01;03

Влияние коэффициента испарения на термофорез летучей однокомпонентной капли в бинарной смеси газов

© С.Н. Дьяконов, Э.В. Ефремов, А.А. Морозов

Орловский государственный университет,
302015 Орел, Россия
e-mail: ua3ecf@esc.private.oryol.su

(Поступило в Редакцию 19 марта 2001 г. В окончательной редакции 12 июля 2001 г.)

На основе гидродинамического анализа построена теория равномерного термофоретического движения жидкой летучей сферической капли в бинарной газовой смеси с фазовым переходом одного из компонентов на поверхности. Решение задачи позволяет оценить относительный вклад прямого влияния скорости испарения на скорость термофореза, распределения скоростей, температур, концентрации летучего компонента с учетом термодиффузии смеси газов, стефановских и термокапиллярных явлений. Скорость термофоретического переноса выражается через коэффициент испарения вещества капли по формуле, которая обобщает известные результаты традиционных теорий на случай слабого и умеренно сильного диффузионного испарения жидкой капли.

Постановка задачи

Данная работа обобщает исследование [1] при малых числах Рейнольдса путем учета внутреннего движения летучего вещества сферической однокомпонентной капли и термокапиллярных эффектов. Теория построена в сферической системе координат (r, Θ, φ). Начало жестко связано с геометрическим центром капли, а ось Oz направлена вдоль вектора $\mathbf{A}_T = (\nabla T)_\infty$.

Капля с радиусом R испытывает действие термодиффузиофоретической, реактивной и термокапиллярной сил $(\mathbf{F}_{TF}, \mathbf{F}_{DF}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{F}_\sigma)$, которые стремится скомпенсировать сила $\mathbf{F}_\mathrm{v}$ вязкого сопротивления газообразной среды. Искомая термофоретическая скорость $\mathbf{U}_T = -\mathbf{U}$ жидкой сферы достигается, если исчезает результирующая сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{TF} + \mathbf{F}_{DF} + \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\sigma + \mathbf{F}_\mathrm{v} = 0.$$

Влияние летучести на термофоретическое движение жидкого тела происходит с разных сторон. Во-первых, меняются распределения термператур внутри и вне капли. В результате вдоль граничной поверхности появляется дополнительное скольжение газовой смеси, изменяется тангенциальная термокапиллярная сила, обусловленная переменным межфазным поверхностным натяжением σ. Во-вторых, окружающее пространство насыщается паром летучего вещества и усиливается объемная термодиффузия компонентов газовой смеси.

Состояния сред описываются в квазистационарном приближении (векторные поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}'(\mathbf{r})$, распределения давлений $p(\mathbf{r})$ и $p'(\mathbf{r})$, скалярные поля температур $T(\mathbf{r})$ и $T'(\mathbf{r})$ вне и внутри частицы соответственно, относительной концентрации $C(\mathbf{r})$ летучего компонента в бинарной смеси газов рассматриваются как установившиеся в любой момент времени) осесимметричными дифференциальными уравнениями Стокса–неразрывности–Лапласа

$$\eta_0\Delta\mathbf{v} = \nabla p, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \eta_0'\Delta\mathbf{v}' = \nabla p', \quad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0,$$
$$\Delta T = 0, \quad \Delta T' = 0, \quad \Delta C = 0.$$

На бесконечности и граничной поверхности справедливы линеаризованные условия

$$r \to \infty: \quad \mathbf{v} = U\mathbf{i}_z, \quad T = T_0 + A_T z, \quad C = C_0, \quad p = p_0,$$

$$r = R: \quad n_{10}v_r - \frac{n_0^2 m_2}{\rho_0} D\left(\nabla_r C + \frac{K_{TD}}{T_0}\nabla_r T\right) = \alpha\nu n_0\{C_s(T') - C\},$$

$$n_{20}v_r + \frac{n_0^2 m_1}{\rho_0} D\left(\nabla_r C + \frac{K_{TD}}{T_0}\nabla_r T\right) = 0,$$

