01

Связи между матричными элементами нелинейного больцмановского интеграла столкновений в осесимметричном случае

© А.Я. Эндер,[1] И.А. Эндер[2]

[1]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 13 июня 2001 г.)

Исследуются свойства нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана для осесимметричной функции распределения по скоростям. Используются разложения по сферическим полиномам Эрмита, ортогональным с максвелловской весовой функцией. Показано, что нелинейные матричные элементы столкновительного оператора связаны простыми соотношениями, причем эти связи справедливы для произвольных сечений взаимодействия частиц, даже при наличии выделенного направления в пространстве. Соотношения выведены из свойства инвариантности столкновительного оператора относительно выбора базисных функций, точнее, относительно изменения температуры и средней скорости весового максвеллиана. Найденные рекуррентные связи позволяют вычислять матричные элементы при больших значениях индексов. Это открывает перспективы для построения точных решений сложных кинетических задач.

Введение

Полиномиальные разложения широко используются в кинетической теории газов. Для линеаризованного уравнения Больцмана такое разложение лежит в основе известного метода Энскога–Чепмена [1]. В нелинейном случае этот метод получил развитие в работах Барнета [2] и Греда [3]. Полная система нелинейных моментных уравнений при условии выполнения критерия Греда эквивалентна нелинейному уравнению Больцмана. Как отмечал Кумар [4], наиболее экономичным является предложенное Барнетом разложение по так называемым сферическим полиномам Эрмита, представляющим собой произведение сферических гармоник и полиномов Сонина.

Основной сложностью, сдерживающей развитие нелинейного моментного метода, является расчет матрицы взаимодействия, соответствующей моментам от нелинейного интеграла столкновений. В последние годы появились определенные успехи в расчете изотропных матричных элементов (МЭ) и решении релаксационных задач для изотропной по скоростям функции распределения (ФР) [5–9]. В работах [5,6] получены аналитические формулы для нелинейных изотропных МЭ, включающие многократные суммирования. В [7–9] для расчета МЭ были выведены рекуррентные соотношения, которые позволили существенно продвинуться в область больших значений индексов. Так, для расчета МЭ на PC при $N_0 = 128$, где N_0 — число коэффициентов разложения ФР, по формулам из [5] потребовалось бы фантастическое время $9 \cdot 10^4$ лет, в то время как с использованием рекуррентной процедуры такой расчет занимает около получаса. Было показано [9], что переход от $N_0 = 15$ к 128 позволяет продвинуться в точном описании ФР от 2–3 тепловых скоростей до 8–10.

Подчеркнем, что в основе полученных связей между МЭ лежит инвариантность интеграла столкновений по отношению к выбору базисных функций. Построенные в [7–9] рекуррентные соотношения оказались очень простыми. В результате каждый нелинейный МЭ определяется через предыдущие с помощью четырех арифметических операций, при этом по заданным линейным МЭ находятся все нелинейные. Для сечений с произвольной угловой зависимостью и с зависимостью от скорости, соответствующей степенным потенциалам, имеются простые формулы для линейных МЭ [8].

Связи между МЭ, полученные в [8,9] в случае изотропной по скоростям ФР, позволили существенно продвинуться как в вычислении нелинейных МЭ интеграла столкновений, так и в расчете ФР в ходе изотропной релаксации. Задача данной работы — построить аналогичные рекуррентные соотношения в осесимметричном случае. Здесь уже ФР зависит от двух скоростных переменных. Если в изотропном случае использовалась инвариантность относительно температуры T весового максвеллиана, то в осесимметричном случае для построения связей между МЭ будем использовать инвариантность как относительно T, так и относительно средней скорости максвеллиана u.

Отметим, что в иерархии рекуррентных соотношений именно построение МЭ в осесимметричном случае является принципиально важным шагом. Переход к трехмерному случаю достаточно универсален и прост.

1. Переход от базиса (u_0, T_0) к базису (u_1, T_1)

Будем называть вещественными ненормированными сферическими полиномами Эрмита H_j функции вида

$$H_j = Y^i_{lm}(\Theta, \varphi) c^l S^{(r)}_{l+1/2}(c^2).$$

Здесь j соответствует четырем индексам i, r, l, m. Функции $Y^i_{lm}(\Theta, \varphi)$ $(i = 0, 1)$ — это ненормированные вещественные сферические гармоники. Они определяются следующим образом:

$$Y^0_{lm}(\Theta, \varphi) = P^m_l(\cos\Theta)\cos m\varphi \quad (m = 0, 1, \dots, l), \tag{1}$$

$$Y^1_{lm}(\Theta, \varphi) = P^m_l(\cos\Theta)\sin m\varphi \quad (m = 0, 1, \dots, l). \tag{2}$$

Функции $P^m_l(x)$ — это присоединенные полиномы Лежандра, а полиномы Сонина $S^{(r)}_{l+1/2}(x)$ определяются следующим образом [1]:

$$S^{(r)}_{l+1/2}(x) = \sum_{q=0}^{r} a^l_{q,r} x^q,$$

$$a^l_{q,r} = \frac{(-1)^q(2l+2r+1)!!}{(2l+2q+1)!!q!(2r-2q)!!}. \tag{3}$$

В осесимметричном по скоростям случае $(m = 0, i = 0)$ сферические полиномы Эрмита зависят только от двух индексов

$$H_{r,l} = c^l P_l(\cos\Theta) S^r_{l+1/2}(c^2),$$

$$c^2 = \frac{m}{2kT}\left(v_x^2 + v_y^2 + (v_z - u)^2\right). \tag{4}$$

Здесь угол Θ — это угол между направлением скорости $\mathbf{c}$ и осью симметрии z, а $P_l\cos(\Theta)$ — полимномы Лежандра

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} b_{k,l} x^{l-2k}, \quad b_{k,l} = \frac{(-1)^k(2l-2k-1)!!}{(2k)!!(l-2k)!}. \tag{5}$$

Полиномы $H_{r,l}$ ортогональны с максвелловским весом, имеющим среднюю скорость u, направленную вдоль оси z, и температуру T,

$$(H_{r_1,l_1}, H_{r_2,l_2}) = \int M(T, c) H_{r_1,l_1}(\mathbf{c}) H_{r_2,l_2}(\mathbf{c}) d^3v$$
$$= \delta_{r_1,r_2}\delta_{l_1,l_2} g_{r_1,l_1}, \tag{6}$$
$$M(T, c) = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} e^{-c^2}.$$

Нормировочный множитель $g_{r,l}$ имеет вид

$$g_{r,l} = \frac{(2r+2l+1)!!}{(2r)!!2^l(2l+1)}. \tag{7}$$

В рассматриваемом случае скорость $\mathbf{v}$ определяется двумя переменными, в качестве которых можно выбрать, например, $c = |\mathbf{c}|$ и угол Θ.

