Журнал технической физики, 2002, том 72, вып. 5

01;04

Нестационарное решение уравнений магнитной гидродинамики для осесимметричных конфигураций плазмы

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 27 августа 2001 г.)

Сформулирован метод построения нестационарного решения уравнений магнитной гидродинамики на основе автомодельной экстраполяции решения уравнения Шафранова.

Введение

Макроскопическое описание плазмы в рамках модели идеальной проводящей жидкости основано на уравнениях магнитной гидродинамики [1]

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{VB}],\tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=0,\tag{2}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}\equiv\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=-\frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{B}]-\frac{1}{\rho}\nabla p.\tag{3}$$

Для построения стационарных решений системы уравнений (1)–(3) в случае ограниченной в пространстве аксиально-симметричной конфигурации плазмы используется уравнение Шафранова для магнитных поверхностей [2]

$$\operatorname{div}\frac{\nabla\psi}{r^2}=-16\pi^3\frac{dP}{d\psi}-\frac{8\pi^2}{c^2r^2}\frac{dJ^2}{d\psi}.\tag{4}$$

Получен ряд аналитических решений этого уравнения [2–4].

Что касается нестационарной задачи, то возможность ее решения на основе автомодельного подхода была продемонстрирована ранее для неустановившихся одномерных движений плазмы, относящихся к классу движений сплошной среды, для которых скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии (см. [5,6] и указанную там литературу).

В данной работе предлагается метод построения нестационарного решения уравнений (1)–(3) для осесимметричной конфигурации плазмы, стационарное состояние которой определяется решением уравнения Шафранова. Это решение описывает неустановившееся двумерное движение указанного выше класса.

Автомодельная экстраполяция

Обозначим через $a=a(t)$, $b=b(t)$ значения характерных радиального и аксиального размеров движущегося плазмоида; для определенности будем считать, что $a(0)=R$, $b(0)=L$, где R, L — значения указанных выше размеров плазменной конфигурации в стационарном состоянии. Вначале рассмотрим движение плазмы при отсутствии вращения. Для рассматриваемого класса движений плотность плазмы и составляющие ее скорости имеют вид

$$\rho=\frac{LR^2}{ba^2}\varphi(\xi,\eta),\quad V_r=\dot a\xi,\quad V_\varphi=0,\quad V_z=\dot b\eta.\tag{5}$$

Здесь $\xi=r/a$, $\eta=z/b$ — автомодельные переменные; функция φ определяется распределением плотности в стационарном состоянии $\varphi(\chi,\xi)=\rho(r,z)$, где $\chi=r/R$, $\xi=z/L$. Подставляя выражения для составляющих скорости в условие вмороженности силовых линий магнитного поля, получим следующие выражения:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t}=-\left(\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot b}{b}\right)B_r-r\,\frac{\dot a}{a}\frac{\partial B_r}{\partial r}-z\,\frac{\dot b}{b}\frac{\partial B_r}{\partial z},\tag{6}$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}=-\left(\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot b}{b}\right)B_\varphi-r\,\frac{\dot a}{a}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}-z\,\frac{\dot b}{b}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z},\tag{7}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-2\frac{\dot a}{a}-B_z-r\,\frac{\dot a}{a}\frac{\partial B_z}{\partial r}-z\,\frac{\dot b}{b}\frac{\partial B_z}{\partial z}.\tag{8}$$

Нетрудно получить общее решение уравнений (6)–(8)

$$B_r=\frac{RL}{ab}\,f(\xi,\eta),\quad B_\varphi=\frac{RL}{ab}\,g(\xi,\eta),\quad B_z=\frac{R^2}{a^2}\,h(\xi,\eta),\tag{9}$$

где f, g, h — некоторые функции.

Отметим, что более простым способом получения выражений (9) является использование следствия условия вмороженности силовых линий

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{B}\nabla S}{\rho}\right)=0,\tag{10}$$

где S — любая величина, сохраняющаяся при движении плазмы.

Полагая в (10) S последовательно равной ξ,φ,η, сразу найдем выражения (9).

С другой стороны, составляющие магнитного поля осесимметричной конфигурации плазмы можно представить в следующем виде:

$$B_r=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad B_\varphi=\frac{2J}{cr},\quad B_z=\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

Здесь ψ, J — магнитный поток и полный ток через круг радиуса r, перпендикулярный к оси z,

$$\psi=\int\limits_0^r B_z 2\pi r\,dr,\quad J=\int\limits_0^r j_z 2\pi r\,dr.$$

Из сравнения выражений для радиальной и аксиальной составляющих магнитного поля найдем функции f, h

$$f = -\frac{1}{2\pi RL\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}, \quad h = \frac{1}{2\pi rR^2\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}, \tag{11}$$

где функция Ψ удовлетворяет условию $\Psi(\xi,\eta) = \psi(r,z,t)$.