$$n_0' v_r' = n_{10}v_r - \frac{n_0^2 m_2}{\rho_0} D\left(\nabla_r C + \frac{K_{TD}}{T_0}\nabla_r T\right),$$

$$v_\Theta - v_\Theta' = K_{TSL}\frac{\eta_0}{\rho_0 T_0}\nabla_\Theta T + K_{DSL} D\nabla_\Theta C,$$

$$\tau_{rr} - \tau_{rr}' - \frac{2\sigma}{R} = 0, \quad \tau_{r\Theta} - \tau_{r\Theta}' + \nabla_\Theta\sigma = 0,$$

$$T = T', \quad -\kappa_0\nabla_r T + \kappa_0'\nabla_r T' = -Lm_1\alpha\nu n_0\{C_s(T') - C\},$$

$$\tau_{rr} = -p + 2\eta_0\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \tau_{rr}' = -p' + 2\eta_0'\frac{\partial v_r'}{\partial r},$$

$$\tau_{r\Theta} = \eta_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\Theta} + \frac{\partial v_\Theta}{\partial r} - \frac{v_\Theta}{r}\right),$$

$$\tau_{r\Theta}' = \eta_0'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r'}{\partial\Theta} + \frac{\partial v_\Theta'}{\partial r} - \frac{v_\Theta'}{r}\right),$$

$$C_s(T') = C_s(T_W) + \left.\frac{\partial C_s}{\partial T'}\right|_{T'=T_W}(T' - T_W),$$

$$\sigma(T') = \sigma(T_W) + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\right|_{T'=T_W}(T' - T_W),$$

$$\nabla_{\Theta\sigma} = \frac{1}{R}\left.\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\right|_{T'=T_W}\frac{\partial T'}{\partial\Theta},$$

$$C = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad C_s = \frac{n_{1s}}{n_1 + n_2}, \quad \nu = \left(\frac{R_g T}{2\pi\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$n_0 = n_{10} + n_{20}, \quad \rho_0 = m_1 n_{10} + m_2 n_{20}, \quad \rho_0' = m_1 n_0',$$
$$\eta_0 = \eta(T_0, C_0, p_0), \quad \eta_0' = \eta'(T_0, p_0'),$$
$$\kappa_0 = \kappa(T_0, C_0, p_0), \quad \kappa_0' = \kappa'(T_0, p_0').$$

Здесь n_1, n_2 — численные концентрации газовых молекул первого и второго сорта с массами m_1, m_2; C_s — относительная концентрация насыщенных паров летучего вещества капли; D — коэффициент взаимной диффузии компонентов смеси газов; L, μ — удельная теплота испарения и молярная масса вещества капли; (ρ_0, ρ_0'), (η_0, η_0'), (κ_0, κ_0') — плотности, коэффициенты динамической вязкости и удельной теплопроводности газовой среды и конденсированной фазы; ν — одна четвертая средней арифметической скорости теплового движения газовых молекул первого сорта; R_g — универсальная газовая постоянная; $(\tau_{rr}, \tau_{t\Theta})$, $(\tau_{rr}', \tau_{r\Theta}')$ — компоненты тензоров вязких напряжений в несжимаемых средах (вне и внутри капли); T_W — средняя температура на поверхности капли определяется из решения задачи, p_0' — давление внутри капли, взвешенной в изотермической газообразной среде при температуре T_0 (внешние массовые силы отсутствуют)

$$p_0' - p_0 = \frac{2\sigma(T_0)}{R}.$$

Указанные выше условия имеют следующий физический смысл. На бесконечности осесимметричный поток внешней среды является однородным в пространстве и имеет скорость U в направлении оси (Oz). Скалярное поле температур $T(\mathbf{r})$, распределение относительной концентрации $C(\mathbf{r})$ первого компонента смеси газов и давление $p(\mathbf{r})$ невозмущены. Нормальный поток молекул летучего вещества на фазовой границе раздела непрерывен и представляется как нормальный поток газовых молекул первого сорта, который отводится с поверхности через слой Кнудсена и пропорционален коэффициенту испарения α. Поверхность аэрозольной частицы непроницаема для несущей компоненты. Нормальные и касательные компоненты тензора полных напряжений имеют разрыв, а температура и нормальный поток тепла с учетом фазового перехода непрерывны.

