01

К решению задачи Я.И. Френкеля об адекватных стационарных токах в шаре

© Р.З. Муратов

Московский государственный горный университет,
117935 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 16 июля 2001 г.)

Применительно к двум концентрическим шаровым областям рассмотрена задача Я.И. Френкеля о замене заданной в одной из них объемной системы стационарных токов адекватной (т.е. создающей такое же внешнее магнитное поле) системой токов, распределенной по поверхности второй области. Описан метод мультипольных моментов, обеспечивающий прямое (без вычисления полей) решение задачи. В качестве примера разобран случай токов, декартовы компоненты плотностей которых являются кубическими полиномами декартовых координат.

Введение

Адекватными, или эквивалентными, называют неодинаковые системы источников, которые, занимая ограниченную часть пространства, создают в его внешней области одинаковые поля. Адекватными могут быть распределения гравитационных масс, распределения электрических зарядов и, наконец, распределения стационарных электрических токов. Особенность последнего случая заключена в векторной природе источников.

Широко известно, что равномерно по объему заряженный шар и концентрическая с ним равномерно заряженная сфера произвольного радиуса создают одинаковые внешние электростатические поля, совпадающие с полем расположенного в центре точечного заряда, при условии, что во всех трех случаях речь идет об одном и том же полном заряде. Это пример адекватных скалярных источников. Столь же простого примера для магнитостатического поля не существует, поскольку в природе нет самих магнитных зарядов.

Проблема отыскания распределений источников, адекватных их некоторому заданному распределению, не является новой. Для скалярных источников (зарядов) ее теоретическая постановка и принципиальное обсуждение общих результатов даны в [1, с. 103; 2, с. 524]. Следует отметить, что в общей постановке задача об адекватных источниках имеет бесконечное множество решений, что видно и из вышеприведенного примера. Практический интерес представляет такая постановка задачи, в которой по заданному в некотором объеме V (или на некоторой замкнутой поверхности S) распределению источников отыскивается адекватное распределение источников на иной заданной поверхности S. При этом обеспечивается единственность решения. Метод и результаты решения такого рода конкретных скалярных задач для эллипсоидальных областей пространства даны в [3,4]. Что касается векторной задачи об адекватных стационарных токах, то автору не встречался в литературе какой-либо пример ее конкретного рассмотрения. Между тем решение такой задачи полезно и для уточнения модели геомагнитного динамо, и для оценки токовых наводок на сверхпроводящих экранах, и для ответа на некоторые иные вопросы практической магнитостатики.

В данной работе предлагается решение простейшей задачи об адекватных стационарных токах, в которой "первичные" токи заданы в объеме некоторого шара радиуса a, а на концентрической сфере радиуса R требуется найти адекватные токи. Задача рассматривается не в сферических, а в декартовых координатах, дабы в дальнейшем распространить используемую здесь "технологию" на геометрически более общие задачи. Решение задачи применительно к первичному току, декартовы компоненты плотности которого заданы как полиномиальные функции декартовых координат, достигается методом мультипольных моментов, который, как и в случае скалярных источников, позволяет избежать громоздкой процедуры вычисления полей.

Метод мультипольных моментов

Как известно, в односвязной области пространства, внешней по отношению к стационарным электрическим токам, можно оперировать с псевдоскалярным потенциалом их магнитного поля (далее именуемым магнитным потенциалом) и его мультипольным разложением [5]

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!} m_{i_1\ldots i_l} \nabla_{i_1} \ldots \nabla_{i_l} \frac{1}{r}. \qquad (1)$$

Входящие в (1) величины $m_{i_1\ldots i_l}$ суть компоненты тензора l-го ранга, образующие в совокупности магнитный мультипольный момент l-го порядка. В дальнейшем нам необходимо различать магнитные мультиполи $m^{(\mathbf{j})}_{i_1\ldots i_l}$ объемных токов, характеризуемых плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, и магнитные мультиполи $m^{(\mathbf{i})}_{i_1\ldots i_l}$ поверхностных токов, характеризуемых поверхностной плотностью $\mathbf{i}(\mathbf{r})$. Эти мультипольные моменты даются формулами

$$m^{(\mathbf{j})}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)c} \int [\mathbf{r}\,\mathbf{j}] \nabla_{i_1\ldots i_l}\, dV, \qquad (2)$$

$$m^{(\mathbf{i})}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)c} \oint [\mathbf{r}\,\mathbf{i}] \nabla_{i_1\ldots i_l}\, dS. \qquad (3)$$