Представим осесимметричную ФР в виде ряда

$$f(c, \Theta) = M(T, c) \sum_{r,l} C_{r,l} H_{r,l}(c, \Theta). \tag{8}$$

При таком подходе уравнение Больцмана для ФР $f(c, \Theta)$ заменяется системой связанных уравнений для коэффициентов $C_{r,l}$

$$\frac{D(n_0(z,t)C_{r,l})}{Dt} = n_0^2 \sum_{r_1,l_1,r_2,l_2} K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2} C_{r_1,l_1} C_{r_2,l_2}. \tag{9}$$

Здесь D/Dt — дифференциальный оператор, представляющий собой левые части моментных уравнений, которые подробно рассмотрены, например, в работах [2,10]. В данной работе все внимание сосредоточим на построении МЭ от интеграла столкновений и будем считать уравнение Больцмана пространственно-однородным. Осесимметричный нелинейный МЭ имеет вид

$$K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2} = \frac{1}{g_{r,l}} \int H_{r,l} \hat{I}(M, H_{r_1,l_1}, MH_{r_2,l_2}) d^3v. \tag{10}$$

В изотропном по скоростям случае [9] были получены простые соотношения между МЭ, исходя из инвариантности интеграла столкновений относительно выбора базиса. При этом базисы отличались температурами весовых максвеллианов, т. е. единицей измерения скорости. В осесимметричном случае базисы различаются не только температурами T весовых максвеллианов, но и значениями их средних скоростей u. Как правило, мы будем характеризовать базис переменными с индексами, например u_0, T_0; u_1, T_1 и т. д.

Пусть разложение ФР ведется в базисе u_0, T_0. В этом базисе скоростные координаты c и Θ будем обозначать c_0 и Θ_0. В базисе (u_0, T_0) разложение (8) принимает вид

$$f(c_0, \Theta_0) = M(T_0, c_0) \sum_{r,l} C_{r,l} H_{r,l}(c_0, \Theta_0),$$

$$c_0^2 = \frac{m}{2kT_0}\left(v_x^2 + v_y^2 + (v_z - u_0)^2\right).$$

При переходе от одного базиса к другому удобно использовать α–u-представление уравнения Больцмана [11]. В этом представлении осесимметричная ФР разлагается по максвеллианам с произвольными температурами и средними скоростями

$$f(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} M(u, \alpha, \mathbf{v}) \varphi(\alpha, u) du d\alpha. \tag{11}$$

Для функции $\varphi(\alpha, u)$ в [10] было получено уравнение, эквивалентное уравнению Больцмана. Если перейти к переменной $\hat{T} = 1/\alpha$ и обозначить пару чисел $u, \tilde{T}$ через W, то в пространственно однородном случае это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\varphi(W, t)}{\partial t} = n_0 \int A(W, W_1, W_2) \varphi(W_1, t) \varphi(W_2, t) dW_1 dW_2. \tag{12}$$

При переходе от α, u к $u, \tilde{T}$ для функции распределения сохранено тоже обозначение φ, т.е. вместо (11) имеем

$$f(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} M(u, \tilde{T}, \mathbf{v})\varphi(u, T)du d\tilde{T}. \qquad (13)$$

Ядро $A(W, W_1, W_2)$ представляет собой отображение интеграла столкновений от двух максвеллианов $J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2) = \hat{I}(M(W_1, \mathbf{v}), M(W_2, \mathbf{v}))$ в $u{-}T$-пространство

$$J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} M(W, \mathbf{v})A(W, W_1, W_2)dW.$$

В Приложении показано, что ортогональной с максвелловским весом системе полиномов $H_{r,l}$ соответствует в $\alpha{-}u$-представлении биортогональная система функций $h^L_{r',l'}$ и $h^R_{r,l}$. В базисе W_0 для правой и левой систем функций $h^R_{r,l}$ и $h^L_{r,l}$ соответственно имеем

$$h^R_{r,l}(W, W_0) = \tilde{T}_0^{r+l/2} \sum_{p=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \frac{b_{p,l}}{2^{l-2p}}\, \delta^{(l-2p)}(u - u_0) \times \frac{\delta^{(r+p)}(\tilde{T} - \tilde{T}_0)}{r!}, \qquad (14)$$

$$h^L_{r',l'}(W, W_0) = \sum_{q=0}^{r'} \frac{a^{l'}_{q,r'}}{g_{r',l'}} \left(1 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_0}\right)^{r'-q} \times (u - u_0)^{l'+2q} \frac{1}{\tilde{T}_0^{q+l'/2}}. \qquad (15)$$

Здесь $b_{p,l}$ — коэффициенты полинома Лежандра (5), $a^{l'}_{q,r'}$ — коэффициенты полинома Сонина (3), $g_{r',l'}$ — нормировочный множитель (7). Используя разложение ФР по правым функциям $h^R_{r,l}$

$$\varphi(W, z, t) = \sum_{r,l} C_{r,l}(z, t) h^R_{r,l}(W, W_0)$$

и интегрируя уравнение (12) по W с $h^L_{r',l'}$, мы приходим к системе моментных уравнений для $C_{r,l}$, совпадающей с (9), а для коэффициентов $K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}$ (10) имеем новое представление

$$K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}(W_0) = \iiint h^L_{r,l}(W, W_0)A(W, W_1, W_2) \times h^R_{r_1,l_1}(W_1, W_0)h^R_{r_2,l_2}(W_2, W_0)dW_1 dW_2 dW. \qquad (16)$$

После подстановки выражений (14) и (15) в (16) вычисление $K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}$ при известном ядре $A(W, W_1, W_2)$ сводится к выполнению большого числа дифференцирований и интегрирований. Таким образом, с использованием $\alpha{-}u$-представления может быть построен алгоритм вывода прямых формул для МЭ. Однако формулы, получаемые из (16), оказываются настолько громоздкими, что вычисление по ним МЭ при больших значениях индексов практически невозможно.