Смесь газов и конденсированная фаза не перемешиваются. Тогда при равномерном движении капли каждый элемент ее поверхности находится в равновесии и действующие силы компенсируют друг друга. Если указанный элемент рассматривается в системе отсчета, где он покоится, то создаваемое каждой средой напряжение определяется как соответствующий поток импульса (нормаль к границе раздела является внешней по отношению к поверхности среды). Кроме того, на данный элемент действует дополнительная сила (обусловлена межфазным поверхностным натяжением)

$$\mathbf{f} = -\mathbf{i}_r \frac{2\sigma}{R} + \mathbf{i}_\Theta \nabla_\Theta \sigma.$$

Состояние насыщенного пара летучей жидкости находится далеко от критического и применяет приближение идеального газа. Для динамического равновесия жидкой и газообразной фазы летучего вещества капли имеем оценку [1]

$$\left.\frac{\partial C_s}{\partial T}\right|_{T=T_W} = \frac{1}{T_W} C_s(T_W) \left(\frac{L\mu}{R_g T_W} - 1 \right),$$

$$C_s(T_W) = C_s(T_0) \frac{T_0}{T_W} \exp\left\{ \frac{L\mu}{R_g T_W} \left(\frac{T_W}{T_0} - 1 \right) \right\}.$$

Для несжимаемых сред общее решение осесимметричной гидродинамической задачи представлено в терминах функции тока (Ψ, Ψ')

$$\begin{matrix} v_r \\ v_r' \end{matrix} = -\frac{1}{r^2 \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Theta} \begin{matrix} \Psi \\ \Psi' \end{matrix}, \quad \begin{matrix} v_\Theta \\ v_\Theta' \end{matrix} = \frac{1}{r \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial r} \begin{matrix} \Psi \\ \Psi' \end{matrix}, \quad \begin{matrix} v_\varphi \\ v_\varphi' \end{matrix} = 0.$$

Физические величины в уравнениях гидродинамики, тепломассопереноса и граничных условиях обезразмериваются так:

$$r = R\tilde{r}, \quad \begin{matrix} v \\ v' \end{matrix} = U \begin{matrix} \tilde{v} \\ \tilde{v}' \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \Psi \\ \Psi' \end{matrix} = UR^2 \begin{matrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Psi}' \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} p \\ p' \end{matrix} = \begin{matrix} \eta_0 \\ \eta_0' \end{matrix} \left(\frac{U}{R} \right) \begin{matrix} \tilde{p} \\ \tilde{p}' \end{matrix} + \begin{matrix} p_0 \\ p_0' \end{matrix}, \quad \begin{matrix} T \\ T' \end{matrix} = A_T R \begin{matrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}' \end{matrix} + T_0.$$

В дальнейшем волнистая линия сверху опускается и постановка задачи имеет вид

$$E^4\Psi(r, \xi) = 0, \quad E^4\Psi'(r, \xi) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi}(E^2\Psi), \quad (1-\xi^2) \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial r}(E^2\Psi), \tag{2}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi}(E^2\Psi'), \quad (1-\xi^2) \frac{\partial p'}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial r}(E^2\Psi'), \tag{3}$$

$$\Delta T(r, \xi) = 0, \quad \Delta T'(r, \xi) = 0, \quad \Delta C(r, \xi) = 0, \tag{4}$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\xi^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2},$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1-\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right\},$$

$$r \to \infty: \quad \Psi = -\frac{1}{2} r^2 (1-\xi^2),$$
$$T = z, \quad C = C_0, \quad p_0 = 0, \tag{5}$$

