01;03

О взаимодействии заряженной капли с внешним акустическим полем

© А.И. Григорьев, А.Р. Гаибов, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 апреля 2001 г.)

Исследовано взаимодействие капиллярных колебаний заряженной капли с внешним акустическим полем в условиях, когда нелинейными компонентами акустического давления на поверхность капли можно пренебречь. Показано, что уравнения, описывающие временнýю эволюцию мод капиллярных волн в такой ситуации, могут быть как уравнениями Матье–Хилла, так и обыкновенными неоднородными уравнениями второго порядка, характеризующими вынужденные колебания. В обоих случаях в результате реализации неустойчивости (параметрической либо резонансной) возможен распад капли при докритическом по Рэлею собственном заряде за счет ее деформации в акустическом поле.

1. Исследование взаимодействия акустической волны с заряженной жидкой каплей представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, физике аэрозолей, физике грозового электричества, акустической левитации капель в экспериментах по получению высокочистых веществ (см., например, [1–7] и указанную там литературу). Однако некоторые вопросы, связанные с возбуждением акустическими волнами капиллярных колебаний капли, остаются малоизученными. Так, до сих пор не исследованы устойчивость заряженной капли в акустической волне и особенности передачи энергии от волны к капле в зависимости от интенсивности волны, от размера капли и ее вязкости, хотя идея о влиянии интенсивных акустических волн на дробление заряженных капель, их коагуляцию и условия выпадения дождя высказывалась [3]. Бóльшая часть проведенных ранее исследований взаимодействия капли и акустической волны связана с силовым воздействием акустического поля на каплю при ультразвуковом рассеивании туманов и облаков [1,4] или в акустических левитаторах [2,3,5–7]. Характерные для этих приложений условия взаимодействия капли и акустической волны таковы, что акустическое поле принималось весьма интенсивным. Это сузило спектр исследованных вариантов обсуждаемого взаимодействия.

2. Рассмотрим задачу о рассеянии плоской звуковой волны на капле радиуса R идеальной, несжимаемой, электропроводной жидкости, плотностью ρ_1, с коэффициентом поверхностного натяжения γ, несущей электрический заряд Q. Внешнюю среду примем идеальной, сжимаемой, с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$ и плотностью ρ_2.

Плоская звуковая волна приходит из $-\infty$ вдоль оси z и, частично рассеиваясь на жидкой капле, совершающей тепловые колебания в окрестности равновесной сферической формы, уходит на $+\infty$. Потенциал поля скоростей движения внешней среды, связанный с плоской акустической волной, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 \exp(ikz - i\omega t), \qquad (1)$$

φ_0 — амплитуда плоской акустической волны, k — волновое число, ω — частота, i — мнимая единица.

Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением границы раздела сред (поверхности капли) в сферической системе координат с началом в центре капли запишем в форме

$$r(\Theta, t) = R + \xi(\Theta, t),$$

$\xi(\Theta, t)$ — малое возмущение равновесной сферической поверхности капли, связанное с тепловым движением молекул в капле и среде; $|\xi| \ll R$; угол Θ отсчитывается от направления распространения плоской акустической волны.

Результирующие волновые движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ соответственно.

Выражение для давления акустического поля на поверхность капли имеет вид [8]

$$p = \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\rho_2}{2V^2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_2 (\operatorname{grad}\psi_2)^2, \qquad (2)$$

V — скорость звука во внешней среде.

Как отмечалось выше, в большинстве ранее проведенных исследований силового воздействия акустического поля на каплю (см., например, [2,3,5–7] и указанную там литературу) выражение для давления поля на поверхность капли усреднялось по периоду акустической волны, в результате чего линейная по ψ_2 компонента давления обращалась в нуль и весь дальнейший анализ прводился с сохранением лишь квадратичных по ψ_2 слагаемых. В более общей ситуации, имея в виду исследование взаимодействия акустической волны с капиллярными колебаниями капли, линейное по ψ_2 слагаемое нужно сохранить, принимая, что оно имеет либо нулевой, либо первый порядок по $|\xi|/R$. В нижеследующем изложении рассмотрены ситуации, когда линейное по ψ_2 слагаемое акустического давления на каплю играет определяющую роль, а квадратичные по ψ_2 слагаемые несущественны.

