01;03;05;08

# Колебания упругой пластины контактирующей со свободной поверхностью тяжелой жидкости

© В.В. Алексеев, Д.А. Индейцев, Ю.А. Мочалова

Институт проблем машиноведения РАН,
199178 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 1 августа 2001 г.)

Исследованы свободные колебания упругой пластины плавающей на свободной поверхности идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины. Задача решена в приближении мелкой воды. Определены условия существования дискретных частот системы пластина–жидкость, лежащих до частоты отсечки волновода, и соответствующих им локализованных (не распространяющихся) мод колебаний жидкости.

## Введение

Последние десять лет появилось много работ, посвященных динамическому контактному взаимодействию тонких упругих пластин с поверхностью жидкости. Необходимость решения таких задач была продиктована исследованием динамики протяженных плавающих платформ (плавающий аэродром). Такие конструкции изучались, например, в работах [1–4]. Наибольшее внимание при этом уделялось резонансным взаимодействиям таких конструкций с жидкостью. Интенсивному обсуждению также подвергались вопросы, связанные с явлением локализации волновых процессов в жидкости в области контакта с плавающей конструкцией [2]. Такая постановка проблемы вполне естественна, так как именно при локализации волновых процессов в окружающем объеме жидкости происходят колебания конструкции с наибольшей амплитудой, так как отсутствуют излучения в окружающую среду. В работе [4] показано, что таких локализованных процессов для круглой плавающей пластины не существует и пластина совершает колебания с обязательным оттоком энергии в виде распространяющихся волн по поверхности жидкости.

Проблема существования локализованных мод колебаний в безграничной сплошной среде при наличии упруго-деформируемого тела обсуждалась во многих работах [5–7]. Было показано, что решение такой задачи связано с вопросом о существовании дискретного вещественного спектра собственных частот колебаний. Целью данной работы является установление того факта, что выбор модели плавающих конструкций в виде тонкой пластины, контактирующей с поверхностью жидкости в канале конечной глубины с плоским дном, приводит в приближении мелкой воды к практически не реализуемым условиям существования описанных резонансных колебаний. Вопрос наличия рельефа дна и другой модели плавающей конструкции требует отдельного изучения.

## Постановка задачи

Пусть на поверхности канала постоянной конечной глубины $H$ находится в непрерывном контакте с жидкостью упругая пластина бесконечной длины и с шириной $2a$. Канал заполнен идеальной несжимаемой тяжелой жидкостью. Задача решается в линейной постановке. Выберем начало координат на дне канала, направив ось $y$ по длине пластины. Ось $z$ направлена вертикально вверх и проходит через середину пластины (см. рисунок). Будем рассматривать малые колебания жидкости и пластины. Движение пластины определяется функцией $W(x, y, t)$ и описывается уравнением

$$M\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) = P(x, y, t), \quad (1)$$

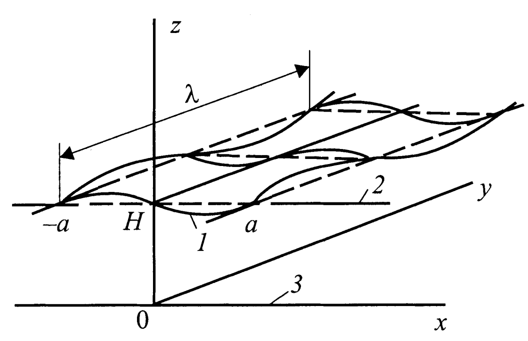
где $W(x, y, t)$ — смещение поверхности пластины от равновесного положения, $M = \rho_0\delta$ — масса пластины на единицу площади, $D = E\delta^3/12$ — изгибная жесткость, $\rho_0$ — плотность материала, $\delta$ — толщина пластины, $E$ — модуль Юнга, $P$ — давление на пластину со стороны жидкости.

На кромках пластины удовлетворяются граничные условия, заключающиеся в равенстве нулю изгибающего момента и перерезывающей силы,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad x = \pm a,$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu)\,\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad x = \pm a, \quad (2)$$

где $\mu$ — коэффициент Пуассона материала пластины.




Упругая пластина на поверхности жидкости: *1* — пластина, *2* — свободная поверхность жидкости, *3* — дно канала, $\lambda$ — длина волны.