Как следует из выражений для B_φ, при наличии аксиальной составляющей плотности тока для рассматриваемого класса движений $b = L$ и речь может идти только о решениях с зависящим от времени поперечным размером конфигурации. Решение с зависящими от времени продольным и поперечным размерами конфигурации возможно в случае азимутального распределения плотности тока, т. е. при $J = 0$.

Полученные соотношения показывают, что для рассматриваемого класса движений решение уравнений магнитной гидродинамики можно получить посредством обобщения решения уравнения Шафранова (4), которое для функции $\Psi(\chi,\xi) = \psi(r,z)$ записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{R^2}\Gamma(\chi,\xi) + \frac{1}{L^2}\Lambda(\chi,\xi) = -16\pi^3\chi^2R^2\frac{dP}{d\Psi} - \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{d\Psi}. \tag{12}$$

Здесь и в дальнейшем для краткости используются обозначения

$$\Gamma(\chi,\xi) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2} - \frac{1}{\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}, \quad \Lambda(\chi,\xi) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}.$$

Решение уравнения (12) позволяет конкретизировать фигурирующую в соотношениях (11) функцию Ψ. Очевидно, что подобное обобщение основано на предположении, что давление движущейся плазмы, как и в стационарном состоянии, является функцией магнитного потока: $p = P(\psi)$.

Для определения зависимостей размеров конфигурации от времени следует подставить выражения (5), (9), (11) в уравнение Эйлера (3). В результате получим

$$\ddot a\xi = -\frac{A}{a\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}, \quad \ddot b\eta = -\frac{A}{b\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta},$$

$$A = \frac{1}{16\pi^3a^2\xi^2}\left[\frac{1}{a^2}\Gamma(\xi,\eta) + \frac{1}{b^2}\Lambda(\xi,\eta)\right]$$

$$+\frac{dP}{d\Psi} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{L}{abc\xi}\right)^2\frac{dJ^2}{d\Psi}. \tag{13}$$

Как нетрудно видеть, если функция $\Psi(\chi,\xi)$ удовлетворяет уравнению (12), то решение обыкновенных дифференциальных уравнений (13) имеет вид

$$a = R(1+ut), \quad b = L.$$

Если же в рассматриваемой стационарной конфигурации плотность тока распределена азимутально, то, как уже отмечалось, возможно решение с зависящим от времени и продольным размером плазмоида

$$a = R(1+ut), \quad b = L(1+wt).$$

Здесь u, w — некоторые постоянные величины. Таким образом, с помощью автомодельной экстраполяции решения уравнения Шафранова можно построить нестационарное решение уравнений магнитной гидродинамики, описывающее изменение размеров осесимметричной конфигурации.

Тороидальная конфигурация

Для иллюстрации рассмотрим решение уравнения Шафранова в случае тороидальной конфигурации с азимутальным распределением плотности тока [3]

$$\psi = \frac{1}{2}\psi_0\left[r^2z^2 + \frac{\alpha-1}{4}\left(r^2-R^2\right)^2\right], \tag{14}$$

где R — радиус магнитной оси; ψ_0, α — постоянные величины.

Выражение (14) является решением уравнения (4) при $J = 0$,

$$16\pi^3\frac{dP}{d\psi} = -\alpha\psi_0. \tag{15}$$

Будем считать, что $\psi_0 = 8\pi^2 j_0/cR\alpha$; тогда плотность протекающего по шнуру тока равна $j_\varphi = -j_0 r/R$. Вблизи магнитной оси

$$\psi \approx \frac{1}{2}\psi_0R^2\left[z^2 + (\alpha-1)q^2\right], \tag{16}$$

где $q = r - R$.

