01;05

Соотношение для поверхностного импеданса при скин-эффекте в случае произвольного интегрального ядра

© А.И. Спицын

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники,
433053 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 21 июня 2001 г.)

Для случая скин-эффекта в металлах при произвольной функции $J(R)$, входящей в соотношение для нелокальной связи между плотностью тока и электрическим полем, получены общие соотношения для распределения электрического поля и поверхностного импеданса. Результаты применимы как к нормальным, так и к сверхпроводящим металлам и представлены через преобразование Фурье от функции $J(R)$.

При определении поверхностного импеданса металлов как в случае металлов в нормальном состоянии, так и в случае сверхпроводников связь между плотностью тока $\mathbf{j}$ и электрическим полем $\mathbf{E}$ при скин-эффекте описывается нелокальным соотношением, которое в общем случае представим в виде [1,3]

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = C_E \int\limits_V \frac{\mathbf{R}(\mathbf{RE})}{R^4} J(R)dV, \tag{1}$$

где интегрирование проводится по всему пространству и $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ — разность радиус-векторов точки интегрирования и точки, где находится плотность тока.

Относительно функции $J(R)$ положим $J(0) = 1$ и коэффициенты пропорциональности C_E для гармонически изменяющегося во времени поля $\sim l^{i\omega t}$ будем представлять в виде

$$C_E = \frac{3}{4\pi i\omega\mu_0\xi\delta^2}, \tag{2}$$

где $\delta_{c.l}$ — комплексная глубина проникновения при условии осуществления локального предела [4].

В соотношение (2) введена величина

$$\xi = \int\limits_0^\infty J(R)dR, \tag{3}$$

которая в случае нормальных металлов равна $l/(1 + i\omega\tau)$, l — длина свободного пробега электронов проводимости, τ — время релаксации [2].

Для сверхпроводников в статическом случае величина ξ совпадает с длиной когерентности, введенной в теорию БКШ [3].

В литературе вместо представления (1) используется также соотношение, связывающее вектор плотности тока $\mathbf{j}$ с векторным потенциалом $\mathbf{A}$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{A},$$

$$\mathbf{j} = -C_A \int\limits_V \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{A})}{R^4} J(R)dV. \tag{4}$$

Связь коэффициента C_E с коэффициентом C_A дается соотношением

$$C_A = i\omega C_E. \tag{5}$$

Относительно функции $J(R)$ положим, что при $R \to \infty$ она имеет основную асимптотику

$$J(R) \sim l^{-R/\alpha}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{6}$$

Для нормальных металлов $\alpha = \xi$, для сверхпроводников в статическом случае $\alpha = \xi_F$ [5].

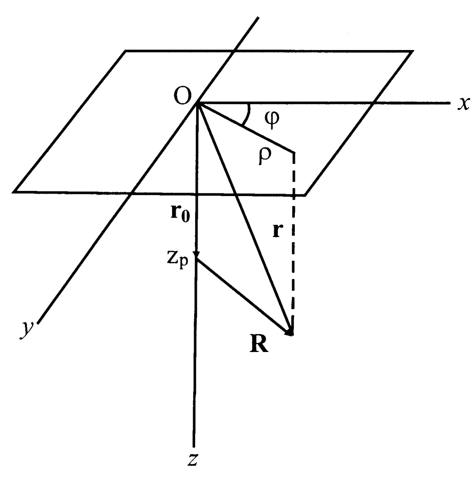
Рассмотрим металл, ограниченный плоской поверхностью S, и положим $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z)$. Введем декартовую систему координат с началом на плоскости (см. рисунок) и с осью z, направленной внутрь металла. Выберем направление оси x по направлению вектора $\mathbf{E}$. Из соотношения (1) $j_x = j_z = 0$

$$j_x = j = C_E \int\limits_V \frac{x^2 E}{R^4} J(R)dV, \quad E_x = E. \tag{7}$$

Введем цилиндрическую систему координат, связанную с исходной (рис. 1),

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$R^2 = \rho^2 + (z - z_0)^2, \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$



Если ввести переменную $u = R/|z - z_0|$, то соотношение (7) приводится к виду

$$j(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_E(z - z_0)E(z)dz, \tag{8}$$

$$\Omega_E(z) = \pi C_E \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}\right) J(u|z|)$$

$$= \pi C_E[E_{J1}(|z|) - E_{J3}(|z|)], \tag{9}$$

где введена функция

$$E_{Jn}(z) = \int_1^{\infty} \frac{J(uz)}{u^n}\, du. \tag{10}$$

Если использовать связь между **j** и **A** (4), то соотношение (8) заменится на

$$j(z_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_A(z - z_0)A(z)dz. \tag{11}$$

В связи между j и A через плоское интегральное ядро Ω_A перед интегралом будем, как принято, ставить знак "минус". Очевидно,

$$\Omega_A = i\omega\Omega_E. \tag{12}$$

Соответствующее уравнение для электрического поля E внутри металла

$$\frac{d^2E}{dz_0^2} - i\omega\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_E(z - z_0)E(z)dz = 0 \tag{13}$$