$$r = 1: \quad \left\{ C_0 + (1-C_0)\frac{m_2}{m_1} \right\} U v_r$$
$$= \alpha\nu \left\{ C_s(\tau) + \left.\frac{\partial C_s}{\partial T'}\right|_{T'=\tau} (T' - \tau) - C \right\}, \tag{6}$$

$$(1-C_0) \left\{ C_0 + (1-C_0)\frac{m_2}{m_1} \right\} U v_r$$
$$+ \frac{D}{R} \left\{ \frac{\partial C}{\partial r} + K_{TD}\varepsilon \frac{\partial T}{\partial r} \right\} = 0, \tag{7}$$

$$U v_r' = \alpha\nu \frac{n_0}{n_0'} \left\{ C_s(\tau) + \left.\frac{\partial C_s}{\partial T'}\right|_{T'=\tau} (T' - \tau) - C \right\}, \tag{8}$$

$$U(v_\Theta - v'_\Theta) = -K_{TSL}\,\frac{\eta_0}{\rho_0 T_0}\,A_T\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial T}{\partial \xi} - K_{DSL}\,\frac{D}{R}\,\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial C}{\partial \xi}, \tag{9}$$

$$-\frac{\eta'_0 U}{R}\left(\frac{\eta_0}{\eta'_0}\,p - p'\right) - (p_0 - p'_0) + 2\,\frac{\eta'_0 U}{R}\left(\frac{\eta_0}{\eta'_0}\,\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v'_r}{\partial r}\right) - \frac{2}{R}\left\{\sigma(\tau) + \left.\frac{\partial \sigma}{\partial T'}\right|_{T'=\tau}(T'-\tau)\right\} = 0, \tag{10}$$

$$\eta_0 U\left\{\frac{1}{r}\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\Theta}{\partial r} + \frac{v_\Theta}{r}\right\} - \eta'_0 U\left\{\frac{1}{r}\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial v'_r}{\partial \xi} - \frac{\partial v'_\Theta}{\partial r} + \frac{v'_\Theta}{r}\right\} + \sqrt{1-\xi^2}\left.\frac{\partial \sigma}{\partial T'}\right|_{T'=\tau}\frac{\partial T'}{\partial \xi} = 0, \tag{11}$$

$$T = T', \quad -\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\,\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T'}{\partial r} = -\frac{Lm_1\alpha v n_0}{A_T\kappa'_0}\left\{C_s(\tau) + \left.\frac{\partial C_s}{\partial T'}\right|_{T'=\tau}(T'-\tau) - C\right\},$$

$$\tau = \frac{T_W - T_0}{A_T R}, \quad \varepsilon = \frac{A_T R}{T_0}, \quad -1 \leqslant \xi = \cos\Theta \leqslant +1. \tag{12}$$

Для нелетучей аэрозольной частицы ($\alpha = 0$) межфазная граница раздела непроницаема для газовых молекул: на поверхности сферы $r = 1$ нормальные составляющие скоростей газообразной среды и конденсированной фазы обращаются в нуль.

Определение скорости термофореза

Решения уравнений (1)–(4) имеют общий вид [2]

$$\begin{matrix}\Psi \\ \Psi'\end{matrix}(r,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}A_n \\ A'_n\end{matrix}\,r^n + \begin{matrix}B_n \\ B'_n\end{matrix}\,r^{-n+1} + \begin{matrix}C_n \\ C'_n\end{matrix}\,r^{n+2} + \begin{matrix}D_n \\ D'_n\end{matrix}\,r^{-n+3}\right\}J_n(\xi),$$

$$\begin{matrix}p \\ p'\end{matrix}(r,\xi) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}(2n+3)\begin{matrix}C_{n+1} \\ C'_{n+1}\end{matrix}\,r^n + \frac{1}{n+1}(2n-1)\begin{matrix}D_{n+1} \\ D'_{n+1}\end{matrix}\,r^{-n-1}\right\}P_n(\xi),$$

$$T(r,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{G_n r^n + H_n r^{-n-1}\right\}P_n(\xi),$$

$$T'(r,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{G'_n r^n + H'_n r^{-n-1}\right\}P_n(\xi),$$

$$C(r,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\{K_n r^n + L_n r^{-n-1}\}P_n(\xi).$$