Движение жидкости будем предполагать безвихревым, определяемым потенциалом скоростей $\Phi(x, y, z, t)$ удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{3}$$

и граничным условиям на дне бассейна $(z = 0)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

на свободной поверхности жидкости $(z = H)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad |x| \leqslant a, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad |x| > a, \tag{5}$$

где $g$ — ускорение силы тяжести.

Действующее на пластину давление представляется выражением

$$P(x, y, t) = -\rho\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=H} - \rho g W, \tag{6}$$

где $\rho$ — плотность жидкости.

Будем искать решение в виде системы поверхностных волн, распространяющихся вдоль оси $y$ и не распространяющихся по оси $x$ и имеющих форму, спадающую до нуля, при $x \to \pm\infty$

$$\Phi(x, y, z, t) \to 0. \tag{7}$$

Для определения движения пластины, находящейся на поверхности жидкости, необходимо знать распределение гидродинамического давления, действующего на пластину.

## Определение гидродинамических сил, действующих на пластину

Будем искать решение уравнений (1)–(7) в виде волн, распространяющихся по направлению оси $y$ с волновым числом $m$ и с некоторой произвольной частотой $\omega$,

$$\Phi(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\{\varphi(x, z)\exp[i(my - \omega t)]\},$$

$$W(x, y, t) = \mathrm{Re}\{w(x)\exp[i(my - \omega t)]\}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнения (1)–(7), получим следующую краевую задачу для $\varphi(x, z)$ и $\omega(x)$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = m^2\varphi, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \phi(x) = \begin{cases} -i\omega w, & |x| \leqslant a, \\ \frac{\omega^2}{g}\varphi, & |x| > a, \end{cases} \quad z = H, \tag{11}$$

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2m^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m^4 w\right] - M\omega^2 w = p(x) \tag{12}$$

и $\varphi \to 0$ при $x \to \infty$. Давление $p(x)$ определяется следующим выражением:

$$p(x) = \rho(i\omega\varphi - gw). \tag{13}$$

Граничные условия (2) запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu m^2 w = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2-\mu)m^2\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a. \tag{14}$$

Выполним в (9)–(11) преобразование Фурье по переменной $x$, тогда

$$\frac{\partial^2\varphi^F}{\partial z^2} - (k^2 + m^2)\varphi^F = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi^F}{\partial z} = 0, \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi^F}{\partial z} = \phi^F(k), \quad z = H, \tag{15}$$

где

$$\varphi^F(k, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, z)\exp(-ikx)dx,$$

$$\phi^F(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\exp(-ikx)dx. \tag{16}$$

Решение краевой задачи (15) имеет вид

$$\varphi^F(z) = \frac{\mathrm{ch}(z(k^2 + m^2)^{1/2})}{(k^2 + m^2)^{1/2}\,\mathrm{sh}(H(k^2 + m^2)^{1/2})}\phi^F(k).$$

Осуществляя обратное преобразование Фурье величины $\varphi^F(z)$ по переменной $k$ при $z = H$ с использованием свойства свертки, получим

$$\varphi(x, m, H) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)G(|x - \xi|)d\xi, \tag{17}$$

где функция $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}(H(k^2 + m^2)^{1/2})}{(k^2 + m^2)^{1/2}\,\mathrm{sh}(H(k^2 + m^2)^{1/2})} \times \exp(ikx)dk. \tag{18}$$

Подставим в выражение (17) функцию $\phi(x)$, определяемую граничным условием (11). Тогда, предполагая картину течения жидкости и колебания пластины симметричными относительно оси $y$, получим интегральное соотношение

$$\varphi_{1,2}(x, m, H) = -i\omega\int_{-a}^{a}w(\xi, m)G(|x - \xi|)d\xi + \frac{\omega^2}{g}\int_{a}^{\infty}\varphi_2(\xi, m, H)[G(|x + \xi|) + G(|x - \xi|)]d\xi. \tag{19}$$

Здесь введены следующие обозначения для потенциала $\varphi(x, m, H)$: $\varphi_1$ при $|x| < a$ и $\varphi_2$ при $|x| > a$. Соотношение (19) является интегральным уравнением относительно потенциала $\varphi_2(x, m, H)$ за пластиной, оно также позволяет определить потенциал $\varphi_1(x, m, H)$ в области под пластиной по найденному $\varphi_2(x, m, H)$.