Пусть потенциал поля скоростей движения внешней среды $\psi_2(\mathbf{r},t)$ представим в виде

$$\psi_2(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r},t) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r},t) + \varphi^{(2)}(\mathbf{r},t), \qquad (3)$$

$\varphi^{(1)}$ — потенциал поля скоростей акустической волны, рассеянной от невозмущенной поверхности капли; $\varphi^{(2)}$ — добавка к рассеянной акустической волне, вызванная взаимодействием акустического поля с капиллярными колебаниями поверхности капли.

В решаемой задаче имеется малый параметр $|\xi|/R \ll 1$, который определяется амплитудой капиллярных колебаний капли. В зависимости от соотношения между длиной рассеваемой звуковой волны и радиусом капли, на которой происходит рассеяние, может появиться и второй малый параметр kR, связанный с особенностями рассеяния звука на теле, характерный линейный размер которого R много меньше λ — длины звуковой волны, $kR \ll 1$ (см. Приложение).

Пусть φ_0 — имеет нулевой порядок малости по $|\xi|/R$. Потенциал поля скоростей движения жидкости в капле ψ_1 является гармонической функцией и имеет первый порядок малости по $|\xi|/R$ [9]. Добавку $\varphi^{(2)}$, связанную со взаимодействием возмущения $\xi(\Theta,t)$ равновесной сферической поверхности капли с акустическим полем, естественно считать малой порядка не ниже $|\xi|/R$. Математическая формулировка обсуждаемой задачи имеет вид

$$\Delta\psi_1 = 0, \ \ \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = \Delta\psi_2, \qquad (4), (5)$$

$$r = R + \xi(\Theta,t): \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\psi_2}{\partial r}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad (7)$$

$$\Delta p - \rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\rho_2}{2V^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_2(\operatorname{grad}\psi_2)^2$$

$$+ F_q(\Theta,t) = \gamma\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}(2+\hat{L})\xi\right]; \qquad (8)$$

$$r = 0: \qquad |\psi_1| < \infty, \qquad (9)$$

Δp — перепад постоянных компонент давления в капле и среде; $F_q(\Theta,t)$ — давление электрического поля собственного заряда на поверхность капли; $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Кроме того, потребуем, чтобы на бесконечности потенциал $\psi_2(\mathbf{r},t)$ удовлетворял условию излучения Зоммерфельда [10]:

$$r \to \infty: \qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial r} - ik\psi_2 = 0\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (10)$$

Поскольку временна́я зависимость $\psi_2(\mathbf{r},t)$ имеет периодический вид $\psi_2 \sim \exp(-i\omega t)$, то уравнение (5) преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta\psi_2 + \frac{\omega^2}{V^2}\psi_2 = 0. \qquad (11)$$

Очевидно, что падающая плоская акустическая волна является решением этого уравнения. Подставляя (1) в (11), получим дисперсионное соотношение $k^2 \equiv (\omega/V)^2$.

Разложим граничные условия (6)–(8) вблизи поверхности невозмущенной капли $r = R$ по малому параметру $|\xi|/R$, ограничиваясь линейными по $|\xi|/R$ слагаемыми,

$$r = R: \qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial r} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}$$

$$+ \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\xi + \frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial r^2}\xi = \frac{\partial\psi_1}{\partial r}, \qquad (6a)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi_1}{\partial r}, \qquad (7a)$$

$$\Delta p - \rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_2\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right] + \frac{\rho_2}{2V^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2$$

$$- \frac{1}{2}\rho_2(\operatorname{grad}\psi_2)^2 + F_q(\Theta,t) = \gamma\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}(2+\hat{L})\xi\right],$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial t}\xi + \frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial r\partial t}\xi. \qquad (8a)$$

Проведем анализ задачи (1)–(5), (6a)–(8a) в нулевом и первом порядках малости по $|\xi|/R$.