Продолжим рассмотрение перехода от одного базиса к другому. Пусть исходный базис имеет среднюю скорость u_0 и температуру $\tilde{T}_0$, а переход осуществляется к новому базису со средней скоростью u_1 и температурой $\tilde{T}_1$, причем u_0 и u_1 направлены вдоль оси симметрии z. Одну и ту же ФР $\varphi(W)$ представим в двух базисах W_0 и W_1

$$\varphi(W) = \sum_{k=0}^{\infty} C^0_k h^R_k(W, W_0) = \sum_{j=0}^{\infty} C^1_j h^R_j(W, W_1). \qquad (17)$$

Здесь под каждым из индексов k и j подразумевается пара индексов, соответствующая индексам полинома Эрмита в осесимметричном случае. Из определения функций h^R_j и h^L_j понятно, что соотношения (17) не изменятся, если перейти из $\alpha{-}u$- в v-пространство. При этом следует только заменить каждую из функций h^R_k и h^R_j на $M(W_0, v)H_k(\mathbf{c}_0)$ и $M(W_1, v)H_j(\mathbf{c}_1)$ соответственно.

Чтобы найти связь между векторами C^0 и C^1, умножим обе части равенства (17) на $h^L_j(W, W_1)$ и проинтегрируем по W. Тогда, используя свойство ортонормированности биортогональной системы (П21), получаем

$$C^1_j = \sum_{k=0}^{\infty} D_{j,k}(W_1, W_0)C^0_k, \qquad (18)$$

где элементы матрицы перехода из одного базиса в другой $D(W_1, W_0)$ выражаются через скалярное произведение

$$D_{j,k}(W_1, W_0) = \int_{0}^{\infty} h^L_j(W, W_1)h^R_k(W, W_0)dW = \left(h^L_j(W, W_1), h^R_k(W, W_0)\right), \qquad (19)$$

при этом сами элементы базиса (полиномы Эрмита) преобразуются следующим образом:

$$h^R_j(W, W_1) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{k,j}(W_0, W_1)h^R_k(W, W_0). \qquad (20)$$

Обратный оператор $\hat{D}^{-1}$ и его матричные элементы имеют вид

$$\hat{D}^{-1}(W_1, W_0) = \hat{D}(W_0, W_1),$$

$$(\hat{D}^{-1}(W_1, W_0))_{ij} = D_{ij}(W_0, W_1).$$

Интеграл столкновений инвариантен относительно выбора базисных функций. Поэтому имеем

$$\sum_{k',j'} C^1_{k'}C^1_{j'} \sum_{i'} K^{i'}_{k',j'}(W_1)h^R_{i'}(W, W_1) = \sum_{k,j} C^0_k C^0_j \sum_{i} K^i_{k,j}(W_0)h^R_i(W, W_0). \qquad (21)$$

Здесь $K^i_{k,j}(W_0)$ и $K^{i'}_{k',j'}(W_1)$ — это МЭ в базисах W_0 и W_1. Если, используя формулы (18) и (20), выразить коэффициенты C_k^0 и функции $h_k^R(W, W_0)$ через C_k^1 и $h_k^R(W, W_1)$ соответственно, то в силу произвольности коэффициентов разложения $C_{k'}^1, C_{j'}^1$ и свойства ортогональности (П21) из (21) получаем

$$K_{k',j'}^{i'}(W_1) = \sum_i D_{i',i}(W_1, W_0)$$
$$\times \sum_{k,j} K_{k,j}^i(W_0) D_{k,k'}(W_0, W_1) D_{j,j'}(W_0, W_1). \quad (22)$$

Если эту формулу записать в операторном виде, то матричному элементу в новом базисе W_1 соответствует оператор $\hat{\hat{K}}'$, который связан с оператором $\hat{\hat{K}}$ в исходном базисе W_0 следующим образом:

$$\hat{\hat{K}}'(W_1) = \hat{D}(W_1, W_0)\hat{\hat{K}}(W_0)(\hat{D}(W_0, W_1), \hat{D}(W_0, W_1)). \quad (23)$$

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, остановимся на исследовании матрицы D.

2. Матрица перехода и ее производные

Для вычисления матрицы перехода воспользуемся определением матричного элемента оператора $\hat{D}$ (19), подставим явный вид функций $h_{r,l}^R$ и $h_{r,l}^L$ (14), (15) и проведем интегрирования по u и по $\tilde{T}$, учитывая свойства производных от δ-функций

$$D_{j',j}(W_1, W_0) = \frac{\tilde{T}_0^{r+l/2}}{\tilde{T}_1^{r'+l'/2}} \sum_{p=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \sum_{q=0}^{r'} \frac{b_{p,l}\tilde{a}_{q,r'}^{l'}}{2^{l-2p}}$$
$$\times \frac{(l'+2q)!(r'-q)!(u_0-u_1)^{l'-l+2\rho}(\tilde{T}_1-\tilde{T}_0)^{r'-r-\rho}}{(l'-l+2\rho)!(r'-r-\rho)!r!}, \quad (24)$$

где

$$\rho = p + q. \quad (25)$$

Используя (24), (25), докажем условие ортонормированности полиномов Эрмита и вычислим первые производные по u и T при $W_1 = W_2$. Из вида выражения (24) очевидно, что при $W_1 = W_0$ матричные элементы $D_{j'j}(W_0, W_0)$ отличны от нуля только тогда, когда

$$\rho = r' - r = (l - l')/2, \quad q = \rho - p \geqslant 0, \quad p \leqslant \rho. \quad (26)$$

В результате из двойной суммы в (24) остается однократная (по p), и поскольку $\rho < l/2$ (26), то верхний предел в сумме равен ρ

$$D_{j',j}(W_0, W_0) = \sum_{p=0}^{\rho} \tilde{a}_{\rho-p,r+\rho}^{l-2\rho} \frac{b_{p,l}}{2^{l-2p}}$$
$$\times (r+\rho-p)!(l-2\rho+2p)!/r!. \quad (27)$$

