

01;09;10

Предельный ток нескомпенсированного электронного пучка, транспортируемого в коаксиальной камере дрейфа

© Г.В. Сотников, Т.Ю. Яценко

Институт электромагнитных исследований,
61022 Харьков, Украина
e-mail: sotnikov@kipt.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 20 сентября 2001 г.)

В приближении сильного магнитного поля получено аналитическое выражение для предельного вакуумного тока нескомпенсированного электронного пучка в коаксиальной камере дрейфа. Найденное значение является аналогом интерполяционной формулы Богданкевич–Рухадзе для цилиндрической камеры дрейфа. Проведено сравнение значений предельных токов в коаксиальной и цилиндрической конфигурациях. Сделан численный расчет предельных вакуумных токов в коаксиальной линии и их значения сравнены с аналитическими результатами.

Проблема повышения мощности релятивистских вакуумных СВЧ приборов требует решения задачи транспортировки электронных пучков. При больших токах собственный пространственный заряд электронного пучка оказывает существенное влияние на его движение. Существует пороговое значение тока, при превышении которого электроны пучка оказываются запертыми в камере дрейфа. Ламинарное движение электронного потока нарушается и возникает состояние так называемого виртуального катода. Для оценки порогового значения тока, при котором такое явление происходит, широко используется интерполяционная формула Богданкевич–Рухадзе [1,2] или полученная позже более точная формула Дженони–Проктора [3]. Указанные авторы при этом рассматривали транспортировку электронного пучка через цилиндрический вакуумный канал. Приближенные формулы, полученные авторами [1–3], достаточно хорошо совпадают с результатами прямых численных расчетов, особенно в области релятивистских энергий электронов пучка.

В последнее время объектом интенсивных исследований стали мощные СВЧ приборы, в которых канал транспортировки представляет собой коаксиальную линию передачи [4–8]. Токи, инжектируемые в камеру взаимодействия этих приборов, имеют ограничение, качественно аналогичное ограничению, возникающему при инжекции электронных пучков в цилиндрическую камеру дрейфа. Особое значение проблема критических токов имеет для коаксиального убитрона [4,5], в котором используются сильноточные пучки, имеющие значительную величину азимутальной скорости и коаксиального виртуального катода [8]. Количественная же сторона явления виртуального катода в коаксиальной линии передачи до настоящего времени не определена, хотя этот вопрос должен стоять одним из первых при конструировании любого коаксиального СВЧ прибора с внешней инжекцией электронного пучка. Ниже мы, придерживаясь формализма [1], получим выражение для предельного тока электронного пучка в вакуумной коаксиальной камере дрейфа.

В приближении сильного магнитного поля лармовским вращением можно пренебречь и считать, что электроны движутся вдоль силовых линий магнитного поля. Тогда для нахождения потенциала, создаваемого трубчатым электронным пучком коаксиальной линии, будем исходить из уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi}{v_{\parallel}} \begin{cases} 0, & \rho < r < r_i, \\ j, & r_i \leq r < r_0, \\ 0, & r_0 \leq r \leq R, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ и R — внутренний и внешний радиус коаксиальной линии соответственно, r_0 — внешний радиус пучка, r_i — внутренний радиус пучка, j — плотность тока, v_{\parallel} — продольная скорость пучка.

Граничные условия для уравнения (1) состоят в условии обращения в нуль потенциала на металлических поверхностях коаксиальных цилиндров и непрерывности потенциала и его производных на внутренней и внешней границах пучка

$$\Phi(\rho) = \Phi(R) = 0, \quad \Phi(r_i - 0) = \Phi(r_i + 0),$$

$$\Phi(r_0 - 0) = \Phi(r_0 + 0),$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_i-0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_i+0}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0-0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0+0}. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2) для пучка с постоянной плотностью по сечению имеет вид

$$\Phi^I(r) = \frac{I_0}{v_{\parallel}} \frac{\ln(r/\rho)}{\ln(R/\rho)} G, \quad (3)$$

$$\Phi^{II}(r) = \frac{I_0}{v_{\parallel}} \left\{ \frac{\ln(r/\rho)}{\ln(R/\rho)} G - \frac{r^2 - r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} + \frac{2r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \ln \frac{r}{r_i} \right\},$$

$$\Phi^{III}(r) = \frac{I_0}{v_{\parallel}} \frac{\ln(r/R)}{\ln(R/\rho)} \left[G - 2 \ln \frac{R}{\rho} \right], \quad (5)$$