Выражения (2) и (3) содержат неприводимый симметричный тензор $d_{i_1 \dots i_l}(\mathbf{r})$, который определяется как произведение компонент введенного в работе [6] векторного оператора

$$\hat{\mathbf{D}} = 2\mathbf{r}(\mathbf{r}\,\nabla) - r^2\nabla + \mathbf{r}, \tag{4}$$

действующее на единицу, т. е.

$$d_{i_1 \dots i_l}(\mathbf{r}) = \hat{D}_{i_i} \dots \hat{D}_{i_l} \cdot 1. \tag{5}$$

В частности, $d_x = x$; $d_{xx} = 2x^2 - y^2 - z^2$, $d_{xy} = 3xy$; $d_{xyy} = 3x(4y^2 - x^2 - z^2)$, $d_{xyz} = 15xyz$, так что[1]

$$m_x = \frac{1}{2c}\int (y\,j_z - z\,j_y)\,dV; \tag{6}$$

$$m_{xx} = \frac{2}{c}\int x(y\,j_z - z\,j_y)\,dV, \tag{7}$$

$$m_{xy} = \frac{1}{c}\int \left\{xz\,j_x - yz\,j_y + (y^2 - x^2)\,j_z\right\}dV; \tag{8}$$

$$m_{xyy} = \frac{3}{4c}\int \Big\{10xyz\,j_x + (x^2 + z^2 - 4y^2)z\,j_y + (4y^2 - 11x^2 - z^2)y\,j_z\Big\}\,dV, \tag{9}$$

$$m_{xyz} = \frac{15}{4c}\int \Big\{(z^2 - y^2)x\,j_x + (x^2 - z^2)y\,j_y + (y^2 - x^2)z\,j_z\Big\}\,dV. \tag{10}$$

Отметим, что благодаря специальной "нормировке" [5] магнитных моментов разложение (1) полностью аналогично мультипольному разложению электростатического потенциала за одним исключением: в сумме (1) отсутствует слагаемое, соответствующее $l = 0$ (магнитному заряду).

Для наших целей существенны следующие два хорошо известных свойства разложения (1). Во-первых, оно универсально, т. е. пригодно к совершенно произвольным распределениям токов, лишь бы они занимали ограниченную область пространства. В частности, оно не зависит от того, какие (объемные или поверхностные) токи создают магнитное поле. Значит, если у различных токовых систем совпадают между собой все характеризующие их соответствующие мультипольные моменты, то эти системы адекватны. При этом формально речь всегда идет о совпадении бесконечного числа компонент магнитных мультиполей, поскольку ряд (1) бесконечный.

Второе свойство мультипольного разложения позволяет воспользоваться указанной универсальностью, причем как раз для рассматриваемого здесь геометрического случая. Именно, если область, занятая токами, представляет собой шар или его поверхность, а компоненты плотности тока (объемного или поверхностного) являются полиномиальными (степени $L > 0$) функциями декартовых координат, то сумма (1) содержит конечное число слагаемых, так как все магнитные мультиполи $(L+1)$-го и более высокого порядка обращаются в нуль. При этом предполагается, что начало координат выбрано в центре шара.