3. Граничное условие (6) в нулевом по $|\xi|/R$ приближении указывает на обращение нормальной компоненты поля скоростей внешней среды на невозмущенной поверхности капли в нуль

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} = 0. \qquad (6b)$$

Это условие означает, что акустическая волна не взаимодействует с капиллярными колебаниями капли и рассеяние падающей акустической волны на капле в нулевом приближении по $|\xi|/R$ происходит как на твердом шарике. Задача рассеяния плоской волны на твердом шарике будет состоять из уравнения типа (11) с граничными условиями (6b) и (10) для потенциала ψ_2. Таким образом, для отыскания потенциала акустической волны $\varphi^{(1)}$, образовавшейся при рассеянии в нулевом по $|\xi|/R$ приближении, будем иметь задачу

$$\Delta\varphi^{(1)} + k^2\varphi^{(1)} = 0,$$

$$r \to \infty: \qquad \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} - ik\varphi^{(1)} = 0\left(\frac{1}{r}\right)$$

с граничным условием (6b) на поверхности капли. Потенциал падающей плоской волны $\varphi(\mathbf{r},t)$ уравнению Гельмгольца (11) и условию излучения (10) удовлетворяет автоматически.

Будем искать $\varphi^{(1)}$ в виде

$$\varphi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\mu)\exp(-i\omega t), \ \ \mu \equiv \cos\Theta, \qquad (12)$$

где $h_n^{(1)}(kr)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода, $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра.

Разложим плоскую волну в ряд по $P_n(\mu)$ и получим

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\varphi_0\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)j_n(kr)P_n(\mu)\exp(-i\omega t). \quad (13)$$

Здесь $j_n(kr)$ — сферическая функция Бесселя. Подставляя (12) и (13) в (6b), найдем D_n — неизвестные коэффициенты разложения (12), которое теперь примет вид

$$\varphi^{(1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\varphi_0 i^n(2n+1)(\partial j_n/\partial r)}{\partial h_n^{(1)}/\partial r}\right]_{r=R} \times h_n^{(1)}(kr)P_n(\mu)\exp(-i\omega t). \quad (14)$$

Нулевая по $|\xi|/R$ компонента динамического граничного условия определяет равновесную форму капли (см., например, [11]), которая в решаемой задаче будет сферической. Отметим, что давление акустического поля на поверхность капли (2) в нулевом приближении по $|\xi|/R$ при $kR \ll 1$ при усреднении по периоду падающей акустической волны [5–7] вклада в динамическое граничное условие (8) не дает: плоская волна (1) обращает сумму нелинейных слагаемых в (2) в нуль, остальные компоненты нелинейных слагаемых $V^{-2}(\partial\varphi^{(1)}/\partial t)^2$, $V^{-2}(\partial\varphi/\partial t)(\partial\varphi^{(1)}/\partial t) \sim (\omega/V)^2\varphi\varphi^{(1)} \equiv k^2\varphi\varphi^{(1)}$ и $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(\boldsymbol{\nabla}\varphi^{(1)})$, $(\boldsymbol{\nabla}\varphi^{(1)})^2$ будут иметь порядок малости не ниже чем $\sim (kR)^2$ (что несложно показать, раскладывая цилиндрические функции в (13), (14) и приведенные произведения производных в ряды по kR в области $kR \ll 1$).

4. В Приложении показано, что, согласно (13), (14), при $r = R$ модуль отношения амплитуд рассеянных и падающих парциальных волн $\sim (kR)^0$ для всех $n \geq 1$, но для $n = 0$ имеет величину $\sim (kR)^2$. Для снижения громоздкости нижеследующих математических выкладок в приближении $kR \ll 1$ ограничимся случаем, когда на капле рассеивается нулевая парциальная волна разложения (13), т. е. примем

$$\varphi=\varphi_0\frac{\sin(kr)}{kr}\exp(-i\omega t). \quad (13a)$$

Тогда для $\varphi^{(1)}$ из (14) получим

$$\varphi^{(1)}=-\varphi_0\left[\frac{(\partial j_0/\partial r)}{\partial h_0^{(1)}/\partial r}\right]_{r=R} h_0^{(1)}(kr)\exp(-i\omega t), \quad (14a)$$

где при $r \to R$ имеем $\varphi^{(1)} \sim (kR)^2$.

