamson T.S., Messiter A.F. // Phys. Fluids. 1966. Vol. 9. N 4. P. 7671–7681.
- [5] Головин А.М., Фоминых В.В. // МЖГ. 1983. № 1. С. 38–42.
- [6] Найденов В.И. // ПММ. 1971. Т. 38. Вып. 1. С. 162–166.
- [7] Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
- [8] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1971. 720 с.
- [9] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физмат. лит., 1959. 230 с.
- [10] Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
- [11] Малай Н.В., Аматов М.А., Шукин Е.Р. // Сб. научн. тр. Рязань: РГПУ, 1995. С. 102–112.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.