где

$$G = 1 + 2 \ln \frac{R}{r_0} + 2 \frac{r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \ln \frac{r_i}{r_0}. \quad (6)$$

В выражениях (3)–(5) индексы *I*, *II*, *III* относятся к областям внутри пучка, в пучке и вне пучка соответственно; $I_0 = \pi j[r_0^2 - r_i^2]$ — полный ток пучка.

В отличие от цилиндрической камеры дрейфа, где максимальное провисание потенциала достигается на внутренней поверхности электронного пучка, для коаксиальной камеры дрейфа максимум достигается в объеме электронного пучка. Его положение, как следует из (4), определяется выражением

$$r_{\max} = r_i \left(1 + \frac{r_0^2 - r_i^2}{2r_i^2 \ln(R/\rho)} G \right)^{1/2}, \quad (7)$$

а максимальное значение равно

$$\Phi_{\max} = \frac{I_0}{v_{\parallel} \ln(R/\rho)} \left\{ \left[\ln \left(\frac{r_{\max}}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \right] G + \frac{2r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \ln \frac{r_{\max}}{r_i} \ln \frac{R}{\rho} \right\}. \quad (8)$$

Для получения предельного тока электронного пучка в выражении (8) v_{\parallel} необходимо считать зависящей от потенциала и максимизировать значение тока по потенциалу пучка [9]. В такой процедуре необходимо использовать интегралы движения электронов пучка в поле пространственного заряда и сильном магнитном поле [1]:

$$v_{\perp} \left(1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2} \right)^{-1/2} = v_{\perp 0} \left(1 - \frac{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2}{c^2} \right)^{-1/2} = v_{\perp 0} \gamma, \quad (9)$$

$$mc^2 \left(1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2} \right)^{-1/2} + e\Phi = mc^2 \gamma, \quad (10)$$

где $v_{\perp 0}$, $v_{\parallel 0}$ — поперечная и продольная скорость электронов пучка при входе в камеру дрейфа.

В результате получим следующее выражение для предельного тока электронного пучка в вакуумной коаксиальной камере дрейфа

$$I_{\max}^{\text{coax}} = I_A \frac{\gamma}{\gamma_{\parallel}} \left(\gamma_{\parallel}^{2/3} - 1 \right)^{3/2} \frac{\ln(R/\rho)}{\ln(r_{\max}/\rho) - 1/2} \times \left\{ G + \frac{2r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \frac{\ln(R/\rho) \ln[r_{\max}/r_i]}{\ln(r_{\max}/\rho) - 1/2} \right\}^{-1}, \quad (11)$$

где $\gamma_{\parallel} = (1 - v_{\parallel 0}^2/c^2)^{-1/2}$, $I_A = mc^3/e \approx 17 \text{ kA}$.

В пределе, когда радиус внутреннего коаксиала $\rho \rightarrow 0$, из (11) следует известная интерполяционная формула Богданкевича–Рухадзе [1]

$$J_0 = I_A \frac{\gamma}{\gamma_{\parallel}} \left(\gamma_{\parallel}^{2/3} - 1 \right)^{3/2} G^{-1}. \quad (12)$$

Для тонкого пучка $a = r_0 - r_i \ll r_0$, достаточно далеко отстоящего от металлических стенок $a/r_0 \ll \min\{\ln(R/r_0), \ln(r_0/\rho)\}$ пучка, из (11) получим

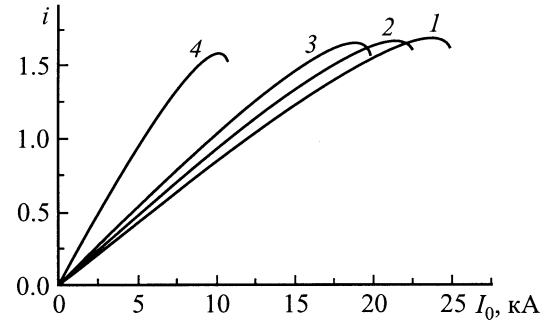


Рис. 1. Рассчитанный нормированный ток *i* электронного пучка в коаксиальной камере дрейфа как функция тока инжекции для различных значений поперечной скорости электронного пучка: $\beta_w = 0.1$ (1), 0.2 (2), 0.28 (3), 0.5 (4). Параметры камеры дрейфа: $R = 15.2 \text{ cm}$, $\rho = 6.7 \text{ cm}$, $\gamma = 2$, $r_i = 9.2 \text{ cm}$, $r_0 = 12.6 \text{ cm}$.