Отсюда при $\rho = 0$ имеем $D_{j',j}(W_0, W_0) = \tilde{a}_{0,r}^l b_{0,l} l!/2^l$. Используя выражения $b_{p,l}$ и $a_{q,r}^l$ (5), (3) и учитывая (26), получаем, что при $\rho = 0$

$$D_{r,l,r,l}(W_0, W_0) = 1. \quad (28)$$

Для произвольного ρ с использованием формул (27), (5) и (3) можно получить

$$D_{j',j}(W_0, W_0) = \frac{(r+\rho)!(2l-4\rho+1)}{2^\rho r!} S, \quad (29)$$

где

$$S = \frac{1}{\rho!} \sum_{p=0}^{\rho} \binom{\rho}{p} (-1)^p Q_{\rho-1}(p),$$

$$Q_{\rho-1}(p) = \frac{(2l-2p-1)!!}{(2l-2p-2(\rho-1)-1)!!}.$$

Здесь при $\rho > 0$ выражение $Q_{\rho-1}(p)$ представляет собой полином степени $\rho-1$ от p. Для сумм с биномиальными коэффициентами известно [12, с. 608], что

$$\sum_{p=0}^{\rho} \binom{\rho}{p} (-1)^p p^t = 0, \quad (30)$$

если $t < \rho$. Следовательно, при $\rho \neq 0$ функция S и выражение (29) обращаются в нуль. В результате доказано, что

$$D_{r',l',r,l}(W_0, W_0) = \left(h_{r'l'}^L(W, W_0), h_{r,l}^R(W, W_0)\right)$$
$$= \delta_{r,r'}\delta_{l,l'}, \quad (31)$$

т. е. матрица D при $W_1 = W_0$ представляет собой единичную матрицу. С другой стороны, это свойство матрицы выражает условие ортонормированности биортогональной системы полиномов Эрмита в $u{-}T$-представлении.

Теперь перейдем к вычислению производных от матрицы D. Сначала вычислим производную $dD_{j',j}(W_1, W_0)/du_1$ при $W_1 = W_0$, используя равенство (24). Понятно, что при этом первое из равенств (26) заменяется на

$$\rho = r' - r = (l - l' + 1)/2. \quad (32)$$

В результате имеем

$$\frac{d}{du_1}\left(D_{r',l',r,l}(W_1, W_0)\right)\Big|_{W_1=W_0} = -\frac{1}{\tilde{T}_0^{1/2}} \sum_{p=0}^{a} \frac{b_{p,l}}{2^{l-2p}}$$
$$\times \tilde{a}_{\rho-p,\rho+p}^{l+1-2\rho} \frac{(l'+2\rho-2p)!(r'-\rho+p)!}{r!} = \frac{B}{\tilde{T}_0^{1/2}}, \quad (33)$$

где

$$a = \min([l/2], \rho). \quad (34)$$

Используя значения $b_{p,l}$ (5) и $a_{q,r}^l$ (3) и равенство (32), получаем

$$B = -\frac{2r'!(2l-4\rho+3)}{2^\rho r!} S_1, \quad (35)$$

$$S_1 = \frac{1}{\rho!} \sum_{p=0}^{\rho} (-1)^{p+\rho} \binom{\rho}{p} Q_{\rho-2}(p)(l-2p+1), \quad (36)$$

где

$$Q_{\rho-2}(p) = \frac{(2l-2p-1)!!}{(2l-2p-2\rho+3)!!}. \qquad (37)$$

При переходе от (33) к (36) в качестве верхнего предела положено $a=\rho$. Этот выбор очевиден из (32) и (34), если $l' \neq 0$. При $l'=0$ из (32) и (34) следует, что $a=[l/2]=\rho-1$, и l — нечетное число. Однако в (36) при $l'=0$ всегда можно положить в качестве верхнего предела суммы $a=\rho$, так как при $p=\rho=(l+1)/2$ соответствующее слагаемое в (36) обращается в нуль.

Покажем, что S_1 при $\rho>1$ обращается в нуль. При $\rho=2$ функция $Q_{\rho-2}(p)=1$, т.е. является полиномом нулевого порядка по p, а при $\rho=3$ функция $Q_{\rho-2}(p)=2l-2p-1$ — полином первого порядка по p. При $\rho=2+k$ функция $Q_{\rho-2}(p)$ будет полиномом k-го порядка по p, а произведение в (36) $Q_{\rho-2}(p)(l-2p+1)$ будет полиномом $(k+1)$-го порядка. Следовательно, при $\rho>1$ степень полинома всегда меньше ρ и в соответствии с (30) $S_1=0$. Из (32) следует, что при $\rho=0$ возможны только равенства $r=r'$, $l=l'-1$, а при $\rho=1$ имеем $r=r'+1$, $l=l'+1$.

При $\rho=0$ в сумме (36) остается только один член, соответствующий $p=0$, и

$$S_1 = \frac{l+1}{(2l+1)(2l+3)}, \quad B = -\frac{2(l+1)}{(2l+1)}.$$

При $\rho=1$ из (35)–(37) имеем

$$S_1 = -\frac{2l}{(2l-1)(2l+1)}, \quad B = \frac{2l(r+1)}{(2l+1)}. \qquad (38)$$

Подставляя (38) в (33), получаем

$$\frac{d}{du_1}\big(D_{r',l',r,l}(W_1,W_0)\big)\Big|_{W_1=W_0} = \frac{2}{\sqrt{\tilde T_0}}\frac{1}{(2l+1)}$$
$$\times\big(-(l+1)\delta_{r',r}\delta_{l',l+1} + l(r+1)\delta_{r',r+1}\delta_{l',l-1}\big). \qquad (39)$$

Функция $D_{r,l,r',l'}(W_0,W_1)$ при $\tilde T_1=\tilde T_0$ будет представлять собой полином по степеням u_1-u_0. Коэффициенты этого полинома отличаются от коэффициентов полинома $D_{r',l',r,l}(W_1,W_0)$ перестановкой r, r' и l, l' и заменой W_0 на W_1. В результате имеем

$$\frac{d}{du_1}\big(D_{r,l,r',l'}(W_0,W_1)\big)\Big|_{W_1=W_0} = \frac{2}{\sqrt{\tilde T_0}}\frac{1}{(2l'+1)}$$
$$\times\big((l'+1)\delta_{r,r'}\delta_{l,l'+1} - l'(r'+1)\delta_{r,r'+1}\delta_{l,l'-1}\big). \qquad (40)$$

Прежде чем проводить дифференцирование по температуре, упростим формулу для матрицы перехода (24). С этой целью в (24) поменяем местами порядки суммирования, учитывая (26),

$$D_{j',j}(W_1,W_0) = \frac{(-1)^{l+r+r'}\tilde T_0^{r+l/2}}{r!\tilde T_1^{r'+l'/2}}$$
$$\times\sum_{p=a}^{r'-r}\frac{(u_0-u_1)^{l'-l+2\rho}(\tilde T_1-\tilde T_0)^{r'-r-\rho}}{(l'-l+2\rho)!(r'-r-\rho)!}$$
$$\times\sum_{p=0}^{b} b_{p,l}a^{l'}_{q,r'}(-1)^{\rho}(l'+2q)!(r'-q)!. \qquad (41)$$