Тогда в силу условий на бесконечности с учетом конечности скорости, давления и температуры в центре капли граничные условия (6)–(13) применяют разложения

$$v_r(r,\xi) = P_1(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty}\{B_{n+1}r^{-n-2} + D_{n+1}r^{-n}\}P_n(\xi),$$

$$v_\Theta(r,\xi) = -2\,\frac{J_2(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n-1)B_n r^{-n-1} + (n-3)D_n r^{-n+1}\right\}\frac{J_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

$$v'_r(r,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty}\{A'_{n+1}r^{n-1} + C'_{n+1}r^{n+1}\}P_n(\xi),$$

$$v'_\Theta(r,\xi) = \sum_{n=2}^{\infty}\{nA'_n r^{n-2} + (n+2)C'_n r^n\}\frac{J_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

$$p(r,\xi) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(2n-1)D_{n+1}r^{-n-1}P_n(\xi),$$

$$p'(r,\xi) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2n+3)C'_{n+1}r^n P_n(\xi),$$

$$T(r,\xi) = r\xi + \sum_{n=0}^{\infty}H_n r^{-n-1}P_n(\xi),$$

$$T'(r,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}G'_n r^n P_n(\xi),$$

$$C(r,\xi) = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty}L_n r^{-n-1}P_n(\xi).$$

Свойства (П1), (П2) и условия ортогональности типа (П3), (П4) для ультрасферических полиномов Гегенбауэра порядка n и степени ± 0.5

$$J_n(\xi) = C_n^{-\frac{1}{2}}(\xi), \quad P_n(\xi) = C_n^{+\frac{1}{2}}(\xi)$$

дают следующие алгебраические уравнения ($n \leqslant 2$):

$$C_s(\tau) - C_0 + \left.\frac{\partial C_s}{\partial T'}\right|_{T'=\tau}(G'_0 - \tau) - L_0 = 0, \tag{6a}$$

$$-\left\{C_0 + (1-C_0)\frac{m_2}{m_1}\right\}U(-1 + B_2 + D_2) = \alpha v\left\{\left.\frac{\partial C_s}{\partial T'}\right|_{T'=\tau}G'_1 - L_1\right\}; \tag{6b}$$

$$-\left\{C_0 + (1-C_0)\frac{m_2}{m_1}\right\}U(B_{n+1} + D_{n+1}) = \alpha v\left\{\left.\frac{\partial C_s}{\partial T'}\right|_{T'=\tau}G'_n - L_n\right\}; \tag{6c}$$

$$-L_0 - \varepsilon K_{TD} H_0 = 0, \tag{7a}$$

$$-(1-C_0)\left\{C_0 + (1-C_0)\frac{m_2}{m_1}\right\} U(-1 + B_2 + D_2)$$
$$-\frac{D}{R}\left\{2L_1 + \varepsilon K_{TD}(1 + 2H_1)\right\} = 0, \tag{7b}$$

$$-(1-C_0)\left\{C_0 + (1-C_0)\frac{m_2}{m_1}\right\} U(B_{n+1} + D_{n+1})$$
$$-(n+1)\frac{D}{R}\{L_n + \varepsilon K_{TD} H_n\} = 0, \tag{7c}$$

$$-U(A'_2 + C'_2) = \alpha\nu\,\frac{n_0}{n'_0}\left\{\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} G'_1 - L_1\right\}, \tag{8a}$$

$$-U(A'_{n+1} + C'_{n+1}) = \alpha\nu\,\frac{n_0}{n'_0}\left\{\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} G'_n - L_n\right\}, \tag{8b}$$

$$U(2 + B_2 - D_2 + 2A'_2 + 4C'_2)$$
$$= 2K_{TSL}\,\frac{\eta_0}{\rho_0 T_0} A_T(1 + H_1) + 2K_{DSL}\,\frac{D}{R} L_1, \tag{9a}$$