Полагая $\alpha = \lambda^2 + 1$, $\lambda = L/D$, получим, что сечение магнитной поверхности (16) — эллипс с полуосями L, D. Малым параметром является отношение поперечных размеров сечения шнура к радиусу магнитной оси. В соответствии с (15) давление плазмы тонкого шнура равно

$$p = Q\left(1 - \frac{q^2}{D^2} - \frac{z^2}{L^2}\right), \tag{17}$$

где $Q = 2\pi j_0^2L^2/\alpha c^2$, а для магнитного поля с принятой точностью найдем

$$B_r = -\frac{4\pi j_0}{\alpha c}z, \quad B_z = \frac{4\pi j_0\lambda^2}{\alpha c}q.$$

Как и в случае прямолинейного плазменного шнура эллиптического сечения [4], магнитное поле (18) представляет собой суперпозицию удерживающего внешнего магнитного поля квадрупольного типа и магнтного поля, создаваемого плазменным шнуром,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \tag{19}$$

$$B_{0r} = kz, \quad B_{0z} = kq, \quad k = \frac{4\pi j_0\lambda(\lambda-1)}{c(\lambda+1)(\lambda^2+1)},$$

$$B_{1r} = -\frac{4\pi j_0}{c(\lambda+1)}z, \quad B_{1z} = \frac{4\pi\lambda j_0}{c(\lambda+1)}q.$$

Перейдем к построению нестационарного решения для тороидальной конфигурации, предполагая, что давление движущейся плазмы удовлетворяет такому же условию, как и в случаях неподвижной плазмы,

$$16\pi^3 \frac{dP}{d\psi} = -\mathrm{div}\frac{\nabla\psi}{r^2}.$$

В данном случае из (14) найдем

$$\Psi(\chi, \xi) = \frac{1}{2}\psi_0 R^2 \left[L^2\chi^2\xi^2 + \frac{\alpha - 1}{4}R^2\left(\chi^2 - 1\right)^2\right].$$

В соответствии с изложенной выше схемой для магнитного потока движущейся плазмы имеем

$$\psi(r, z, t) = \Psi(\xi, \eta)$$

$$= \frac{1}{2}\psi_0 R^2\left[\left(\frac{Lrz}{ab}\right)^2 + \frac{\alpha - 1}{4}R^2\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^2\right]$$

Вблизи магнитной оси сечение магнитной поверхности движущегося плазменного шнура

$$\psi \approx \frac{1}{2}\psi_0 R^2 L^2\left(\frac{z^2}{b^2} + \frac{q^2}{d^2}\right)$$

представляет собой эллипс с полуосями b и $d = aD/R$, Давление движущейся плазмы имеет аналогичный (17) вид

$$p = Q\frac{1 + \mu^2}{\alpha}\left(\frac{LD}{bd}\right)^2\left(1 - \frac{q^2}{d^2} - \frac{z^2}{b^2}\right). \tag{20}$$

Для нестационарного решения плотность протекающего по шнуру тока зависит от времени

$$j_\varphi = -j\frac{r}{a}, \quad j = j_0(1 + \mu^2)\frac{DL^2}{adb^2}, \tag{21}$$

где $\mu = b/d$ — отношение полуосей сечения.

Для составляющих магнитного поля получим следующие выражения:

$$B_r = -\frac{4\pi j_0 DL^2}{\alpha c d b^2}z, \quad B_Z = -\frac{4\pi j_0 DL^2}{\alpha c d^3}q. \tag{22}$$

Представим магнитное поле (22) в аналогичном (19) виде

$$B_{0r} = \kappa z, \quad B_{0z} = \kappa q, \quad \kappa = \frac{4\pi j\mu(\mu - 1)}{c(\mu + 1)(\mu^2 + 1)},$$

$$B_{1r} = -\frac{4\pi j}{c(\mu + 1)}z, \quad B_{1z} = \frac{4\pi\mu j}{c(\mu + 1)}q. \tag{23}$$

Таким образом, полученное решение описывает зависимость от времени размеров тороидального шнура при изменении давления плазмы (21), протекающего по шнуру тока (21) и внешнего магнитного поля квадрупольного типа (23).

Вращающаяся плазма

В этом разделе рассматриваются плазменные конфигурации с азимутальным распределением плотности тока. Для стационарного вращения плазмы условие вмороженности силовых линий (1) при $\mathbf{V} = V_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ имеет вид

$$\frac{\partial V_\varphi B_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi B_z}{\partial z} = 0. \tag{24}$$

Как нетрудно видеть, если плазма вращается как твердое тело, т.е. $V_\varphi = \omega r$, где ω — постоянная величина, то выражение (24) сводится к условию $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$.