следующее выражение для предельного тока нескомпенсированного электронного пучка в коаксиальной линии:

$$I_{\max}^{\text{coax}} = I_A \frac{\gamma}{\gamma_{\parallel}} \left(\gamma_{\parallel}^{2/3} - 1 \right)^{3/2} \frac{1}{2 \ln(R/r_0) \ln(r_0/\rho)}, \quad (13)$$

т.е. предельный ток тонкого электронного пучка в коаксиальной линии в $\ln(R/\rho)/\ln(r_0/\rho)$ раз больше предельного тока в цилиндрической камере дрейфа. Для оценки точности приближенных аналитических выражений (11), (13) уравнение Пуассона (1) с граничными условиями (2) с учетом интегралов движения (9), (10) было решено численно с помощью метода Ньютона решения нелинейных разностных уравнений [10]. При расчете использовались параметры коаксиальной линии и электронного пучка создаваемого мощного коаксиального убитрона [4]: $\rho = 6.7 \text{ cm}$, $R = 15.2 \text{ cm}$, $\gamma = 2$. На рис. 1 приведены зависимости безразмерного тока $i = I/J_0$ в коаксиальной камере дрейфа от инжектируемого тока I_0 для различных значений поперечной скорости пучка $\beta_w = v_{\perp 0}/c$ ($\gamma_{\parallel} = \gamma/(1 + \beta_w^2 \gamma^2)$), $r_i = 9.2 \text{ cm}$, $r_0 = 12.6 \text{ cm}$. Значение тока в камере дрейфа вычислялось по формуле

$$I = I_0 \frac{2}{v_{\parallel 0} (r_0^2 - r_i^2)} \int_{r_0}^{r_i} v_{\parallel}(r) r dr, \quad (14)$$

где $v_{\parallel}(r)$ — решение системы уравнений (1), (2), (9), (10).

Качественное поведение тока пучка в коаксиальной камере дрейфа от тока инжекции такое же, как в цилиндрической камере дрейфа. Сначала ток растет, достигает своего максимального значения I_{\max} (предельный ток), а затем уменьшается с увеличением тока инжекции. На рис. 1 показан лишь начальный участок спадания тока в коаксиальной линии до момента обращения в нуль в каком-либо сечении скорости электронного пучка. Дальнейшие расчеты в рассматриваемой численной модели некорректны. Как следует из рис. 1, безразмерный

β_w	$I_{\max}^{\text{sol}}, \text{kA}$	$I_{\max}^{\text{coax}}, \text{kA}$	J_0, kA
0	19.70	24.09	11.65
0.1	16.21	20.73	11.26
0.2	14.50	18.73	10.17
0.28	12.58	16.45	8.94
0.5	6.54	8.93	4.85

ток i практически не зависит от γ_{\parallel} (или от β_w). Это свидетельствует о том, что функциональная зависимость предельного тока в коаксиальной камере дрейфа от γ , γ_{\parallel} с высокой точностью учтена в аналитическом выражении (11) и совпадает с аналогичной для цилиндрической камеры дрейфа. В таблице приведены абсолютные значения рассчитанного предельного тока I_{\max}^{sol} . Для сравнения приведены также значения предельного тока в коаксиальной камере дрейфа I_{\max}^{coax} , определяемые аналитическим выражением (11), а также численные значения предельного тока в цилиндрической камере дрейфа J_0 при одинаковых радиусах и γ , γ_{\parallel} электронных пучков. Из приведенных данных следует, что точность приближенного аналитического выражения (11) в существенной степени определяется продольной энергией электронного пучка γ_{\parallel} . Так, при $\gamma_{\parallel} = 2$ ($\beta_w = 0$) разность между значениями I_{\max}^{sol} и I_{\max}^{coax} составляет $\approx 18.2\%$, при уменьшении до $\gamma_{\parallel} = 1.41$ ($\beta_w = 0.5$) это различие уже составляет $\approx 26.8\%$. Естественно ожидать для $\gamma_{\parallel} \gg 1$ различие между результатами прямого численного расчета и приближенной формулой (11) будет существенно ниже. Результаты расчета для $\gamma = \gamma_{\parallel} = 10$ показали, что такое различие составляет $\approx 3\%$. Из сравнения колонок 3 и 4 таблицы следует, что в коаксиальной камере дрейфа можно транспортировать токи, существенно большие, чем в цилиндрической.

