01;09

Переходное и дифракционное излучение заряда на сферически анизотропно проводящем шаре

© И.И. Каликинский

Астраханский государственный педагогический университет,
414056 Астрахань, Россия

(Поступило в Редакцию 27 августа 2001 г.)

Решена задача о переходном излучении заряда на сферически анизотропно проводящем шаре и дифракционном излучении заряда, пролетающего вблизи того же шара. Найдены энергия, спектр и поляризация излучения.

Переходному излучению, открытому В.Л. Гинзбургом и И.М. Франком в 1946 г. [1], в настоящее время посвящено много работ [2]. Задача о переходном излучении на анизотропно проводящей плоскости (прямолинейная анизотропия) решена в [3]. Переходному излучению на кольцевой и радиальной решетках (цилиндрическая анизотропия) посвящены работы автора [4,5]. Представляет интерес рассмотреть переходное излучение на сферически анизотропно проводящем шаре. Кроме чисто теоретического интереса такая задача имеет астрофизические приложения, на которые внимание автора обратил Я.Н. Истомин, за что автор выражает ему свою благодарность.

Задача о переходном и дифракционном излучении заряда на пространственном „ежике“ имеет отношение к активным галактическим ядрам, которые, согласно современным взглядам, представляют собой черную дыру, окруженную аккреционным диском, магнитное поле которого сжимает магнитное поле черной дыры до почти монопольного (индукция порядка 10^4 Gs). Частицы в таком поле свободно движутся вдоль магнитного поля (по сферическим радиусам, проводимость почти бесконечная) и слабо перемещаются поперек поля (проводимость почти нулевая), так что для описания переходного и дифракционного излучения на таком ядре можно использовать модель пространственного „ежика“. Это же модель может быть применена к замагниченным нейтронным звездам, где поле, правда, дипольное, зато индукция порядка 10^{12} Gs.

Ниже рассмотрена задача о переходном и дифракционном излучении заряда на сферически анизотропно проводящем шаре.

Постановка задачи. Решение неоднородного векторного волнового уравнения

Пусть имеется сферически анизотропно проводящий шар. Таких случаев два. В первом случае шар состоит из вложенных друг в друга идеально проводящих сфер, изолированных в электрическом отношении друг от друга. Легко понять, что такой шар для поля вне его эквивалентен идеально проводящему шару. Граничное условие

$$E_\Theta\big|_{R=R_0} = 0, \tag{1}$$

где R_0 — радиус шара.

Другой случай — пространственный „ежик“. Вдоль сферических радиусов проводимость бесконечная, а в поперечных направлениях нулевая. Граничное условие

$$E_R\big|_{R=R_0} = 0. \tag{2}$$

Параллельно оси z движется точечный заряд q с постоянной скоростью $\mathbf{v}(0, 0, -v)$. Заряд создает ток с плотностью $\mathbf{j}(0, 0, -j)$, где

$$j = qv\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z + vt) \tag{3}$$

и можно считать $y_0 = 0$. Траектория заряда пересекает плоскость $X0Y$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, причем $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = R_0 \sin\Theta_0$, $0 \le \Theta_0 \le \pi/2$ для переходного и $r_0 > R_0$ для дифракционного излучения. Обозначим цилиндрический радиус в точку $M(x, y)$ через $\mathbf{r}$. Тогда

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

и

$$r' = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi}, \tag{4}$$

где φ — полярный угол.

Перейдем к Фурье-компонентам

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} j_\omega e^{-i\omega t} d\omega \tag{5}$$

и т. д. При этом

$$j_\omega = \frac{q}{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \frac{\delta(r')}{2\pi r'}. \tag{6}$$

Используя формулу [6]

$$\frac{\delta(r')}{r'} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r')\lambda d\lambda \tag{7}$$

и теорему сложения бесселевых функций [7]

$$J_0(\lambda r') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r) J_m(\lambda r_0) e^{im\varphi}, \tag{8}$$

получим

$$j_\omega = \frac{q}{4\pi^2} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty J_m(\lambda r) J_m(\lambda r_0) \lambda d\lambda. \tag{9}$$