Здесь $a=\max(0,[(l-l')/2])$, $b=\min(\rho,[l/2])$. Если теперь подставить в (41) выражения $a^l_{q,r}$ и $b_{p,l}$ (5), (3), то после несложных преобразований получаем

$$D_{j',j}(W_1,W_0) = \frac{(-1)^{r+r'}r'!\tilde T_0^{r+l/2}(2l'+1)}{2^{l-l'}r!\tilde T_1^{r'+l'/2}}$$
$$\times\sum_{\rho=a}^{r'-r}\frac{(u_0-u_1)^{l'-l+2\rho}(\tilde T_1-\tilde T_0)^{r'-r-\rho}2^{\rho}}{(l'-l+2\rho)!(r'-r-\rho)!\rho!}B^{\rho}_{l,l'}. \qquad (42)$$

Здесь

$$B^{\rho}_{l,l'} = \sum_{p=0}^{b}(-1)^p\binom{\rho}{p}\frac{(2l-2p-1)!!(l'+2\rho-2p)!}{(l-2p)!(2l'+2\rho-2p+1)!!}.$$

Положим в (42) $u_1=u_0$. Тогда, проводя такие же рассуждения, как и при доказательстве формулы (31), получим, что $B^{\rho}_{l,l'}=\delta_{\rho,0}\delta_{l,l'}/(2l+1)$, и (42) принимает вид

$$D_{j',j}(W_1,W_0)\Big|_{u_1=u_0} = \frac{(-1)^{r+r'}r'!}{r!}$$
$$\times\frac{\tilde T_0^{r+l/2}}{\tilde T_1^{r'+l/2}}\frac{(\tilde T_1-\tilde T_0)^{r'-r}}{(r'-r)!}\delta_{l,l'}. \qquad (43)$$

Отметим, что эта формула отличается от соответствующей формулы в изотропном случае [9] лишь множителем $(\tilde T_0/\tilde T_1)^{l/2}$. Очевидно, что, дифференцируя (43) по $\tilde T_1$ и полагая $\tilde T_1=\tilde T_0$, имеем

$$\tilde T_0\frac{d}{d\tilde T_1}\big(D_{r',l',r,l}(W_1,W_0)\big)\Big|_{W_1=W_0}$$
$$=\delta_{l',l}\big(-(r'+l'/2)\delta_{r',r}+r'\delta_{r',r+1}\big). \qquad (44)$$

Соответственно, заменяя у функции $D_{j',j}(W_1,W_0)|_{u_1=u_0}$ параметры r', l' на r, l и переменные $\tilde T_1$ на $\tilde T_0$, получаем

$$\tilde T_0\frac{d}{d\tilde T_1}\big(D_{r,l,r',l'}(W_0,W_1)\big)\Big|_{W_1=W_0}$$
$$=\delta_{l',l}(r+l/2)\delta_{r',r}-r\delta_{r,r'+1}. \qquad (45)$$

3. Соотношения между матричными элементами интеграла столкновений

Вернемся к соотношению (23). Покажем, что с помощью дифференцирования этого равенства по параметрам базиса $u, \tilde{T}$ можно получить связь между МЭ в фиксированном базисе, например в базисе W_0. Именно таким способом с помощью дифференцирования по температуре [9] были выведены соотношения между МЭ в изотропном случае.

Начнем с дифференцирования по u. Продифференцируем (23) по u_1 и положим $u_1 = u_0$ и $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_0$, т.е. $W_1 = W_0$. При этом будем учитывать, что в правой части (23) $\hat{\hat{K}}$ не зависит от u_1, поэтому здесь нужно дифференцировать только операторы $\hat{D}$. Очевидно, что матричные элементы матрицы $K(W)$ не зависят от скорости u, если сечение рассеяния не зависит от этой скорости. Как правило, сечение рассеяния не зависит от скорости центра масс двух сталкивающихся частиц, а следовательно, не зависит от скорости, с которой движется система отсчета. Такая зависимость может иметь место только в экзотически редких случаях в присутствие сильных внешних электрических и магнитных полей и при релятивистских скоростях частиц. Таким образом, исключив эти редкие случаи, можно утверждать, что слева в (22) производная по u_1 равна нулю. В результате имеем

$$0 = \left(\frac{d\hat{D}(W_1, W_0)}{du_1}\right)_{W_1=W_0} \hat{\hat{K}}(\hat{E}, \hat{E}) + \hat{E}\hat{\hat{K}}\left(\left(\frac{d\hat{D}(W_0, W_1)}{du_1}\right)_{W_1=W_0}, \hat{E}\right) + \hat{E}\hat{\hat{K}}\left(\hat{E}, \left(\frac{d\hat{D}(W_0, W_1)}{du_1}\right)_{W_1=W_0}\right). \quad (46)$$

Теперь, переходя к матричному виду и используя вычисленные в предыдущем разделе производные от матриц перехода по скорости (39) и (40), получим

$$0 = \sum_{r,l} K^{r,l}_{r'_1,l'_1,r'_2,l'_2} \frac{2(-(l+1)\delta_{r',r}\delta_{l',l+1} + l(r+1)\delta_{r',r+1}\delta_{l',l-1})}{(2l+1)\sqrt{\tilde{T}_0}} + \sum_{r_1,l_1} K^{r',l'}_{r_1,l_1,r'_2,l'_2} \frac{2((l'_1+1)\delta_{r_1,r'_1}\delta_{l_1,l'_1+1} - l'_1(r'_1+1)\delta_{r_1,r'_1+1}\delta_{l_1,l'_1-1})}{(2l'_1+1)\sqrt{\tilde{T}_0}} + \sum_{r_2,l_2} K^{r',l'}_{r'_1,l'_1,r_2,l_2} \frac{2((l'_2+1)\delta_{r_2,r'_2}\delta_{l_2,l'_2+1} - l'_2(r'_2+1)\delta_{r_2,r'_2+1}\delta_{l_2,l'_2-1})}{(2l'_2+1)\sqrt{\tilde{T}_0}}.$$