Примем для определенности, что связь между малыми параметрами kR и $|\xi|/R$ дается соотношением $(kR)^2 \sim |\xi|/R$. Тогда в первом приближении по $|\xi|/R$ будем иметь задачу (4), (11) с граничными условиями

$$r=R: \qquad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\,\xi+\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial r^2}\,\xi=\frac{\partial\psi_1}{\partial r}, \quad (6c)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\psi_1}{\partial r}, \quad (7c)$$

$$-\rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\rho_2\left[\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2V^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}\right] + F_q^{(1)}(\Theta,t)=-\gamma\frac{1}{R^2}(2+\hat{L})\xi, \quad (8c)$$

где $F_q^{(1)}(\Theta,t)$ — давление электрического поля собственного заряда в первом порядке малости по $|\xi|/R$.

Вошедшие в (8c) компоненты акустического давления при $r = R$ (второе и третье слагаемые в квадратных скобках) являются функциями только времени и потому могут быть опущены за счет переопределения потенциала поля скоростей $\psi_1(\mathbf{r},t)$ [9]. Компонента акустического давления $\sim (\boldsymbol{\nabla}\psi_2)^2$ обращается в нуль за счет условия (6b). Остальные слагаемые акустического давления имеют более высокий порядок малости по $|\xi|/R$, чем первый.

Потенциал $\varphi^{(2)}(\mathbf{r},t)$, который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца типа (11), будем искать в виде

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\mu)\exp(-i\omega t). \quad (15)$$

Исключая из рассмотрения радиальные колебания капли, невозможные в несжимаемой жидкости, и поступательное движение ее центра масс, поскольку начало системы координат по условию совпадает с центром масс [9], представим искомый потенциал поля скоростей внутри капли $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и возмущение равновесной сферической поверхности капли $\xi(\Theta,t)$ в форме разложения по полиномам Лежандра

$$\psi_1(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2}^{\infty}A_n(t)r^nP_n(\mu), \quad (16)$$

$$\xi(\theta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n(t)P_n(\mu). \quad (17)$$

Выражение для давления электрического поля собственного заряда на поверхность капли в линейном по $|\xi|/R$ приближении позаимствуем из [12]

$$F_q^{(1)}(\Theta,t)=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=2}^{\infty}a_n(t)(n-1)P_n(\mu). \quad (18)$$

Подставляя (13a), (14a), (15)–(18) в граничные условия (6c)–(8c), получим систему уравнений, определяющий временну́ю эволюцию амплитуд капиллярных осцилляций капли $a_n(t)$,

$$\frac{d^2a_n}{dt^2}+E_n\cos(\omega t)\frac{da_n}{dt}+[\omega_{n0}^2-\omega E_n\sin(\omega t)]a_n=0,$$

$$E_n\equiv \mathrm{Re}\left[\frac{\varphi_0\rho_2 n h_n^{(1)}(kR)}{\rho_1 R G_n(kR)}\big(f_{0n}(k,R)-x_{0n}(k,R)\big)\right],$$

$$G_n(kR) \equiv \mathrm{Re}\left[1 - \frac{\rho_2 n h_n^{(1)}(kR)}{\rho_1 n h_n^{(1)}(kR) - \rho_1 kR h_{n+1}^{(1)}(kR)}\right],$$

$$f_{0n}(k,R) \equiv \left[\frac{\partial^2 j_0(kr)}{\partial r^2} \Big/ \frac{\partial h_n^{(1)}(kr)}{\partial r}\right]_{r=R},$$

$$x_{0n}(k,R) \equiv \left[\frac{\partial j_0(kr)}{\partial r} \Big/ \frac{\partial h_0^{(1)}(kr)}{\partial r}\right]_{r=R}$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 h_0^{(1)}(kr)}{\partial r^2} \Big/ \frac{\partial h_n^{(1)}(kr)}{\partial r}\right]_{r=R},$$

$$\omega_{n0}^2 \equiv \frac{\gamma n(n-1)}{\rho_1 R^3 G_n(kR)}\big((n+2) - W\big),\ \ W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^3 \gamma}. \quad (19)$$