Найдем явный вид функции $G(x)$, определяемой выражением (18). Интегрирование в (18) будем проводить на комплексной плоскости с применением теоремы в вычетах. Подынтегральная функция в (18) имеет полюсы первого порядка в точках $k = \pm ik_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где величины $k_n$ удовлетворяют равенству

$$k_n^2 = m^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2. \qquad (20)$$

В результате интегрирования получим для функции $G(x)$ следующее выражение:

$$G(|x|) = \frac{\exp(-m|x|)}{2mH} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-k_n|x|)}{k_n H}. \qquad (21)$$

Таким образом, краевая задача (9)–(14) свелась к совместному решению интегрального уравнения (19) и дифференциальных уравнений (12)–(14), связывающих потенциал $\varphi$ и прогиб пластины $w$. В общем виде возможно только численное решение этих уравнений. Поэтому далее будем предполагать, что $mH \ll 1$, т.е. воспользуемся приближением „мелкой воды“. В этом случае второй член в выражении (21) становится пренебрежимо малым по сравнению с первым членом, так как величины $k_n$ (20) стремятся к бесконечности при $H \to 0$ для любого $n$. В этом случае функция $G(|x|)$ будет приближенно выражаться в виде

$$G(|x|) \approx \frac{\exp(-m|x|)}{2mH}. \qquad (22)$$

Это же выражение можно получить из формулы (18). При малых $H$ подынтегральная функция представится выражением $[H(k^2 + m^2)]^{-1} \exp(ikx)$. Вычисление интеграла от этой функции дает выражение (22). Тогда уравнение (19) с функцией $G(|x|)$, определяемой (22), имеет вид

$$\varphi_{1,2}(x, m, H) = -\frac{i\omega}{2mH} \int_{-a}^{a} w(\xi, m) \exp[-m|x - \xi|] d\xi$$
$$+ \frac{\omega^2}{2mgH} \int_{a}^{\infty} \varphi_2(\xi, m, H) \big(\exp[-m|x + \xi|]$$
$$+ \exp[-m|x - \xi|]\big) d\xi. \qquad (23)$$

Определим из уравнения (23) потенциал $\varphi_2(x, m, H)$ за пластиной. Дифференцируя дважды уравнение (23), сведем его к уравнению относительно $\varphi_2(x, m, H)$, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \gamma^2 \varphi_2 = 0, \quad \gamma^2 = m^2 - \frac{\omega^2}{gH}. \qquad (24)$$

Решение уравнения (24), удовлетворяющее условию $\varphi_2(x, m, H) \to 0$ при $x \to \infty$, представим в виде

$$\varphi_2(x, m, H) = B \exp(-\gamma|x|), \quad |x| > a. \qquad (25)$$

Константа $B$ будет определена ниже.

Для существования не распространяющихся по координате $x$ волн должно выполняться условие $\gamma^2 > 0$ или

$$\omega < \omega_1, \quad \omega_1 = m\sqrt{gH}, \qquad (26)$$

где $\omega_1$ — граничная частота волновода в приближении мелкой воды.

Если $\omega > \omega_1$, то в решении будут присутствовать волны, уносящие энергию на бесконечность, и проблема определения вещественного дискретного спектра приобретает принципиально другой характер, а именно возникает задача о нахождении дискретного спектра на оси непрерывного [8,9]. В настоящей работе такая задача не рассматривалась.

Константа $B$ в (25) определяется подстановкой выражения (25) в уравнение (23) при $x = a$ и имеет вид

$$B = -\frac{i\omega \exp(\gamma a)}{2H(m \operatorname{sh} am + \gamma \operatorname{ch} am)} \int_{-a}^{a} w(\xi, m) \exp(m\xi) d\xi. \quad (27)$$

Теперь можно определить значение потенциала $\varphi_1(x, m, H)$ под пластиной $(|x| < a)$ из уравнения (23), используя найденное значение $\varphi_2(x, m, H)$ при $|x| > a$. Подстановка выражения (25) в уравнение (23) дает

$$\varphi_1(x, m, H) = -\frac{i\omega}{2mH} \left[ \int_{-a}^{a} w(\xi, m) \exp[-m|x - \xi|] d\xi \right.$$
$$\left. + \Delta(m, \omega) Y(w) \operatorname{ch} mx \right], \qquad (28)$$