Выполняя суммирования с использованием символов Кронеккера, убирая штрихи и сокращая на $2/\sqrt{\tilde{T}_0}$, окончательно имеем

$$0 = -\frac{l}{2l-1} K^{r,l-1}_{r_1,l_1,r_2,l_2} + \frac{(l+1)r}{2l+3} K^{r-1,l+1}_{r_1,l_1,r_2,l_2} + \frac{l_1+1}{2l_1+1} K^{r,l}_{r_1,l_1+1,r_2,l_2} - \frac{l_1(r_1+1)}{2l_1+1} K^{r,l}_{r_1+1,l_1-1,r_2,l_2} + \frac{l_2+1}{2l_2+1} K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2+1} - \frac{l_2(r_2+1)}{2l_2+1} K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2+1,l_2-1}. \quad (47)$$

Здесь сознательно опущен аргумент у МЭ, поскольку это равенство справедливо в любом фиксированном базисе. Перепишем (47) в более компактном виде

$$0 = \beta(l-1)K^{r,l-1}_{r_1,l_1,r_2,l_2} + \gamma(r-1, l+1)K^{r-1,l+1}_{r_1,l_1,r_2,l_2} - \beta(l_1)K^{r,l}_{r_1,l_1+1,r_2,l_2} - \gamma(r_1, l_1)K^{r,l}_{r_1+1,l_1-1,r_2,l_2} - \beta(l_2)K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2+1} - \gamma(r_2, l_2)K_{r_1,l_1,r_2+1,l_2-1}.$$

Здесь введены обозначения

$$\beta(l) = -\frac{l+1}{2l+1}, \quad \gamma(r, l) = \frac{(r+1)l}{2l+1}.$$

Кроме этих соотношений существуют еще связи между матричными элементами, которые возникают при дифференцировании (23) по $\tilde{T}_1$ при $W_1 = W_0$. Применяя оператор $\tilde{T}_1\ d/d\tilde{T}_1$ к равенству (23) в матричном виде при $W_1 = W_0$, учитывая, что справа оператор $\hat{\hat{K}}$ не зависит от $\hat{T}_1$ и используя вычисленные в предыдущем разделе производные от матриц перехода по температуре (44)–(45), получаем

$$\tilde{T}\frac{d}{d\tilde{T}} K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}(\tilde{T}) = RK^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}(\tilde{T}) + rK^{r-1,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}(\tilde{T}) - (r_1+1)K^{r,l}_{r_1+1,l_1,r_2,l_2}(\tilde{T}) - (r_2+1)K_{r_2+1,l_2,r_1,l_1}(\tilde{T}). \quad (48)$$

Здесь

$$R = r_1 + r_2 - r + \frac{l_1 + l_2 - l}{2}. \quad (49)$$

В (48) проведена замена T_0 на $\tilde{T}$, поскольку это соотношение, как и (47), справедливо в любом базисе. Формулы (47), (48) и есть основные соотношения, которые устанавливают связи между всеми матричными элементами в осесимметричном случае.

Соотношение (48) связывает матричные элементы при фиксированных значениях l, l_1 и l_2. В частном случае, когда $l = l_1 = l_2 = 0$, из (48), (49) получаем выведенное в [8] соотношение для изотропного случая. Выведенные нами связи (47), (48) справедливы всегда, т.е. независимо от характера взаимодействия частиц.

Как уже отмечалось в [8,9], для степенных потенциалов взаимодействия сечение расщепляется на угловую зависимость и степенную зависимость от величины относительной скорости g. При степенном характере зависимости сечения от g независимо от вида угловой части МЭ пропорционален T^{μ}, где μ — константа (для максвелловских молекул $\mu = 0$, а для твердых шаров $\mu = 0.5$). Таким образом, в случае степенных потенциалов (точнее в случае степенной зависимости сечения от скорости) (48) имеет вид

$$(R-\mu)K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}(\tilde{T}) + rK^{r-1,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}(\tilde{T}) - (r_1+1)K^{r,l}_{r_1+1,l_1,r_2,l_2}(\tilde{T}) - (r_2+1)K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2+1,l_2}(\tilde{T}) = 0.$$

Анализ показал, что в осесимметричном случае соотношения (47) и (48) являются полным набором соотношений, которые связывают матричные элементы; более высокие производные по u, по $\tilde{T}$ и смешанные производные по u и $\tilde{T}$ не накладывают дополнительных соотношений. При дифференцировании по $\tilde{T}$ в изотропном случае аналогичное свойство более подробно обсуждалось в [8,9].

Таким образом, из свойства инвариантности интеграла столкновений относительно выбора базиса получены рекуррентные соотношения для осесимметричных матричных элементов $K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}$. Эти связи выполняются всегда и справедливы, в частности, для ориентированных частиц при наличии выделенного направления в пространстве. Даже в этом случае, используя равенства (47) и (48) как рекуррентные соотношения, по заданным линейным изотропным МЭ и линейным осесимметричным МЭ можно определять нелинейные МЭ. Применение этих рекуррентных соотношений приводит к сокращению размерности вычисления нелинейных МЭ на много порядков и становятся доступными для решения задач, которые при стандартном подходе требовали вычислительных ресурсов, исчисляемых в астрономических цифрах.

Как будет показано в следующей работе, для неориентированных частиц, т. е. в стандартной кинетической теории газов, когда интеграл столкновений обладает дополнительной симметрией (теорема Хеке), возникает еще целый ряд связей между матричными элементами [13], что позволяет из простых рекуррентных соотношений выразить любой нелинейный МЭ через изотропные линейные МЭ.

Приложение. Осесимметричные полиномы Эрмита в $\alpha{-}u$-представлении

В v-пространстве в осесимметричном случае сферические полиномы Эрмита имеют вид (4), (5). В базисе u_0, α_0, учитывая, что $c_0\cos\Theta = c_{0z}$, выражение (4), (5) можно представить в виде

$$H_{r,l}(c_0, c_{0z}) = S^{(r)}_{l+1/2}(c_0^2)\sum_{k=0}^{[l/2]} b_{k,l}c_0^{2k}c_{0z}^{l-2k}. \qquad (\text{П}1)$$

Функция распределения $f(\mathbf{v})$ в v-пространстве связана с ее $\alpha{-}u$-представлением с помощью формулы (11). В $\alpha{-}u$-пространстве выражение вида $F(c_0^2)c_0^{2k}c_{0z}^j$, где $F(c_0^2)$ — произвольная функция от модуля скорости c_0, представляется следующим образом:

$$\{\{F(c_0^2)c_0^{2k}c_{0z}^j\}_\alpha\}_u = \frac{(-1)^j e^{\alpha(u-u_0)^2}\delta^{(j)}(u-u_0)}{(2\alpha)^j\alpha^{3/2}\alpha_0^{-(k+j/2)}} \times \frac{d^k}{d\alpha^k}(\alpha^{3/2}\varphi(\alpha)). \qquad (\text{П}2)$$

Здесь $\delta^{(j)}(x)$ означает j-ю производную от δ-функции, двойными фигурными скобками обозначено представление функции в $\alpha{-}u$-пространстве, $\varphi(\alpha)$ — α-представление функции $F(c_0^2)$

$$F(c_0^2) = \int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha}{\alpha_0}c_0^2}\varphi(\alpha)d\alpha. \qquad (\text{П}3)$$

Формулу (П2) легко доказать, что если подставить (П2) в (11) и провести сначала интегрирование по u, а затем по частям проинтегрировать по α.