Теперь об общей постановке и методе решения задачи. Пусть в объеме шара радиуса a задан электрический ток, декартовы компоненты плотности которого являются полиномами степени[2] L

$$j_x = \sum_{1 \le l+m+n \le L} A_{lmn} x^l y^m z^n, \quad j_y = \sum_{1 \le l+m+n \le L} B_{lmn} x^l y^m z^n,$$

$$j_z = \sum_{1 \le l+m+n \le L} C_{lmn} x^l y^m z^n. \tag{11}$$

Входящие в (11) коэффициенты A, B, C заданных полиномов связаны соотношениями, вытекающими из условия стационарности тока

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{12}$$

и краевого условия на границе шара

$$j_n\big|_S = 0. \tag{13}$$

Требуется найти адекватный ток (11) поверхностный ток на концентрической с шаром сфере радиуса R. Схема решения заключается в следующем. Сначала вычисляются все независимые компоненты магнитных мультиполей $m^{(\mathbf{j})}_{i_1 \dots i_l}$, ранг которых заключен в диапазоне $1 \le l \le L$. Общее число таких компонент равно

$$N_L^{(M)} = \sum_{l=1}^{L}(2l+1) = L(L+2). \tag{14}$$

Как уже указывалось, любая декартова компонента подлежащего нахождению адекватного поверхностного тока также должна быть полиномом степени L. Напомним, что под степенью полинома, рассматриваемого на поверхности шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{15}$$

понимается степень полинома, получающегося из исходного в результате исключения на основе (15) четных степеней какой-либо из декартовых координат (например, z) и последующего приведения подобных членов. Эти полиномы можно записывать в различных эквивалентных формах (подробнее см. [3]). Здесь мы будем записывать их в симметричном (сохраняющем равноправие декартовых направлений) виде

$$i_x = \sum_{l=L}^{L}\sum_{i+j+k=l} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k, \quad j_y = \sum_{l=L}^{L}\sum_{i+j+k=l} \beta_{ijk} x^i y^j z^k,$$

$$j_z = \sum_{l=L}^{L}\sum_{i+j+k=l} \gamma_{ijk} x^i y^j z^k. \tag{16}$$

[1] Здесь и далее всякий раз, когда встречается несколько соотношений (уравнений), получающихся друг из друга циклической перестановкой или взаимной заменой координат, мы выписываем только одно соотношение (уравнение). При этом следует иметь в виду, что при взаимной замене координат псевдовеличины изменяют знак на противоположный.

[2] В записи полиномов (11) учтено, что свободные коэффициенты, соответствующие слагаемым с $x^0y^0z^0$, равны нулю.

Таким образом, каждая компонента поверхностного тока есть сумма однородных полиномов $(L-1)$-й и L-й степеней, коэффициенты которых подлежат нахождению. Поскольку число коэффициентов $N_L^{(H)}$ однородного полинома степени L равно

$$N_L^{(H)} = \frac{1}{2}(L+1)(L+2),$$

то число коэффициентов в каждом из полиномов (16)

$$N^{(L)} = N_L^{(H)} + N_{L-1}^{(H)} = (L+1)^2, \qquad (17)$$

а их общее число во всех трех полиномах (16), дающее число неизвестных в нашей задаче, есть

$$N = 3N^{(L)} = 3(L+1)^2. \qquad (18)$$

В частности, при $L = 3$ количество неизвестных равно 48, в то время как в аналогичной задаче о скалярных источниках в шаре неизвестных втрое меньше.

Подсчитаем теперь число линейных алгебраических уравнений, имеющихся в нашем распоряжении для нахождения коэффициентов полиномов (16). Прежде всего сюда входят неоднородные уравнения, возникающие в результате приравнивания одинаковых независимых компонент тензоров магнитных мультиполей (от первого до L-го рангов), создаваемых токами (11) и (16). Поскольку всякий симметричный неприводимый тензор l-го ранга, каковым является и тензор магнитного мультиполя того же ранга, имеет $2l+1$ независимых компонент, то число получаемых неоднородных уравнений оказывается равным

$$N_L^{(M)} = \sum_{l=1}^{L}(2l+1) = (L+1)^2 - 1. \qquad (19)$$

Условие обращения в нуль на поверхности шара (15) нормальной компоненты плотности поверхностного тока

$$i_n\big|_{\bar S} = (\mathbf{r}\,\mathbf{i})\big|_{\bar S} = x i_x + y i_y + z i_z = 0, \qquad (20)$$

увеличивая на единицу, как видно из (20), степень характеризующих ток полиномов, добавляет к (19)

$$N_{\bar S} = N^{(L=1)} = (L+2)^2 \qquad (21)$$

однородных уравнений.