На рис. 2 приведены результаты расчета (кривая 1) предельного тока в зависимости от радиуса внутреннего проводника коаксиальной линии: $\gamma = \gamma_{\parallel} = 2$. Кривая 2 показывает зависимость I_{\max}^{coax} в соответствии с (11). Видно что на всем интервале изменений ρ результаты численного расчета и приближенное аналитическое выражение достаточно хорошо совпадают. Когда радиус коаксиала стремится к внутреннему радиусу пучка, предельный ток в линии существенно возрастает. Это связано с экранировкой пространственного заряда электронного пучка вблизи металлической поверхности. В результате уменьшается провисание потенциала, создаваемого электронным пучком, а следовательно, его продольная скорость уменьшается слабее.

Рис. 3 демонстрирует поведение предельного тока электронного пучка в зависимости от его положения в коаксиальной линии дрейфа. Толщина пучка постоянна и равна $a = 1$ см. Как следует из рис. 3, значение предельного тока электронного пучка значительно возрастает при приближении его внутренней границы к металлическим стенкам коаксиальной линии. Такое

поведение, как на рис. 2, объясняется существенным уменьшением провисания потенциала при приближении пучка к металлической поверхности. При приближении тонкого электронного пучка к поверхности внешнего коаксиального проводника предельный ток в линии стремится к предельному току в цилиндрической камере дрейфа. Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 3 показывает, что, так же как на предшествующем рис. 2, имеется хорошее совпадение аналитических и численных расчетов.

На рис. 4 представлены зависимости предельного вакуумного тока от толщины пучка при сохранении среднего радиуса $r_c = (r_i + r_0)/2 = (\rho + R/2)$ постоянным. С увеличением толщины пучка от 0.1 до 8.5 (полное заполнение коаксиального зазора) рассчитанный (кривая 2) предельный ток увеличился более чем в два раза. Как для рис. 2 и 3, имеется хорошее совпадение между аналитической (кривая 1) и рассчитанной (кривая 2) зависимостями предельного тока в коаксиальной камере дрейфа. Причем это совпадение улучшается при увеличении толщины пучка. Для сравнения на этом же рисунке приведена аналитическая зависимость предельного

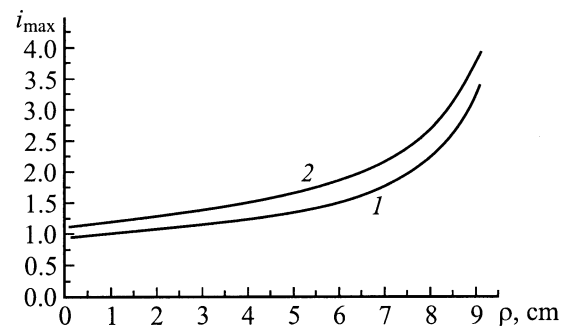


Рис. 2. Предельный ток $i_{\max} = I_{\max}/J_0$ электронного пучка в коаксиальной линии как функция радиуса внутреннего проводника ρ : 1 — результаты численного расчета, 2 — аналитическое выражение (11); $\gamma = \gamma_{\parallel} = 2$, остальные параметры те же, что и на рис. 1.