При решении электродинамической задачи будем исходить из уравнений Максвелла, которые для Фурье-компонент имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_\omega, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_\omega. \tag{10}$$

В качестве потенциалов возьмем H_r и H_φ ($H_z = 0$) и будем решать уравнения (10) в цилиндрических координатах. Уравнения для потенциалов

$$\Delta \mathbf{H}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}_\omega \tag{11}$$

или

$$\left(\Delta \mathbf{H}_\omega\right)_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2} H_{\omega\varphi} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_\omega}{\partial r}, \tag{12}$$

$$\left(\Delta \mathbf{H}_\omega\right)_r + \frac{\omega^2}{c^2} H_{\omega r} = -\frac{4\pi}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial j_\omega}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{j}_\omega = 0, \qquad H_{\omega z} = 0. \tag{13}$$

Используя рекурентные формулы для бесселевых функций [7], можно получить

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_\omega}{\partial r} = \frac{q}{2\pi c} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty J_m(\lambda r_0) [J_{m-1}(\lambda r) - J_{m+1}(\lambda r)] \lambda^2 d\lambda, \tag{14}$$

$$\frac{-4\pi}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial j_\omega}{\partial \varphi} = -\frac{iq}{2\pi c} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty J_m(\lambda r_0) [J_{m-1}(\lambda r) + J_{m+1}(\lambda r)] \lambda^2 d\lambda. \tag{15}$$

Решение неоднородных уравнений (12), (13) ищем в виде

$$H_{\omega\varphi}^{(0)} = \frac{q}{2\pi c} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty [B_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) + C_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)] \lambda d\lambda, \tag{16}$$

$$H_{\omega r}^{(0)} = \frac{iq}{2\pi c} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty [B_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) - C_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)] \lambda d\lambda. \tag{17}$$

Известно, [8], что

$$(\Delta \mathbf{H}_\omega)_\varphi = \Delta H_{\omega\varphi} - \frac{H_{\omega\varphi}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_{\omega r}}{\partial \varphi}, \tag{18}$$

$$(\Delta \mathbf{H}_\omega)_r = \Delta H_{\omega r} - \frac{H_{\omega r}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_{\omega\varphi}}{\partial \varphi}. \tag{19}$$

Решение системы уравнений (12), (13) производится так же, как это сделано в [4,5]. В итоге получаем

$$B_m(\lambda) = -C_m(\lambda) = \frac{\lambda J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)}, \tag{20}$$

где $\beta = v/c$.

Итак, система неоднородных уравнений (12), (13) решена. Решение электродинамической задачи ищем в виде

$$\mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_\omega^{(0)} + \mathbf{H}_\omega^{(1)}, \tag{21}$$

где $\mathbf{H}_\omega^{(0)}$ — поле заряда (решение неоднородного векторного волнового уравнения), $\mathbf{H}_\omega^{(1)}$ — поле переходного или дифракционного излучения (решение однородного векторного волнового уравнения).

Последнее найдено в [4,5]. Оно имеет вид

$$H_{\omega\varphi}^{(1)} = \frac{q}{2\pi c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty \left[\widetilde{\mathscr{D}}_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) + \widetilde{\mathscr{E}}_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa z} \lambda d\lambda, \tag{22}$$

$$H_{\omega r}^{(1)} = \frac{iq}{2\pi c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty \left[\widetilde{\mathscr{D}}_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) - \widetilde{\mathscr{E}}_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa z} \lambda d\lambda, \tag{23}$$

где $\varkappa = \sqrt{(\omega^2/c^2) - \lambda^2}$, $\operatorname{Im} \varkappa > 0$ для $z > 0$, а для $z < 0$ заменяем $\sim$ на $\approx$ и $e^{i\varkappa z}$ на $e^{-i\varkappa z}$.