где

$$\Delta(m, \omega) = \frac{(m - \gamma) \exp(-am)}{m \operatorname{sh}(am) + \gamma \operatorname{ch}(am)},$$

$$Y(w) = \int_{-a}^{a} w(\xi, m) \exp(m\xi) d\xi.$$

Итак, соотношение (28) определяет потенциал скоростей через прогиб пластины в области $|x| < a$. Подставляя выражение (28) в формулу для давления (13), получим выражение для давления на пластину со стороны жидкости

$$p(x, m) = \frac{\rho\omega^2}{2mH} \left[ \int_{-a}^{a} w(\xi, m) \exp[-m|x - \xi|] d\xi \right.$$
$$\left. + \Delta(m, \omega) Y(w) \operatorname{ch} mx \right] - \rho g w(x, m). \qquad (29)$$

## Определение дискретного спектра собственных частот колебаний

Рассмотрим сначала случай достаточно широкой пластины, при котором выполняется соотношение $ma \gg 1$. Выражение для давления (29) при этом можно упростить. Используя представление $\delta$-функции $\lim\limits_{z\to\infty}[z\exp(-z|x|)] = 2\delta(x)$ [10] к интегралу в первом члене правой части выражения (29), получим следующее приближенное выражение:

$$\int\limits_{-a}^{a} w(\xi, m)\exp[-m|x-\xi|]d\xi \approx \frac{2w(x,m)}{m}. \qquad (30)$$

Подставляя выражение для $p(x,m)$ (29) с учетом (30) в уравнение (12), получим уравнение, определяющее собственные колебания пластины на поверхности жидкости,

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (K-\omega^2 M_q)w = F(x). \qquad (31)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$N = 2m^2 D, \quad K = Dm^4 + \rho g, \quad M_q = M + \frac{\rho}{m^2 H},$$

$$F(x) = \frac{\rho\omega^2}{2mH}\Delta(m,\omega)Y(w)\operatorname{ch}(mx).$$

Решение уравнения (31) должно удовлетворять граничным условиям (14). Уравнение (31) аналогично дифференциальному уравнению вынужденных колебаний балки, лежащей на упругом основании с коэффициентом жесткости $K$ и растянутой силой $N$. Известно, что спектр собственных частот колебаний такой балки всегда расположен выше частоты отсечки $\omega_2^2 = K/M_q$ [9]. Таким образом, спектр собственных частот колебаний пластины на поверхности жидкости лежит выше значения

$$\omega_2 = \left[\frac{Dm^4+\rho g}{M+\rho/(m^2H)}\right]^{1/2}. \qquad (32)$$

С другой стороны, искомый спектр должен располагаться ниже граничной частоты волновода $\omega_1$ (26). Таким образом, собственные частоты удовлетворяют следующему неравенству:

$$\omega_2 < \omega < \omega_1. \qquad (33)$$

Таким образом, неравенство (33) является необходимым условием существования спектра собственных частот.

Решение уравнения (31) для симметричных относительно $x = 0$ колебаний пластины имеет вид

$$w(x,m) = C_1\operatorname{ch}(\alpha_1 x) + C_2\cos(\alpha_2 x) - \frac{F(x)}{m^4+\Omega^2}, \qquad (34)$$

где $\alpha_1 = (m^2 + (m^4+\Omega^2)^{1/2})^{1/2}$, $\alpha_2 = (-m^2 + (m^4+\Omega^2)^{1/2})^{1/2}$, $\Omega^2 = (\omega^2 M_q - K)/D$.

Подстановка решения (34) в граничные условия (14) приводит к системе уравнений относительно неизвестных постоянных $C_1$ и $C_2$

$$C_1(\alpha_1^2 - \mu m^2)\operatorname{ch}(\alpha_1 a) - C_2(\alpha_2^2 + \mu m^2)\cos(\alpha_2 a) = A,$$

$$C_1(\alpha_1^3 - (2-\mu)m^2\alpha_1)\operatorname{sh}(\alpha_1 a)$$
$$+ C_2(\alpha_2^3 + (2-\mu)m^2\alpha_2)\sin(\alpha_2 a) = -m\operatorname{th}(am)A, \qquad (35)$$