В отличие от случая неподвижной плазмы условие равновесия осесимметричной конфигурации вращающейся плазмы включает центробежный член

$$\frac{1}{c}j_\varphi B_z = \frac{\partial p}{\partial r} - \rho\frac{V_\varphi^2}{r}.$$

Если известно решение уравнения равновесия для неподвижного плазмоида, то его нетрудно обобщить на случай вращающейся как целое конфигурации. Для этого следует выбрать распределение плотности плазмы в следующем виде

$$\rho = -\frac{\beta j_\varphi}{cr\omega^2}, \tag{25}$$

где β — некоторая постоянная величина.

Тогда для удержания вращающейся плазмы необходимо добавить внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \beta\mathbf{e}_z$, взаимодействие которого с азимутальным током компенсирует влияние центробежного члена.

Рассмотрим теперь нестационарную задачу

$$\rho = \frac{LR^2}{ba^2}\varphi(\xi, \eta), \quad V_r = \dot{a}\xi, \quad V_\varphi = \Omega r, \quad V_z = \dot{b}\eta, \tag{26}$$

где $\Omega = \omega(R/a)^2$ — угловая скорость вращения плазмы.

Чтобы воспользоваться результатами предыдущего раздела, следует учесть, что для вращающейся плазмы плотность магнитного потока равна $\psi + \pi\beta r^2$, где ψ — плотность магнитного потока неподвижной плазмы. Поэтому при решении нестационарной задачи для вычисления магнитного поля в выражениях (9), (11) следует произвести замену $\Psi(\xi, \eta) \rightarrow \Psi(\xi, \eta) + \pi\beta R^2\xi^2$, т.е. теперь для выполнения условия вмороженности силовых линий внешнее однородное магнитное поле должно быть нестационарным $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \beta(R^2/a^2)\mathbf{e}_z$.

В данном случае для фигурирующей в (26) функции φ с учетом выражения (25) имеем

$$\varphi(\chi, \xi) = \frac{\beta}{8\pi^2\omega^2\chi^2 R^2}\left[\frac{1}{R^2}\Gamma(\chi, \xi) + \frac{1}{L^2}\Lambda(\chi, \xi)\right].$$

В результате после подстановки в уравнение Эйлера (3) выражений (9), (11), (25) для размеров вращающегося плазмоида приходим к следующим уравнениям:

$$\ddot{a} = \omega^2\frac{R^4}{a^3}\left(1 - \frac{L[b^2\Gamma(\xi, \eta) + a^2\Lambda(\xi, \eta)]}{b[L^2\Gamma](\xi, \eta) + R^2\Lambda(\xi, \eta)}\right) + \Omega^2 a, \quad \ddot{b} = 0.$$

Отсюда видно, что переход к обыкновенному дифференциальному уравнению, описывающему изменение характерного поперечного размера плазмоида, возможен только в случае определенной зависимости Γ, Λ от автомодельных переменных $\Gamma = C_1 F(\xi, \eta)$, $\Lambda = C_2 F(\xi, \eta)$, где F — некоторая функция, C_i — не зависящие от автомодельных переменных коэффициенты.

В частности, для рассмотренной в предыдущем разделе тороидальной конфигурации $\Gamma = \psi_0(\alpha - 1)R^4\xi^2$, $\Lambda = \psi_0 R^2 L^2 \xi^2$. Поэтому для зависимости от времени радиуса магнитной оси тороидальной конфигурации вращающейся плазмы получим

$$\ddot{a} = \omega^2 \frac{R^4}{a^3}\left[1 - \frac{b}{L}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{La^2}{\alpha b R^2}\right]. \qquad (27)$$

Решение уравнения (27) несложно построить при $b = L$ для малых колебаний вблизи стационарного состояния. Линеаризуя это уравнение, найдем

$$a = R\left(1 + \frac{u}{\omega_r}\sin\omega_r t\right),$$

где используется обозначение $\omega_r = \omega\sqrt{2/\alpha}$.

Для тонкого шнура $d = Da/R$, поэтому аналогичным образом изменяется и поперечный размер сечения шнура.

Следует также отметить, что радиальную составляющую скорости плазмы можно представить в следующем виде: $V_r = \dot{a} + q\dot{d}/d$, т. е. с точностью до членов первого порядка q/d является автомодельной переменной. Поэтому результаты, полученные для тонкого тороидального шнура, соответствуют решению уравнений магнитной гидродинамики в рамках автомодельного приближения. Этот подход применялся ранее для изучения динамики электронного кольца [7].

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

[2] *Шафранов В.Д.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 3 (9), С. 710–722.

[3] *Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат. 1963. Вып. 2. С. 92–131.

[4] *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича, Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11. С. 118–235.

[5] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.

[6] *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.

[7] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 1997. Вып. 7. С. 103–107.