Система (19) представляет собой бесконечную систему несвязанных уравнений Матье–Хилла. С помощью подстановки

$$a_n(t) = \xi(t)\exp\left(\frac{-E_n}{2\omega}\ \sin(\omega t)\right)$$

ее можно привести к более простому виду [14]

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \left[\frac{1}{2}E_n^2\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}E_n\omega\sin(\omega t) + \omega_{n0}^2\right]\xi(t) = 0. \quad (20)$$

Для дальнейшего примем, что $(\rho_2/\rho_1) \sim 10^{-3}$, а φ_0, R и k таковы, что E_n является малой величиной $E_n \ll 1$. Тогда, опуская в (20) слагаемое $\sim E_n^2$, приведем получившееся уравнение к классической для исследования параметрических колебаний форме, удобной для анализа [13],

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_{n0}^2\big[1 - h\sin(\omega t)\big]\xi(t) = 0,$$

$$h \equiv E_n\omega/2\omega_{n0}^2 \ll 1. \quad (21)$$

Как известно [14], параметрический резонанс при внешних воздействиях на каплю имеет место, когда половина частоты внешнего воздействия ω становится достаточно близкой к одной из собственных частот капиллярных осцилляций капли ω_{n0}. Поэтому примем $\omega = 2\omega_{n0} + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll \omega_{n0}$, и, отыскивая решение уравнения (21) методом вариации произвольных постоянных, как это подробно проделано в [13], получим, что параметрический резонанс в описываемой системе на частоте ω_{n0} будет иметь место, если малая добавка ε удовлетворит системе неравенств

$$-h\omega_{n0}/2 < \varepsilon < h\omega_{n0}/2. \quad (22)$$

При этом взаимодействие акустической волны с колеблющейся каплей будет сопровождаться параметрической раскачкой капиллярных колебаний капли на частоте ω_{n0}. Если при этом собственный заряд капли близок к критическому в смысле устойчивости по Рэлею ($W \to 4$), то капля может распасться, как это описано в [15].

Согласно (22), ширина диапазона частот внешнего воздействия в окрестности $\omega = 2\omega_{n0}$, в котором реализуется параметрический резонанс, пропорциональна h, такой же порядок имеет η_n — инкремент параметрической неустойчивости [13]

$$\eta_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h\omega_{n0}}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right]^{1/2}.$$

Проведенное рассмотрение выполнено в приближении идеальной жидкости и параметрическая раскачка имеет место при сколь угодно малой амплитуде акустической волны. Если же учесть вязкость жидкости, приводящую к затуханию осцилляций капли в сжимаемой среде с декрементом [14]

$$\chi_n = \frac{\nu}{R^2}(2n+1)(n-1)G_n^{-1},$$

где ν — коэффициент кинетической вязкости, то ширина полосы частот ω (22), в которой реализуется параметрическая неустойчивость, снизится

$$-\left[\left(\frac{h\omega_{n0}}{2}\right)^2 - 4\chi_n^2\right]^{1/2} < \varepsilon < \left[\left(\frac{h\omega_{n0}}{2}\right)^2 - 4\chi_n^2\right]^{1/2}.$$