где

$$A = \frac{m^2(1-\mu)F(a)}{m^4+\Omega^2}.$$

Полученная система уравнений однородна, так как в правую часть входит интеграл $Y(w)$, который в свою очередь выражается через $C_1$ и $C_2$. Действительно, проинтегрировав (34) по $x$ от $-a$ до $a$, выразим $Y(w)$ через $C_1$ и $C_2$. Подставляя найденное выражение для $Y(w)$ в (35), получим однородную алгебраическую систему для определения коэффициентов $C_1$ и $C_2$. Приравнивая определитель системы уравнений нулю, найдем уравнение для определения собственных частот исходной задачи. Для случая широкой пластины ($ma \gg 1$) частотное уравнение имеет вид

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 a) = -\frac{\begin{array}{r}Q(\alpha_2^2+\mu m^2)^2\alpha_1 + m^3(1-\mu)\\ \times(\alpha_2^2+\mu m^2)\alpha_1 + (1-\mu)^2 m^6\end{array}}{\begin{array}{r}Q(\alpha_1^2-\mu m^2)^2\alpha_2 + m^3(1-\mu)\\ \times(\alpha_1^2-\mu m^2)\alpha_2 - (1-\mu)^2 m^4\alpha_1\alpha_2\end{array}}, \qquad (36)$$

где

$$Q = ((m^4+\Omega^2)^{1/2})\left[\frac{1}{4m} + \frac{mHD(m^4+\Omega^2)(m+\gamma)}{\rho\omega^2(m-\gamma)}\right].$$

Уравнение (36) определяет дискретный спектр собственных частот колебаний пластины. Расчеты, проведенные для различных параметров пластины и канала, указывают на весьма узкий интервал, где возможно появление корней уравнения (36). При этом обнаружено, что всегда существует только один корень. Это совпадает с результатами работы [11], где на основе численного анализа исходных уравнений для случая широких плавающих пластин была обнаружена только одна собственная частота, близкая к частоте отсечки $\omega_1$. Для случая несимметричных относительно $x = 0$ колебаний частотное уравнение, аналогичное (36) (здесь не приводится), не имеет решений. Следует отметить, что в случае пластины, расположенной на дне канала, область, где возможно появление спектра собственных значений, достаточно широкая и число собственных значений может быть различным [12]. Рассмотрим причины, приводящие к такому существенному отличию в поведении спектра собственных частот колебаний пластины, расположенной на дне и на поверхности канала. Такое рассмотрение удобно провести на основе изучения безизгибных по координате $x$ колебаний пластины на поверхности жидкости.

## Безизгибные по $x$ колебания пластины

Рассмотрим пластину, у которой отсутствуют изгибные волны по координате $x$. Назовем такую пластину для краткости „жесткой“. Такой случай может быть реализован, например, при наличии у пластины подкрепляющих ребер жесткости, расположенных перпендикулярно оси $y$. Колебания пластины в этом случае представляют собой изгибную волну, распространяющуюся только по оси $y$. Уравнение (12), определяющее распространение такой волны в пластине, представляется в виде

$$(-M\omega^2 + Dm^4)w = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} p(x, m, \omega)dx. \qquad (37)$$

Здесь $p(x, m, \omega)$ — давление на единицу площади пластины, $w$ — константа. Вычисление амплитуды давления $p(x, m)$ по формуле (29) приводит к выражению

$$p(x, m) = \frac{\rho\omega^2 w}{m^2 H}\left[1 - \frac{\gamma\,\mathrm{ch}(mx)}{m\,\mathrm{sh}(am) + \gamma\,\mathrm{ch}(am)}\right] - \rho g w. \quad (38)$$

Подставляя выражение (38) в уравнение (37), получим частотное уравнение

$$Dm^4 + \rho g = \omega^2\left\{M + \frac{\rho}{m^2 H}\left[1 - \frac{\gamma\mathrm{th}(ma)}{ma(m\mathrm{th}(am) + \gamma)}\right]\right\}$$

или

$$\omega^2 = \frac{Dm^4 + \rho g}{M + M_a(\omega)}, \qquad (39)$$

где $M_a(\omega)$ — присоединенная масса жидкости, определяемая выражением

$$M_a(\omega) = \frac{\rho}{m^2 H}\left\{1 - \frac{\gamma\mathrm{th}(am)}{am[m\mathrm{th}(am) + \gamma]}\right\}.$$