Две обобщенные функции считаются равными, если при интегрировании с произвольной финитной функцией ψ они дают одинаковый результат. В этом смысле, если использовать формулу дифференцирования j-го порядка от произведения двух функций и формулу производной высокого порядка от $e^{\alpha x^2}$ [14], можно показать, что справедливо следующее равенство:

$$e^{\alpha(u-u_0)^2}\delta^{(j)}(u-u_0) = \sum_{p=0}^{[j/2]} q_{p,j}\alpha^p\delta^{(j-2p)}(u-u_0), \quad q_{p,j} = \frac{j!}{p!(j-2p)!}. \qquad (\text{П}4)$$

Подставляя (П4) в (П2), получаем

$$\{\{F(c_0^2)c_0^{2k}c_{0z}^j\}_\alpha\}_u = \alpha_0^{k+j/2}\frac{(-1)^j}{(2\alpha)^j} \times \sum_{p=0}^{[j/2]}\frac{q_{p,j}\delta^{(j-2p)}(u-u_0)}{\alpha^{-p+3/2}}\frac{d^k}{d\alpha^k}(\alpha^{3/2}\varphi(\alpha)). \qquad (\text{П}5)$$

Используя (4), (5), из (П5), имеем

$$\{\{F(c_0^2)c_0^lP_l(\cos\Theta)\}_\alpha\}_u = \sum_{k=0}^{[l/2]} b_{k,l}\frac{(-1)^l\alpha_0^{l/2}}{(2\alpha)^{l-2k}} \times \sum_{p=0}^{[\frac{l}{2}-k]}\frac{q_{p,l-2k}\delta^{(l-2(k+p))}(u-u_0)}{\alpha^{-p+3/2}}\frac{d^k}{d\alpha^k}(\alpha^{3/2}\varphi(\alpha)). \qquad (\text{П}6)$$

Заменяя $k+p$ на p и меняя местами порядки суммирования, из (П6) получаем

$$\{\{F(c_0^2)c_0^lP_l(\cos\Theta)\}_\alpha\}_u = \sum_{p=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^l\delta^{(l-2p)}(u-u_0)\alpha_0^{l/2}}{2^l}A_{p,l}, \qquad (\text{П}7)$$

где функция $A_{p,l}$ имеет вид

$$A_{p,l}=\sum_{k=0}^{p}\frac{b_{k,l}q_{p-k,l-2k}2^{2k}}{\alpha^{l-k-p+3/2}}\,\frac{d^k}{d\alpha^k}\,(\alpha^{3/2}\varphi(\alpha)).\qquad(\text{П8})$$

Подставим в (П8) выражение для $b_{k,l}$ и $q_{p,j}$ (5), (П4) и воспользуемся следующей формулой:

$$\frac{(2m+2n-3)!!(-1)^n}{(2m-3)!!2^n\alpha^{m+n-1/2}}=\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\alpha^{m-1/2}}\right).$$

Если здесь положить $n=p-k$, а $m=l-p+1$, то получим

$$A_{p,l}=\frac{(-1)^p2^p(2l-2p-1)!!\alpha^{p-1}}{p!(l-2p)!}$$

$$\times\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{d^{p-k}}{d\alpha^{p-k}}\left(\frac{1}{\alpha^{l-p+1/2}}\right)\frac{d^k}{d\alpha^k}\,(\alpha^{3/2}\varphi(\alpha))$$

$$=2^{2p}b_{p,l}\alpha^{p-1}\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^{l-p-1}}\right).\qquad(\text{П9})$$

Подставляя (П9) в (П7), в $\alpha-u$-представлении окончательно получаем

$$\{\{F(c_0^2)c_0^lP_l(\cos\Theta)\}_\alpha\}_u=\alpha_0^{l/2}\sum_{p=0}^{[l/2]}b_{p,l}$$

$$\times\frac{(-1)^l\delta^{(l-2p)}(u-u_0)\alpha^{p-1}}{2^{l-2p}}\,\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^{l-p-1}}\right).\qquad(\text{П10})$$

В изотропной части (П10) можно рассмотреть переход от v-пространства не к α-, а к $\tilde T$-пространству. В этом случае вместо (П3) имеет место формула

$$F(c_0^2)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{\tilde T\pi}\right)^{3/2}e^{-\frac{c_0^2}{\alpha_0\tilde T}}\tilde\varphi(\tilde T)d\tilde T,\qquad\left(\tilde T=\frac{1}{\alpha}\right).\qquad(\text{П11})$$

Понятно, что

$$\varphi(\alpha)=T^2\tilde\varphi(\tilde T).\qquad(\text{П12})$$

Введем обозначение для представления функции в $u-T$-представлении — $\{\{\ \}_T\}_u$. Очевидно, что

$$\{\{\ \}_\alpha\}_u=\tilde T^2\{\{\ \}_T\}_u.\qquad(\text{П13})$$

Можно показать [15], что в смысле обобщенных функций справедливо равенство

$$\alpha^{p-1}\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^{l-p-1}}\right)=\tilde T^2\frac{d^p}{d\tilde T^p}(\tilde\varphi(\tilde T)\tilde T^l).\qquad(\text{П14})$$

Учитывая (П13) и (П14) и сокращая на $\tilde T^2$, наряду с $\alpha-u$-представлением (П10) имеем следующую формулу в $u-T$-представлении:

$$\{\{F(c_0^2)c_0^lP_l(\cos\Theta)\}_u\}_T=\frac{(-1)^l}{\tilde T_0^{l/2}}\sum_{p=0}^{[l/2]}b_{p,l}$$

$$\times\frac{\delta^{(l-2p)}(u-u_0)}{2^{l-2p}}\,\frac{d^p}{d\tilde T^p}\left(\tilde\varphi(\tilde T)\tilde T^l\right).\qquad(\text{П15})$$