Коэффициенты $\widetilde{\mathscr{D}}_m(\lambda)$ и $\widetilde{\mathscr{E}}_m(\lambda)$ найдем из граничных условий (1) или (2) и условия

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_\omega^{(1)} = 0. \tag{24}$$

Решение задачи о переходном и дифракционном излучении заряда на идеально проводящем шаре

Из условия (24) получаем

$$\widetilde{\mathscr{D}}_m(\lambda) = -\widetilde{\mathscr{E}}_m(\lambda) [= \mathscr{D}_m(\lambda)], \tag{25}$$

$$\approx\!\!\!\!\!\mathscr{D}_m(\lambda) = -\approx\!\!\!\!\!\mathscr{E}_m(\lambda). \tag{26}$$

Граничное условие (1) имеет вид

$$\left(E_{\omega r}\cos\Theta - E_{\omega z}\sin\Theta\right)_{R=R_0} = 0. \tag{27}$$

При этом

$$E_{\omega r} = \frac{ic}{\omega}\left(-\frac{\partial H_{\omega\varphi}}{\partial z}\right),$$

$$E_{\omega z} = \frac{ic}{\omega}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_{\omega\varphi}) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_{\omega r}}{\partial\varphi}\right], \tag{28}$$

$$H_{\omega\varphi} = H^{(0)}_{\omega\varphi} + H^{(1)}_{\omega\varphi}, \quad H_{\omega r} = H^{(0)}_{\omega r} + H^{(1)}_{\omega r}. \tag{29}$$

Подставляя $H_{\omega\varphi}$ и $H_{\omega r}$ в (27) и (28) и переходя от цилиндрических координат к сферическим, получим

$$E_{\omega\Theta m} = -\frac{ic}{\omega}B_m(\lambda)e^{-i\frac{\omega}{v}R\cos\Theta}\left\{\frac{2i\omega}{v}J'_m(\lambda R\sin\Theta)\cos\Theta\right.$$

$$-2\lambda J''_m(\lambda R\sin\Theta)\sin\Theta - \frac{2}{R\sin\Theta}J'_m(\lambda R\sin\Theta)\sin\Theta$$

$$\left.+\frac{2m^2}{\lambda(R\sin\Theta)^2}J_m(\lambda R\sin\Theta)\sin\Theta\right\}$$

$$+\frac{ic}{\omega}D_m(\lambda)e^{i\varkappa R\cos\Theta}\left\{2i\varkappa J'_m(\lambda R\sin\Theta)\cos\Theta\right.$$

$$+2\lambda J''_m(\lambda R\sin\Theta)\sin\Theta + \frac{2}{R\sin\Theta}J'_m(\lambda R\sin\Theta)\sin\Theta$$

$$\left.-\frac{2m^2}{\lambda(R\sin\Theta)^2}J_m(\lambda R\sin\Theta)\sin\Theta\right\}. \tag{30}$$

Разложим теперь $E_{\omega\Theta m}$ по присоединенным функциям Лежандра

$$E_{\omega\Theta m} = -\frac{ic}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}e_{mn}(R)\mathscr{P}^{(m)}_n(\cos\Theta). \tag{31}$$

Тогда граничное условие принимает вид

$$e_{mn}(R_0) = 0. \tag{32}$$

Из условия (32) можно найти неизвестные коэффициенты $D_{mn}(\lambda)$

$$D_{mn}(\lambda) = B_m(\lambda)\frac{\mathscr{G}_{mn}(\lambda)}{\mathscr{F}_{mn}(\lambda)}, \tag{33}$$

где

$$\mathscr{F}_{mn}(\lambda) = \int_0^{\pi}\mathscr{P}^{(m)}_n(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta e^{i\varkappa R_0\cos\Theta}$$

$$\times\left\{2i\varkappa J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta + 2\lambda J''_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta\right.$$

$$+\frac{2}{R_0\sin\Theta}J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta$$

$$\left.-\frac{2m^2}{\lambda(R_0\sin\Theta)^2}J_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta\right\}, \tag{34}$$

$$\mathscr{G}_{mn}(\lambda) = \int_0^{\pi}\mathscr{P}^{(m)}_n(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta e^{-i\frac{\omega}{v}R_0\cos\Theta}$$

$$\times\left\{\frac{2i\omega}{v}J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta - 2\lambda J''_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta\right.$$

$$-\frac{2}{R_0\sin\Theta}J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta$$

$$\left.+\frac{2m^2}{\lambda(R_0\sin\Theta)^2}J_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta\right\}. \tag{35}$$