$$U\big\{-nB_{n+1} - (n-2)D_{n+1} - (n+1)A'_{n+1} - (n+3)C'_{n+1}\big\}$$
$$= -K_{TSL}\,\frac{\eta_0}{\rho_0 T_0} A_T n(n+1)H_n - K_{DSL}\,\frac{D}{R} n(n+1)L_n, \tag{9b}$$

$$-(p_0 - p'_0) - \frac{2}{R}\left\{\sigma(\tau) + \frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}(G'_0 - \tau)\right\} = 0, \tag{10a}$$

$$3\eta_0 U(2B_2 + D_2) - 6\eta'_0 U C'_2 - 2\,\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} G'_1 = 0, \tag{10b}$$

$$2\eta_0 U\left\{(n+2)B_{n+1} + \frac{n^2 + 3n - 1}{n+1} D_{n+1}\right\}$$
$$+ 2\eta'_0 U\left\{(n-1)A'_{n+1} + \frac{1}{n}(n^2 - n - 3)C'_{n+1}\right\}$$
$$-2\,\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} G'_n = 0, \tag{10c}$$

$$3\eta_0 U B_2 - 3\eta'_0 U C'_2 - \frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T='\tau} G'_1 = 0, \tag{11a}$$

$$2\eta_0 U\{n(n+2)B_{n+1} + (n^2 - 1)D_{n+1}\}$$
$$-2\eta'_0 U\{(n^2 - 1)A'_{n+1} + n(n+2)C'_{n+1}\}$$
$$-\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} n(n+1)G'_n = 0, \tag{11b}$$

$$H_0 = G'_0, \quad \frac{\kappa_0}{\kappa'_0} H_0 = -\frac{Lm_1\alpha\nu n_0}{A_T\kappa'_0}$$
$$\times\left\{C_s(\tau) - C_0 + \frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}(G'_0 - \tau) - L_0\right\}, \tag{12a}$$

$$1 + H_1 = G'_1, \quad \frac{\kappa_0}{\kappa'_0}(-1 + 2H_1) + G'_1$$
$$= -\frac{Lm_1\alpha\nu n_0}{A_T\kappa'_0}\left\{\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} G'_1 - L_1\right\}, \tag{12b}$$

$$H_n = G'_n, \quad \frac{\kappa_0}{\kappa'_0}(n+1)H_n + nG'_n$$
$$= -\frac{Lm_1\alpha\nu n_0}{A_T\kappa'_0}\left\{\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} G'_n - L_n\right\}. \tag{12c}$$

В данной задаче концентрационно-тепловые поля $C(\mathbf{r})$, $T(\mathbf{r})$, $T'(\mathbf{r})$ не зависят от внутреннего движения вещества капли, термокапиллярных явлений и имеют вид, который приведен в работе [1].

Решение системы уравнений (6b), (7b), (8a), (9a), (10b), (11a), (12b) приводит к выражению для скорости центра инерции газообразной среды относительно капли

$$U = 6K_{TSL}\,\frac{\eta_0}{\rho_0 T_0} A_T\left(3 + 2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\Delta'}{\Delta}$$
$$+ 6K_{DSL}\,\frac{D}{R}\left(3 + 2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\Delta''}{\Delta}$$
$$+ \frac{2}{\eta'_0}\left(3 + 2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}\frac{\Delta'}{\Delta}$$
$$+ 3\alpha\nu\left(2\,\frac{n_0}{n'_0} + \frac{1 + 2\frac{\eta_0}{\eta'_0}}{C_0 + (1-C_0)\frac{m_2}{m_1}}\right)\left(3 + 2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}$$
$$\times\left\{2\,\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\,\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} - \varepsilon K_{TD}\right\}\frac{1}{\Delta},$$
$$\Delta = \left(1 + 2\,\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\right)\left\{2 + (1-C_0)\,\frac{\alpha\nu R}{D}\right\}$$
$$+ 2\,\frac{Lm_1\alpha\nu n_0}{A_T\kappa'_0}\left\{\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} + \varepsilon K_{TD}\right\},$$
$$\Delta' = \frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\left\{2 + (1-C_0)\frac{\alpha\nu R}{D}\right\} + \varepsilon K_{TD}\,\frac{Lm_1\alpha\nu n_0}{A_T\kappa'_0},$$
$$\Delta'' = \frac{\kappa_0}{\kappa'_0}(1-C_0)\frac{\alpha\nu R}{D}\,\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}$$
$$+ \varepsilon K_{TD}\left\{\frac{Lm_1\alpha\nu n_0}{A_T\kappa'_0}\,\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau} + 1\right\}. \tag{13}$$