Условие стационарности поверхностного тока

$$\operatorname{div}\mathbf{i} = 0 \qquad (22)$$

понижает на единицу степень полинома, добавляя еще

$$N_{\text{div}} = N^{(L-1)} = L^2 \qquad (23)$$

однородных уравнений для коэффициентов.

Таким образом, число уравнений $N_L^{(M)} + N_{\bar S} + N_{\text{div}}$ всегда на единицу превышает число неизвестных N: можно показать, что одно из однородных уравнений является линейной комбинацией остальных.

Пример адекватных токов

Для иллюстрации метода обратимся к случаю, когда компоненты токов (11) и (16) являются кубическими полиномами. Как уже указывалось, этому случаю, вообще говоря, соответствует 48 подлежащих нахождению неизвестных коэффициентов полиномов (16). К счастью, как и в аналогичной задаче со скалярными источниками [3], решение существенно упрощается, поскольку возникающая система 48 линейных алгебраических уравнений фактически расщепляется на восемь самостоятельных подсистем. К тому же, как и в задаче со скалярными источниками, благодаря симметрии (обеспечивающей равноправие декартовых направлений) достаточно найти аналитические решения лишь четырех подсистем, получая остальные с помощью циклической перестановки в уже найденных решениях.

В соответствии со сказанным выше, для решения задачи вместо рассмотрения всех пятнадцати независимых компонент магнитных мультиполей $\mathbf{m}$, m_{ij}, m_{ijk} можно ограничиться, например, следующими: 1) m_x, m_{xyy}, m_{xzz}; 2) m_{xx}, m_{yy}; 3) m_{xy}; 4) m_{xyz}. Эти компоненты разбиты на четыре группы, рассмотрение каждой из которых приводит к самостоятельной подсистеме уравнений для входящих в них коэффициентов "токовых" полиномов.

Так, приравнивая компоненты $m_x^{(\mathbf{i})}$, $m_{xyy}^{(\mathbf{i})}$, $m_{xzz}^{(\mathbf{i})}$, вычисленные по формулам[3] (6) и (9), соответствующим компонентам объемных токов $m_x^{(\mathbf{j})}$, $m_{xyy}^{(\mathbf{j})}$, $m_{xzz}^{(\mathbf{j})}$, и добавляя к полученным неоднородным уравнениям требуемые однородные уравнения, вытекающие из (20) и (22), получаем следующую замкнутую подсистему семи (см. сноску [2]) уравнений:

$$3\gamma_{030} + \gamma_{210} + \gamma_{012} - 3\beta_{003} - \beta_{021} - \beta_{201} = \frac{15c}{2\pi R^6}\, m_x^{(\mathbf{j})},$$

$$5\alpha_{111} + 3\beta_{003} - 4\beta_{021} + \beta_{201} + 12\gamma_{030} - 11\gamma_{210} - \gamma_{012} = \frac{35c}{2\pi R^8}\, m_{xyy}^{(\mathbf{j})},$$

$$\alpha_{111} + 2\beta_{021} + 2\gamma_{012} = 0, \qquad \alpha_{111} + \beta_{201} + \gamma_{210} = 0,$$

$$\beta_{003} + \gamma_{012} = 0.$$

Здесь

$$m_x^{(\mathbf{j})} = \frac{2\pi}{15c}\, a^5 \Big\{ C_{010} - B_{001} - \frac{1}{7}\, a^2 \big(B_{201} - C_{210} + 4B_{021} - 4C_{012} \big) \Big\}, \qquad (24)$$

$$m_{xyy}^{(\mathbf{j})} = \frac{8\pi}{315c}\, a^9 \big(4B_{201} - 14B_{021} + C_{210} - 11C_{012} \big). \qquad (25)$$

Выражения (24), (25) — результат интегрирования по формулам (6), (9) и последующего упрощения с

[3] В них $\mathbf{j}\,dV$ заменено на $\mathbf{i}\,dS$.