Рассмотрим в качестве функции $F(c_0^2)$ произведение полинома Сонина (3) и максвеллиана. Как отмечено в [16], полином Сонина можно представить в виде

$$S_{l+1/2}^{(r)}(x)=\frac{1}{r!}\frac{d^r}{ds^r}\left(\left(\frac{1}{1-s}\right)^{l+3/2}\exp\left(-\frac{xs}{1-s}\right)\right)\Big|_{s=0}.$$

Если в этой формуле заменить $1-s$ на y, то нетрудно видеть, что справедливо соотношение:

$$\left(\frac{\alpha_0}{\pi}\right)^{3/2}e^{-c_0^2}S_{l+1/2}^{(r)}(c_0^2)$$

$$=\frac{(-1)^r}{r!}\tilde T_0^{l+r}\frac{d^r}{dy^r}\left(\frac{1}{y^l}\left(\frac{1}{\pi y}\right)^{3/2}e^{-(\mathbf{v}-\mathbf{u}_0)^2/y}\right)\Big|_{y=\tilde T_0}.$$

Соответственно в T-пространстве имеем

$$\tilde s_{r,l}^R(\tilde T,\tilde T_0)=\{M(\tilde T_0,c_0)S_{l+1/2}^{(r)}(c_0^2)\}$$

$$=\frac{\tilde T_0^{l+r}}{r!}\,\frac{\delta^{(r)}(\tilde T-\tilde T_0)}{\tilde T^l}.\qquad(\text{П16})$$

В этом можно убедиться, если положить в (П11) $\tilde\varphi(\tilde T)=\tilde s_{r,l}^R(\tilde T,\tilde T_0)$ и воспользоваться свойством производных от δ-функции.

После подстановки (П16) в (П15) вся зависимость от $\tilde T$ в слагаемых (П15) имеет вид

$$\frac{d^p}{d\tilde T^p}\left(\tilde s_{r,l}^R(\tilde T,\tilde T_0)\tilde T^l\right)=\frac{\tilde T_0^{l+r}}{r!}\,\delta^{(p+r)}(\tilde T-\tilde T_0).\qquad(\text{П17})$$

Обозначив правое отображение полиномов Эрмита в $u-T$-пространстве через $h_{r,l}^R$, собирая формулы (П15)–(П17) и вспоминая (4), окончательно имеем

$$h_{r,l}^R(W,W_0)=\{\{M(W_0,\mathbf{v})H_{r,l}(c_0^2,c_{0z})\}_u\}_T=\frac{(-1)^l\tilde T_0^{r+l/2}}{r!}$$

$$\times\sum_{p=0}^{[l/2]}\frac{b_pl}{2^{l-2p}}\,\delta^{(l-2p)}(u-u_0)\delta^{(p+r)}(\tilde T-\tilde T_0).\qquad(\text{П18})$$

Здесь $b_{p,l}$ — коэффициенты полинома Лежандра (5). Полиномы Эрмита в $\mathbf{v}$-пространстве обладают свойством ортогональности (6). Функции h_i^R и H_i связаны соотношением

$$M(W_0,\mathbf{v})H_i(\mathbf{c}_0)=\int M(W,\mathbf{v})h_i^R(W,W_0)dW.\qquad(\text{П19})$$

Подставим (П19) в (6) и поменяем местами порядок интегрирования. После этого внутренний интеграл по $\mathbf{v}$, деленный на нормировочный множитель g_i, назовем левым отображением полиномов Эрмита в $u-\tilde T$-пространство и обозначим его через $h_i^L(W,W_0)$

$$h_i^L(W,W_0)=\int M(W,\mathbf{v})H_i(\mathbf{c}_0)d^3(\mathbf{v}-\mathbf{u}_0)/g_i.\qquad(\text{П20})$$

Из формул (П19), (П20) и (6) вытекает важное свойство биортонормированности $u-T$-представления полиномов Эрмита

$$\int h_i^L(W, W_0) h_{i_1}^R(W, W_0) dW = \delta_{i,i_1}. \qquad (\text{П}21)$$

Функции $h_i^L = h_{r,l}^L$ имеют вид

$$h_{r,l}^l(W, W_0) = \sum_{p=0}^{r} \frac{\tilde{a}_{p,r}^l \left(1 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_0}\right)^{r-p}}{\tilde{T}_0^{p+l/2}} (u - u_0)^{l+2p},$$

$$\tilde{a}_{p,r}^l = a_{p,r}^l / g_{r,l}. \qquad (\text{П}22)$$

Здесь $a_{p,r}^l$ — коэффициенты полинома Сонина (3). При малых значениях индексов в справедливости формулы (П22) можно убедиться прямым интегрированием формулы (П20). В общем случае для доказательства справедливости равенства (П22) достаточно показать, что при таком определении левых образов полиномов Эрмита выполняется условие ортонормированности (П21). Такое доказательство проведено в разделе 2.

Работа поддержана РФФИ (гранты № 00-02-16882, 01-02-17903) и ФЦП „Интеграция“ (грант № АО 143).

Список литературы

[1] *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
[2] *Burnett D.* // Proc. London Math. Soc. 1935. Vol. 40. P. 382–435.
[3] *Grad H.* // Comm. Pure Appl. Math. 1949. Vol. 2. P. 311.
[4] *Kumar K.* // Ann. Phys. 1966. Vol. 37. P. 113–141.
[5] *Turchetti G., Paolilli M.* // Phys. Lett. 1982. Vol. 90A. N 3. P. 123–126.
[6] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 10. С. 38–53.
[7] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 5. С. 18–26.
[8] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 6. С. 22–29.
[9] *Enger A.Ya., Enger I.A.* // Phys. Fluids. 1999. Vol. 9. P. 2720–2730.
[10] *Sirovich L.* // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6. N 1. P. 10–20.
[11] *Эндер И.А., Эндер А.Я.* // ДАН СССР. 1970. Т. 193. № 1. С. 61–64.
[12] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981. 797 с.
[13] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Лютенко М.Б.* Препринт ФТИ РАН. Санкт-Петербург, 2000. № 1748. 71 с.
[14] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963. 1100 с.
[15] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Препринт ФТИ РАН. Санкт-Петербург, 2000. № 1747. 39 с.
[16] *Вальдман Л.* // Термодинамика газов. М., 1970. С. 169–414.