Но более существенным фактором учета вязкости реальной жидкости является то, что параметрическая раскачка капиллярных волн сможет реализоваться, только начиная с некоторого конечного (порогового) значения амплитуды звукового поля $h = h_*$ (или $\varphi_0 = \varphi_{0*}$) [13,14]

$$h_* = 4\chi_n/\omega_{n0}. \quad (23)$$

Из (23) несложно получить условие непосредственно на амплитуду акустического сигнала, при которой реализуется параметрическая неустойчивость

$$\varphi_0 \ge \varphi_{0*} = 4\,\frac{\nu\rho_1\omega_{n0}}{R\rho_2\omega}(2n+1)(n-1)$$

$$\times\left\{\mathrm{Re}\left[y_0(k,R) - \frac{1}{2}\,f_{0n}(k,R)h_n^{(1)}(kR)\right]\right\}^{-1}.$$

Из полученного соотношения следует, что в используемом приближении $kR \ll 1$ при $\rho_1/\rho_2 \gg 1$ порог по амплитуде акустической волны для реализации параметрической неустойчивости, обусловленный вязкостью жидкости, весьма высок даже при малых вязкостях.

Отметим, что в более общей ситуации, чем разобранная в данном разделе, когда рассматривается рассеяние на капле не нулевой парциальной волны, а одной из парциальных волн с более высоким номером или всей плоской волны (13), при отыскании амплитуд капиллярных осцилляций капли получается громоздкая система связанных уравнений Матье–Хилла, аналитический анализ которой затруднителен. Именно по этой причине проведенное рассмотрение ограничено случаем рассеяния нулевой парциальной волны.

5. Пусть теперь параметр $kR \sim 1$, а потенциалы φ и $\varphi^{(1)}$ имеют первый порядок малости по $|\xi|/R$, т.е. рассмотрим рассеяние акустических волн весьма малой амплитуды на капле, радиус которой сравним с длиной волны. Гидродинамический потенциал движений внешней среды в первом порядке малости по $|\xi|/R$ будет иметь вид

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r}, t).$$

Тогда в первом порядке малости по $|\xi|/R$ получим задачу (4), (9)–(11) с граничными условиями (6)–(8), взятыми на невозмущенной поверхности капли при $r = R$,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{6d}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \approx \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{7d}$$

$$-\rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + F_1(\Theta, t) = -\frac{\gamma}{R^2}(2 + \hat{L})\xi. \tag{8d}$$

Будем искать потенциал скоростей движения жидкости в капле $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ в виде (16), возмущение равновесной сферической формы капли $\xi(\Theta, t)$ в виде (17), потенциал поля скоростей рассеянной акустической волны $\varphi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в виде (12), а рассеиваемую плоскую акустическую волну представим в виде (13). Подставим теперь (12), (13), (16), (17) с учетом (18) в (6d)–(8d) и получим систему не связанных между собой неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающих временну́ю эволюцию амплитуд a_n мод капиллярных колебаний капли для $n \geq 2$,

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_{n0}^2 a_n = \omega S_n \exp(-i\omega t), \quad n \geq 2,$$

$$S_n \equiv \varphi_0 (2n+1) nk \operatorname{Re}$$
$$\times \left\{ \frac{i^{n+1} \rho_2 [h_{n+1}^{(1)}(kR) j_n(kR) - h_n^{(1)}(kR) j_{n+1}(kR)]}{G_n(kR) \rho_1 [kR h_{n+1}^{(1)}(kR) - n h_n^{(1)}(kR)]} \right\}. \tag{24}$$

Парциальные сферическике акустические волны с $n = 0$ и $n = 1$ в рассматриваемом приближении с капиллярными колебаниями капли не взаимодействуют и рассеиваются на ней, как на твердом шарике.