использованием вытекающих из (12) и (13) соотношений между коэффициентами A, B и C

$$A_{111} + 2B_{021} + 2C_{012} = 0,$$

$$A_{111} + B_{201} - B_{003} + C_{201} - C_{012} = 0,$$

$$B_{021} - B_{003} + C_{030} - C_{012} = 0,$$

$$B_{001} + a^2 B_{003} + C_{010} + a^2 C_{012} = 0.$$

Решение первой подсистемы уравнений (для неизвестных α_{111}, β_{201}, β_{021}, β_{003}, γ_{210}, γ_{030} и γ_{012}) имеет следующий вид:

$$\alpha_{111} = \frac{7c}{12\pi R^8}\left(m^{(\mathrm{j})}_{xyy} - m^{(\mathrm{j})}_{xzz}\right), \qquad (26)$$

$$\gamma_{030} = -\beta_{021} = \frac{c}{4\pi R^6}\left(3m^{(\mathrm{j})}_x + \frac{7}{6R^2}\, m^{(\mathrm{j})}_{xyy}\right), \qquad (27)$$

$$\gamma_{210} = \frac{c}{4\pi R^6}\left(3m^{(\mathrm{j})}_x + \frac{7}{2R^2}\, m^{(\mathrm{j})}_{xyy} - \frac{7}{6R^2}\, m^{(\mathrm{j})}_{xzz}\right). \qquad (28)$$

Совершенно аналогично приравнивание вычисленных с помощью (7) соответствующих квадрупольных компонент $m^{(\mathrm{i})}_{xx}$, $m^{(\mathrm{i})}_{yy}$ и $m^{(\mathrm{j})}_{xx}$, $m^{(\mathrm{j})}_{yy}$ наряду с использованием (20) и (22) приводит к трем уравнениям, составляющим вторую подсистему,

$$\gamma_{110} - \beta_{101} = \frac{15c}{8\pi R^6}\, m^{(\mathrm{j})}_{xx}, \quad \langle \alpha_{011} \rangle = 0,$$

где в соответствии с (7)

$$m^{(\mathrm{j})}_{xx} = \frac{8\pi}{105c}\, a^7 (C_{110} - B_{101}), \qquad (29)$$

причем $\langle A_{011} \rangle = 0$. Здесь и всюду далее угловыми скобками $\langle \ldots \rangle$ обозначена сумма трех членов циклической перестановки.

Решение второй подсистемы уравнений (для неизвестных α_{011}, β_{101} и γ_{110}) имеет следующий вид:

$$\alpha_{011} = \frac{5c}{8\pi R^6}\left(m^{(\mathrm{j})}_{xx} + 2m^{(\mathrm{j})}_{yy}\right) = \frac{a^7}{7R^6}\, A_{011}. \qquad (30)$$

Приравнивание квадрупольных моментов $m^{(\mathrm{i})}_{xy}$ и $m^{(\mathrm{j})}_{xy}$ дает значение коэффициента γ_{002} и приводит к третьей подсистеме из четырех уравнений для остальных неизвестных коэффициентов α_{101}, β_{011}, γ_{200} и γ_{020}

$$\alpha_{101} - \beta_{011} - 2\gamma_{200} + 2\gamma_{020} = \frac{15c}{4\pi R^6}\, m^{(\mathrm{j})}_{xy},$$

$$\alpha_{101} + \gamma_{200} = 0, \qquad \alpha_{101} + \beta_{011} = 0,$$

где

$$m^{(\mathrm{j})}_{xy} = \frac{8\pi}{35c}\, a^7 A_{101}, \qquad (31)$$

причем $C_{002} = 0$, $A_{101} = -B_{011} = -C_{200} = C_{020}$. Искомые коэффициенты оказываются равными

$$\gamma_{002} = 0, \qquad (32)$$

$$\alpha_{101} = \gamma_{020} = \frac{5c}{8\pi R^6}\, m^{(\mathrm{j})}_{xy} = \frac{a^7}{7R^6}\, A_{101}. \qquad (33)$$