будем решать для случая зеркального отражения электронов от границы, что эквивалентно симметрии решения относительно плоскости S [4]

$$E(z_0) = E(-z_0). \tag{14}$$

Задавая граничные условия в виде

$$\frac{d}{dz}E(z)|_{z=0} = E'(0), \quad E(\infty) = 0$$

и беря преобразования Фурье от членов уравнения (13), найдем

$$-2E'(0) - k^2\tilde{E}(k) - i\omega\mu_0\tilde{\Omega}_E(k) = 0. \tag{15}$$

Здесь $\tilde{E}(k)$ и $\tilde{\Omega}_E(k)$ — преобразование Фурье от функции $E(z)$ и $\Omega_E(z)$,

$$\tilde{E}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(z_0)e^{ikz_0}dz_0, \;\; \tilde{\Omega}_E(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_E(z_0)e^{ikz_0}dz_0.$$

Из (15)

$$\tilde{E}(k) = -\frac{2E'(0)}{k^2 + i\omega\mu_0\tilde{\Omega}_E(k)}, \tag{16}$$

что по обратному преобразованию Фурье приводит к решению

$$E(z_0) = -\frac{2E'(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kz_0 dk}{k^2 + i\omega\mu_0\tilde{\Omega}_E(k)}. \tag{17}$$

Из соотношения (9) для $\tilde{\Omega}_E(k)$ находим

$$\tilde{\Omega}_E(k) = \pi C_E \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^4}\right) \tilde{J}\left(\frac{k}{u}\right) du, \tag{18}$$

где $\tilde{J}(k)$ — преобразование Фурье от функции $J(|z|)$.

Поверхностный импеданс

$$Z = -\frac{i\omega\mu_0E(0)}{E'(0)} = \frac{2i\omega\mu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2 + i\omega\mu_0\tilde{\Omega}_E(k)}, \tag{19}$$

а комплексная глубина проникновения $\delta_k = Z/(i\omega\mu_0)$

$$\delta_c = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2 + i\omega\mu_0\tilde{\Omega}_E(k)}. \tag{20}$$

Скиновая глубина проникновения в общем случае определяется равенством [4]

$$\delta_s = \mathrm{Re}\,\delta_c. \tag{21}$$

Покажем, что выбор коэффициента C_E в виде (2) согласуется с нелокальным соотношением (1). Так как характерное расстояние изменения $\Omega_E(z)$ порядка $|\xi|$, а $E(z)$ изменяется на расстоянии порядка скиновой глубины проникновения δ_s, то в нелокальном пределе $|\xi| \ll |\delta_{c.l}|$ $(\delta_k = \delta_{c.l})$ в соотношении (8) электрическое поле можно вынести за знак интеграла

$$j(z_0) \approx E(z_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_E(z - z_0)dz = \tilde{\Omega}_E(0)E(z_0).$$

Если использовать эту связь в соотношении (13), то получим

$$\delta_{c.l}^2 = \frac{1}{i\omega\mu_0\tilde{\Omega}_E(0)}. \tag{22}$$

Из соотношения (18)

$$\tilde{\Omega}_E(0) = \frac{4}{3}\pi C_E\xi, \tag{23}$$

и, следовательно, выбор коэффициента C_E в виде (2) соответствует предельному переходу $|\xi| \ll |\delta_{c.l}|$.

Приведем соотношения для функции $J(R)$ в различных случаях. При расчете поверхностного импеданса в нормальных металлах [6] используют функцию $J(R)$ по теории Рейтера и Сондхаймера $J(R) = \exp(-R/\xi)$, где $\xi = l/(1 + i\omega\tau)$. Для случая пиппардовского ядра в феноменологической теории сверхпроводимости $J(R) = \exp(-R/\xi)$ при длине когерентности $\xi = \xi_p > 0$ [7]. В микроскопической теории сверхпроводимости в стационарном случае

$$J(R) = \frac{4a}{\pi \operatorname{th} \frac{\pi}{2a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-R/\xi_n(T, l))}{1 + (2n+1)^2 a^2}, \tag{24}$$

где соответствующие соотношения для a и ξ_n приведены в [4,8]. Члены ряда (24) действительны и имеют такой же вид, как и в пиппардовской теории сверхпроводимости, но с различными значениями величин ξ.

Список литературы

[1] *Mattis D.C., Bardeen J.* // Phys. Rev. 1958. Vol. 111. N 2. P. 412–417.
[2] *Renter G.E.H., Sondheimer E.H.* // Proc. Roy. Soc. A. 1948. Vol. 195. N 1042. P. 336–364.
[3] *Meservey R., Schwartz B.B.* Superconductivity. New York: Dekker Inc., 1969. P. 17–191.
[4] *Менде Ф.Ф., Спицын А.И.* Поверхностный импеданс сверхпроводников. Киев: Наукова думка, 1985. 240 с.
[5] *Halbritter J.* // Z. Phys. 1971. Vol. 243. N 3. P. 201–219.
[6] *Спицын А.И.* // РиЭ. 1993. Т. 38. № 11. С. 2152–2155.
[7] *Pippard A.B.* // Proc. Roy. Soc. A. 1953. Vol. 216. N 1126. P. 547–568.
[8] *Спицын А.И.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 4. С. 68–78.