Общее решение уравнения (24) легко получается по стандартной методике [13]

$$a_n = C_n \exp(-i\omega_{n0} t) + \frac{\omega}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} S_n \exp(-i\omega t).$$

В резонансном случае, когда частота внешнего поля ω близка к одной из собственных частот колебаний капли ω_{n0}, примем $\omega = \omega_{n0} + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll \omega_{n0}$. Тогда решение можно представить в виде

$$a_n = \big(C_n + N_n \exp(-i\varepsilon t)\big) \exp(-i\omega_{n0} t),$$

$$N_n \equiv \frac{\omega}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} S_n.$$

Величина, стоящая в скобках, мало меняется за период вследствие малости ε и вблизи резонанса происходят колебания с переменной амплитудой. Обозначив последнюю за $L_n(t)$, получим

$$a_n = L_n(t) \exp(i\omega_{n0} t),$$

$$L_n(t) = \big|C_n + N_n \exp(i\varepsilon t)\big|$$
$$= \sqrt{C_n^2 + N_n^2 + 2C_n N_n \cos^2(\varepsilon t)}.$$

Константа C_n определяется амплитудой n-й моды собственных колебаний капли в начальный момент времени.

Из полученных выражений видно, что при приближении частоты падающей акустической волны к собственной частоте n-й моды свободных колебаний капли (при $\varepsilon \to 0$) амплитуда этой моды неограниченно растет, периодически изменяясь во времени с частотой ε. Неограниченность амплитудного роста связана с тем, что в исходной модели не учтено влияния диссипации энергии колебаний. В реальной физической ситуации вязкость жидкости ограничит рост амплитуды.

Учесть влияние вязкости жидкости в приближении малой вязкости можно, добавив в (24) член, зависящий от скорости [9,13],

$$F_T = 2\frac{\nu}{R^2}(2n+1)(n-1)G_n^{-1}\frac{da}{dt}.$$

Проведя анализ получившегося уравнения вынужденных затухающих колебаний капли, как это, например, сделано в [13], несложно найти, что амплитуда вынужденных капиллярных колебаний при учете вязкости уже не обращается в бесконечность, как это было в случае колебаний невязкой жидкости, а стремится к значению

$$a_n^* = \frac{\omega S_n}{2\omega_{n0}\chi_n}, \quad \chi_n = \frac{\nu}{R^2}(2n+1)(n-1)G_n^{-4},$$

которое определяет амплитуду установившихся колебаний при резонансе. Легко видеть, что установившаяся амплитуда порядка амплитуды акустической волны $\varphi_0 \chi_n^{-1}$ (так как $S_n \sim \varphi_0 \sim |\xi|/R$). Иными словами, по сравнению с тепловыми осцилляциями капли амплитуда вынужденных колебаний будет больше в χ_n^{-1} раз. Это означает, что при $\chi_n \ll 1$ капля может претерпеть неустойчивость и в ситуации, когда ее заряд немного ниже рэлеевского предела за счет значительной деформации [16].

Заключение

Внешнее акустическое поле спсобно приводить к появлению стационарных колебаний поверхности капли, как вынужденных, так и параметрических, амплитуда которых определяется внутренними параметрами капли:

зарядом, радиусом, коэффициентом поверхностного натяжения, вязкостью, а также амплитудой и частотой акустического поля. При некоторых соотношениях между частотой акустической волны и одной из собственных частот капли наблюдается резонансный рост амплитуды колебаний соответствующей моды капиллярных колебаний капли. При достаточно большой амплитуде осцилляций поверхность капли может стать неустойчивой по отношению к собственному заряду уже при докритических значениях параметров Рэлея W.

Приложение

Оценка интенсивности рассеянной на капле акустической волны по сравнению с интенсивностью падающей волны

1. Принимая, что радиус капли R много меньше λ — длины падающей на каплю акустической волны, получим, что безразмерный аргумент сферических цилиндрических функций мал $kR \ll 1$. В этой связи для более корректного разложения гидродинамической части задачи о взаимодействии акустической волны с капиллярными колебаниями капли по степеням малости целесообразно сравнить по степени малости интенсивность падающей на каплю акустической волны с интенсивнсотью волны рассеянной. Согласно (13), (14), соотношение между амплитудами парциальных волн при $r = R$ определится выражением

$$B_n \equiv \left| \frac{\partial j_n(kR)/\partial(kR)}{\partial h_n^{(1)}(kR)/\partial(kR)} \right| \left| \frac{h_n^{(1)}(kR)}{j_n(kR)} \right|. \qquad (1\text{П})$$

Чтобы оценить величину B_n, воспользуемся рекуррентным соотношением для производных от сферических цилиндрических функций, справедливым как для j_n, так и для $h_n^{(1)}$ [17],

$$\frac{d}{dz} f_n(z) = f_{n+1}(z) + \frac{n}{z} f_n(z), \qquad (2\text{П})$$

где $f_n(z)$ обозначена функция $j_n(z)$ или $h_n^{(1)}(z)$.