Уравнение (39) представляет собой трансцендентное уравнение относительно частоты $\omega$. Решение (39) при заданных параметрах системы определяет собственную частоту локализованной моды колебаний. Заметим, что величина $M_a$ зависит от частоты колебаний $\omega$, так как $\gamma^2 = m^2 - \omega^2/gH$. Максимальное значение присоединенной массы достигается при больших $ma$ и $M_a \approx \rho/m^2 H$. Таким образом,

$$\omega_2 = \left[\frac{Dm^4 + \rho g}{M + \rho/(m^2 H)}\right]^{1/2} < \omega$$

и область, где может находиться спектр собственных частот колебаний пластины, определяется неравенством

$$\omega_2 < \omega < \omega_1.$$

Сравним выражение (39) для частоты колебаний пластины с граничной частотой оператора (31), представленной формулой (32). Нетрудно видеть, что эти частоты совпадают при больших $ma$. Следовательно, можно сделать вывод, что область, где может находиться спектр собственных частот колебаний $\omega$ пластины, деформируемой по координате $x$, также определяется неравенством (40). В последнем неравенстве верхняя граница $\omega_1$ — частота отсечки волновода, а нижняя граница $\omega_2$ — частота колебаний „жесткой“ пластины. Очевидно, что если при некоторых параметрах пластины и канала выполняется неравенство

$$\omega_2 > \omega_1,$$

то спектр собственных колебаний деформируемой по координате $x$ пластины вообще отсутствует. Необходимое условие существования спектра $\omega_2 < \omega_1$ можно представить в виде

$$\frac{Dm^2}{gHM} < 1$$

или

$$\frac{c^2}{12gH}\left(\frac{\delta}{H}\right)^2 (mH)^2 < 1,$$

где $c$ — скорость распространения звука в пластине.

Оценим величину области изменения частоты $\omega$, определяемой неравенством (40). Пренебрегая более высокими порядками малости, получим

$$\Delta = (\omega_1 - \omega_2)\sqrt{H/g} \approx \sqrt{\frac{\rho_0\delta}{\rho H}}(mH)^2.$$

Очевидно, что эта величина мала $\Delta = O(m^2H^2)$. Отсюда становится ясно, почему решение частотного уравнения (36) дает только одно собственное значение, очень близкое к частоте отсечки $\omega_1$. В свою очередь решение частотного уравнения для безизгибных по $x$ колебаний пластины (39) для различных параметров системы показывает, что оно всегда имеет единственный вещественный корень $\omega_* \approx \omega_1$, которому соответствует собственная мода колебаний жидкости, локализованная по координате $x$ и распространяющаяся по координате $y$ с волновым числом $m$.

Физический смысл полученного результата состоит в том, что упругая тонкая пластина на поверхности жидкости в силу заданных граничных условий (5) по сути повторяет форму движения самой поверхности. Это вызвано тем, что усилие, действующее на пластину со стороны жидкости, определяемое членом $-\rho g w$ и силой инерции $M_a\omega^2 w$, значительно превышает упругие и инерционные силы, развиваемые самой пластиной. Таким образом, существенного изменения в поверхностных волн при наличии упругой тонкостенной конструкции не происходит.

## Список литературы

[1] *Kashiwagi M.* // J. Mar. Sci. Technol. 1998. N 3. P. 37–49.
[2] *Ohkusu M., Namba Y.* // Proc. 13th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Body. 1998.
[3] *Kim J.W., Ertekin R.C.* // J. Fluid. Mech. 1999. Vol. 43. N 4. P. 241–254.
[4] *Zilman G., Miloh T.* // Proc. 14th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Body. 1999. P. 179–181.
[5] *Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф.* // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. 1990. № 3. С. 74.
[6] *Бабешко В.А., Глушков Б.В., Винченко Н.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
[7] *Абрамян А.К., Алексеев В.В., Индейцев Д.А.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 3. С. 15–19.
[8] *Indeitsev D., Mochalova Yu.* // Proc. 13th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Body. 1998.
[9] *Indeitsev D., Mochalova Yu.* // Proc. 15th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Body. 2000.
[10] *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
[11] *Азалинов Д.А.* // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 4. С. 558–560.
[12] *Алексеев В.В., Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 37–42.