Приравнивание друг другу вычисленных на основе (10) магнитных октупольных компонент $m^{(\mathrm{i})}_{xyz}$ и $m^{(\mathrm{j})}_{xyz}$ дает нулевые значения для α_{300}, β_{030} и γ_{003} и приводит к четвертой подсистеме из шести уравнений

$$\langle \alpha_{102} - \alpha_{120} \rangle = \frac{7c}{2\pi R^8}\, m^{(\mathrm{j})}_{xyz},$$

$$\beta_{210} + \gamma_{201} = 0, \qquad \alpha_{120} + \beta_{210} = 0$$

для неизвестных коэффициентов α_{120}, α_{102}, β_{210}, β_{020}, γ_{201} и γ_{021}. Здесь

$$m^{(\mathrm{j})}_{xyz} = \frac{4\pi}{63c}\, a^9 \langle A_{102} \rangle, \qquad (34)$$

причем

$$\langle A_{100} \rangle = 0,\ A_{120} - A_{102} + \beta_{210} - B_{012} + 2C_{003} - C_{021} - C_{201} = 0,$$

$$A_{300} - A_{102} + C_{003} - C_{201} = 0, \quad 3A_{300} + B_{210} + C_{201} = 0,$$

$$A_{100} + a^2 A_{102} + C_{001} + a^2 C_{201} = 0, \quad C_{001} + a^2 C_{003} = 0.$$

Вычисления дают

$$\alpha_{300} = 0, \qquad (35)$$

$$\alpha_{102} = \frac{7c}{12\pi R^8}\, m^{(\mathrm{j})}_{xyz} = \frac{a^9}{27R^8}\, \langle A_{102} \rangle. \qquad (36)$$

Таким образом, задача решена, ибо выражения для остальных коэффициентов получаются с помощью циклической или взаимной перестановки координат в формулах (26)–(28), (30), (32), (33), (35) и (36).

Рассмотренный пример включает в себя в качестве частных случаев токи, соответствующие значениям показателя степени полиномов $L = 2$ и $L = 1$. В частности, простейшие адекватные токи, компоненты которых являются полиномами первой степени, можно предъявить, например, в следующем виде:

$$j_x = 0, \quad j_y = B_{001} z, \quad j_z = -B_{001} y; \qquad (37)$$

$$i_x = 0, \quad i_y = \frac{a^5}{5R^4}\, B_{001} z, \quad i_z = -\frac{a^5}{5R^4}\, B_{001} y. \qquad (38)$$

Заключение

Завершим работу двумя замечаниями.

1. Расщепление системы алгебраических уравнений для полиномиальных коэффициентов поверхностных токов на три (при $L = 1$), семь (при $L = 2$) или восемь (при $L \geq 3$) самостоятельных подсистем, упрощая процедуру получения решения, означает одновременно, что при

фиксированном L существует соответствующее число $(3, 7$ или $8)$ независимых токовых систем, каждая из которых ответственна за порождение только "своих" компонент тензора магнитного 2^L-поля.

2. Представим себе, что шаровой объем радиуса a с заданными токами $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ концентрически "вложен" в сферическую полость радиуса $R > a$ в толще массивного сверхпроводника. Требуется знать, какие токи $\mathbf{i}'(\mathbf{r})$ наводятся на поверхности полости. Если обсужденная в данной работе задача о поверхностных токах $\mathbf{i}(\mathbf{r})$, адекватных заданным объемным токам $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, решена, то тем самым решена и задача о сверхпроводнике, а именно

$$\mathbf{i}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}(\mathbf{r}).$$

Список литературы

[1] *Френкель Я.И.* Электродинамика (Общая теория электричества). Собр. избр. тр. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1. 370 с.
[2] *Френкель Я.И.* Электродинамика. Л.; М.: ОНТИ, 1935. Т. 2. 556 с.
[3] *Муратов Р.З.* // Астрон. журн. 1992. Т. 69. № 3. С. 604–616.
[4] *Муратов Р.З.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 4. С. 1–6.
[5] *Медведев Б.В.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977. 496 с.
[6] *Ефимов С.П.* // ТМФ. 1979. Т. 39. № 2. С. 219–233.