Учтем теперь, что $kR \ll 1$, и воспользуемся асимптотическим представлением для сферических цилиндрических функций при малом значении аргумента [17]

$$z \to 0: \quad j_n(z) \to \frac{z^n}{(2n+1)!!}, \qquad (3\text{П})$$

$$h_n^{(1)}(z) \to \frac{z^n}{(2n+1)!!} - i\,\frac{(2n-1)!!}{z^{n+1}}, \qquad (4\text{П})$$

$$(2n+1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1); \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Подставляя (3П), (4П) с учетом (2П) в (1П), несложно найти, что при малых kR отношение амплитуд B_n минимально при $n = 0$, когда $B_0 \sim (kR)^2$. При $n \geq 1$ $B_n \sim (kR)^0$. Полученные соотношения и определяют при $r = R$ порядок малости по kR рассеянной акустической волны по сравнению с падающей.

2. Для оценки порядка малости параметра kR отметим, что в задачах рассеяния акустических волн в жидкокапельных системах естественного происхождения характерный размер капель R изменяется от единиц микрометров (для тумана) до единиц миллиметров (для дождевых капель), тогда как длины рассеиваемых волн изменяются от долей миллиметра до десятка метров [1,4]. Это означает, что диапазон возможного изменения параметра kR в различных конкретных задачах лежит в пределах от 10^{-5} до 10^2.

В задаче исследования взаимодействия акустических волн с капиллярными колебаниями капель существенную роль играет малый параметр $|\xi|/R$, характеризующий амплитуду капиллярных колебаний капли. Принимая, что амплитуда тепловых колебаний капли определяется соотношением

$$\xi \sim (kT/\gamma)^{1/2},$$

где k — постояннняа Больцмана, T — температура жидкости, несложно получить $\xi \sim 10^{-8}$ cm. Тогда в обсуждаемом круге задач параметр $|\xi|/R$ изменяется от 10^{-7} до 10^{-5}.

Таким образом, параметры kR и $|\xi|/R$ могут иметь как один порядок малости, так и существенно различные порядки величины, что необходимо учитывать при корректной математической постановке задач исследования взаимодействия акустического поля с капиллярными колебаниями капель.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № 00-15-9925.

Список литературы

[1] *Грин Х., Лейн В.* Аэрозоли–пыли, дымы и туманы. Л.: Химия, 1969. 427 с.

[2] *Marston Ph.L.* // J. Acoust. Soc. Am. 1980. Vol. 67. N 1. P. 15–26.

[3] *Foster M.P., Pflaum J.C.* // J. Geophys. Res. 1988. Vol. D93. N 1. P. 747–758.

[4] *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 463 с.

[5] *Lee C.P., Anilkumar A.V., Wang T.G.* // Phys. Fluids. 1991. Vol. 3. N 11. P. 2497–2515.

[6] *Trinh E.H., Holt R.G., Thiessen D.B.* // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8. N 1. P. 43–61.

[7] *Feng Z.C., Su Y.H.* // Phys. Fluids. 1997. Vol. 9. N 3. P. 2497–2515.

[8] *King L.V.* // Proc. Roy. Soc. (London). 1934. Vol. A147. P. 212–216.

[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1953. 788 с.

[10] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951. 659 с.

[11] *Григорьева А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.

[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 1–10.

[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.
[14] *Григорьев А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50–56.
[15] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
[16] *Коромыслов В.А., Рахманова Ю.Д., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 23. Вып. 14. С. 40–43.
[17] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.