Средняя приведенная температура τ на поверхности летучей капли определяется из решения трансцендентного алгебраического уравнения

$$C_s(\tau) - C_0 - \frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}\tau = 0.$$

Система соотношений (6c), (7c), (8b), (9b), (10c), (11b), (12c) имеет тривиальное решение $B_{n+1} = D_{n+1} = A'_{n+1} = C'_{n+1} = H_n = G'_n = L_n = 0$ для любого $n \geqslant 2$.

Анализ результатов

В формуле (13) первый и второй члены обусловлены соответственно тепловым и диффузионным скольжением газовой среды. Третье слагаемое обусловлено переменным межфазным поверхностным натяжением на поверхности капли. Четвертый член описывает реактивную часть импульса, который действует на частицу и связан с фазовым переходом. Для твердой летучей частицы ($\eta'_0 \to \infty$) получаем результат работы [1].

Традиционная теория [3] термофореза летучей жидкой однокомпонентной сферической капли в бинарной газовой смеси без учета термодиффузионных эффектов и влияния слоя Кнудсена дает в указанных выше обозначениях формулу

$$U = 6K_{TSL}\,\frac{\eta_0}{\rho_0 T_0}\,A_T\left(3+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}(1-C_0)\frac{1}{\Omega}$$
$$+\,6K_{DSL}\,\frac{D}{R}\left(3+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}(1-C_0)\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}\frac{1}{\Omega}$$
$$+\,\frac{2}{\eta'_0}\left(3+\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}(1-C_0)\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}\frac{1}{\Omega}$$
$$+\,\frac{6}{C_0+(1-C_0)\frac{m_2}{m_1}R}\,\frac{D}{R}\left(2\,\frac{n_{10}}{n_0}+1+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)$$
$$\times\left(3+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\,\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T=\tau}\frac{1}{\Omega},$$
$$\Omega=\left(1+2\,\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\right)(1-C_0)+2\,\frac{Lm_1n_0D}{\kappa'_0A_TR}\,\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}.$$

Вывод этого выражения также производит учет на поверхности капли потока тепла, связанного с конвективным переносом испаряющейся массы.

Формула (13) является наиболее общей и в отсутствии термодиффузии при достаточно сильном диффузионном испарении вещества капли

$$C_0 \ll 1 \ll \frac{\alpha\nu R}{D}$$

совпадает с рерзультатом работы [3]. Другими словами, выражение (13) дополнительно описывает случаи слабого и умеренно сильного испарения жидкой капли в диффузионном режиме. Из формулы (13) следует, что при

$$\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}>0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}<0,\quad K_{TD}=0$$

за счет первого и четвертого членов капля стремится двигаться в более холодные области газовой среды ("положительные" факторы). Действие вклада второго слагаемого на направление скорости термофореза зависит от знака коэффициента K_{DSL}: в сторону вектора $\mathbf{A}_T$ при $m_1 > m_2$ ($K_{DSL} < 0$) и в противоположную сторону при $m_1 < m_2$ ($K_{DSL} > 0$). В силу переменного поверхностного натяжения третий член описывает термокапиллярные явления и действует в сторону роста температуры окружающей газовой среды.