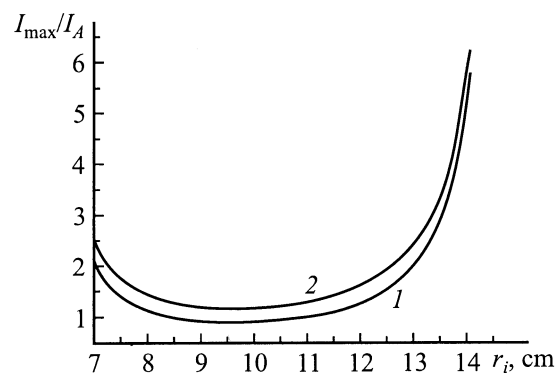


Рис. 3. Предельный ток электронного пучка в зависимости от его положения в коаксиальной камере дрейфа: 1 — результаты численного расчета, 2 — аналитическое выражение (11). Толщина пучка $a = 1$ см, $\gamma = \gamma_{\parallel} = 2$, остальные параметры те же, что и на рис. 1.

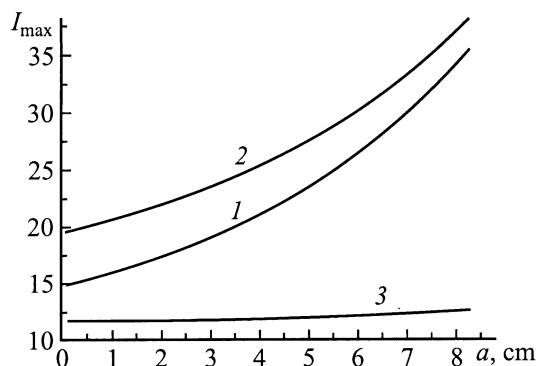


Рис. 4. Зависимость предельного тока электронного пучка от его толщины a : 1 — аналитическое выражение (11), 2 — численный расчет для коаксиальной камеры дрейфа, 3 — аналитическое выражение (12) для цилиндрической камеры дрейфа. Средний радиус пучка $(r_i + r_0)/2 = 10.95$ см, $\gamma = \gamma_{\parallel} = 2$, остальные параметры те же, что и на рис. 1.

вакуумного тока пучка в цилиндрической камере дрейфа. Как следует из сравнения кривых 1 и 3, предельный ток в коаксиальной камере дрейфа существенно выше, чем в цилиндрической. С увеличением толщины пучка отношение предельных токов в коаксиальной и цилиндрической камерах дрейфа возрастает. В этом состоит существенное отличие от случая тонкого пучка (рис. 3), где при приближении электронного пучка к металлической поверхности предельный ток в коаксиальной и цилиндрических камерах дрейфа возрастает в одинаковой степени.

Таким образом, полученное в настоящей работе асимптотическое выражение (11) позволяет оценить значения вакуумного тока в коаксиальной камере дрейфа. Как показывают результаты численных расчетов, точность этой формулы существенно возрастает с увеличением продольной энергии электронных пучков. Так, для $\gamma_{\parallel} = \gamma = 2$ расхождение аналитического и численного результатов меньше 20%, а для $\gamma_{\parallel} = \gamma = 10$ разница уменьшается до 3%.

В заключение авторы благодарят Ю.В. Ткача, обратившего их внимание на проблему.

Список литературы

- [1] Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1990. 168 с.
- [2] Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. // Успехи физ. наук. 1971. Т. 103. № 4. С. 609–640.
- [3] Thode L.E., Godfrey B.B., Shanahan W.R. // Phys. Fluids. 1979. Vol. 22. N 4. P. 747–763.
- [4] Balkcum A.J., McDermott D.B., Philips R.M., Luhmann N.C. // IEEE Trans. on plasma science. 1998. Vol. 26. N 3. P. 548–555.
- [5] Freud H.P., Jackson R.H., Pershing D.E., Taccetti J.M. // Phys. Plasmas. 1994. Vol. 1. N 4. P. 1046–1059.

- [6] Балакирев В.А., Марков П.И., Сотников Г.В., Ткач Ю.В. // Зарубежная радиоэлектроника. 1999. № 12. С. 26–43.
- [7] Сотников Г.В. // Физика плазмы. 2001. Т. 27. № 6. С. 509–518.
- [8] Crawford M., Kristiansen M., Hatfield L.L. // Proc. 10th IEEE Intern. Pulsed Power Conf. Albuquerque (New Mexico), 1995. P. 682–687.
- [9] Лебедев А.Н., Шальнов А.В. Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 528 с.
- [10] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.