Если действие термодиффузионных эффектов значительно, а скорость испарения вещества капли достаточно мала, то влияние летучести на термодиффузионные поля и скорость термофореза можно практически не учитывать [1]. В этом случае имеем

$$U \to 3K_{TSL}\,\frac{\eta_0}{\rho_0T_0}\,A_T\left(3+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{2\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}}{1+2\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}}$$
$$+\,3K_{DSL}\,\frac{D}{T_0}\,A_T\left(3+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{K_{TD}}{1+2\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}}$$
$$+\,\frac{1}{\eta'_0}\left(3+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\frac{\partial\sigma'}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}\frac{2\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}}{1+2\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}}.$$

Распределения температуры и относительной концентрации летучего компонента практически не зависят от теплопроводности газовой среды, если капля является высокотеплопроводной [1].

Представляет интерес исследование зависимости $U = U(\alpha)$. После промежуточных вычислений получаем

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha}=-\,2\nu\left(3+2\,\frac{\eta_0}{\eta'_0}\right)^{-1}\Phi(\kappa_0,\kappa'_0)$$
$$\times\left\{2\,\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\,\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}-\varepsilon K_{TD}\right\}\frac{1}{\Delta^2},$$

$$\Phi(\kappa_0,\kappa'_0)=6K_{TSL}\,\frac{\eta_0}{\rho_0T_0}\,\frac{Lm_1n_0}{\kappa'_0}$$
$$-\,3K_{DSL}\left\{(1-C_0)\left(1+2\,\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\right)+2K_{TD}\,\frac{Lm_1n_0D}{T_0\kappa'_0}\right\}$$
$$-\,3\left(2\,\frac{n_0}{n'_0}+\frac{1+2\frac{\eta_0}{\eta'_0}}{C_0+(1-C_0)\frac{m_2}{m_1}}\right)\left(1+2\,\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\right)$$
$$+\,\frac{2}{\eta'_0}\,\frac{\partial\sigma}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}\frac{Lm_1n_0}{A_T\kappa'_0}.$$

Зависимость $U(\alpha)$ имеет монотонный характер (убывающий или возрастающий). Скорость термофоретического переноса не зависит от коэффициента испарения, если справедливы следующие соотношения:

$$\Phi(\kappa_0,\kappa'_0)=0,\quad 2\,\frac{\kappa_0}{\kappa'_0}\,\frac{\partial C_s}{\partial T'}\bigg|_{T'=\tau}-\varepsilon K_{TD}=0$$

между физическими величинами, которые характеризуют состояние сред вне и внутри высоковязкой капли. Первое условие выполняется для низкотеплопроводных, а второе равенство — для высокотеплопроводных аэрозольных частиц.

Численный анализ показывает, что при слабом диффузионном испарении водяной капли скорость термофореза очень сильно зависит от коэффициента $\alpha < 0.05$. При обычных температурах летучесть воды увеличивает скорость термофоретического движения в 2–3 раза и доминируют термокапиллярные эффекты.

Приложение

$$\frac{dJ_n(\xi)}{d\xi} = -P_{n-1}(\xi), \quad n \geqslant 1, \tag{П1}$$

$$(1-\xi^2)\,\frac{dP_n(\xi)}{d\xi} = n(n+1)J_{n+1}(\xi), \quad n \geqslant 0, \tag{П2}$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{J_m(\xi)J_n(\xi)}{1-\xi^2} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{n(n-1)(2n-1)}, & m = n, \end{cases}$$

$$m \neq 0;1, \quad n \neq 0;1, \tag{П3}$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_m(\xi)P_n(\xi)d\xi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{П4}$$

Список литературы

[1] *Дьяконов С.Н., Котлярова Л.В., Яламов Ю.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 3. С. 24–31.

[2] *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics. Pretice Hall, 1965. (Хаппель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числа Рейнольдса. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 632 с.)

[3] *Яламов Ю.И., Чермошенцев А.В.* Деп. в ВИНИТИ. № 1555-В. М.: МОПИ, 1990. 14 с.