Имеем

$$\mathscr{D}_{mn}(-\lambda) = B_m(-\lambda)\frac{\mathscr{G}_{nm}(-\lambda)}{\mathscr{F}_{mn}(-\lambda)} = (-1)^{m+1}\mathscr{D}_{mn}(\lambda). \tag{36}$$

Решение задачи о переходном и дифракционном излучении заряда на пространственном „ежике“

Для пространственного „ежика“ граничное условие имеет вид

$$\left(E_{\omega r}\sin\Theta + E_{\omega z}\cos\Theta\right)_{R=R_0} = 0, \tag{37}$$

где $E_{\omega r}$ и $E_{\omega z}$ находятся по формулам (28).

Как и в предыдущем параграфе, получаем для коэффициентов $D_{mn}(\lambda)$

$$\mathscr{D}_{mn}(\lambda) = B_m(\lambda)\frac{\bar{\mathscr{G}}_{mn}(\lambda)}{\bar{\mathscr{F}}_{mn}(\lambda)}, \tag{38}$$

где

$$\bar{\mathscr{G}}_{mn}(\lambda) = \int_0^{\pi}\mathscr{P}^{(m)}_n(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta e^{-i\frac{\omega}{v}R_0\cos\Theta}$$

$$\times\left\{\frac{2i\omega}{v}J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta + 2\lambda J''_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta\right.$$

$$+\frac{2}{R_0\sin\Theta}J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta$$

$$\left.-\frac{2m^2}{\lambda(R_0\sin\Theta)^2}J_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta\right\}, \tag{39}$$

$$\bar{\mathscr{F}}_{mn}(\lambda) = \int_0^{\pi}\mathscr{P}^{(m)}_n(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta e^{i\varkappa R_0\cos\Theta}$$

$$\times\left\{2i\varkappa J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\sin\Theta - 2\lambda J''_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta\right.$$

$$-\frac{2}{R_0\sin\Theta}J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta$$

$$\left.+\frac{2m^2}{\lambda(R_0\sin\Theta)^2}J'_m(\lambda R_0\sin\Theta)\cos\Theta\right\}. \tag{40}$$

Имеем

$$\mathscr{D}_{mn}(-\lambda) = (-1)^{m+1}\mathscr{D}_{mn}(\lambda). \tag{41}$$

Вычисление интенсивности излучения

Переходя в (22), (23) от функции Бесселя к функциям Ханкеля, используя соотношения обхода последних и их асимптотику [7], применяя затем метод перевала, получаем (в волновой зоне $H^{(1)}_{\omega\varphi mn} = E^{(1)}_{\omega\Theta mn}$) для спектральной интенсивности излучения

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = c\,\mathrm{Re}\,E^{(1)}_{\omega\Theta mn} H^{(1)^*}_{\omega\varphi mn} R^2$$

$$= \frac{q^2\omega^2}{\pi^2 c^3}\cos^2\Theta \left|\mathscr{D}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\Theta\right)\right|^2. \qquad (42)$$

Поле в волновой зоне линейно поляризовано, причем электрический вектор лежит в плоскости, проходящей через ось z и луч в точку наблюдения.

Анализ полученных результатов

Из формул (20), (33), (38), (42) следует, что при $r_0 \to \infty$ интенсивность излучения стремится к нулю. Также при $R_0 \to 0$ интенсивность излучения стремится к нулю. Приведем результаты расчета интенсивности излучения для черной дыры массой 10^8 солнечных масс $(R_0 = 3\cdot 10^{11}\,\mathrm{m})$ и энергией частицы 10^{10} eV. При этом отметим, что частота, на которую приходится максимум интенсивности излучения, не зависит от энергии частицы и приходится на $\omega \sim 10\,\mathrm{s}^{-1}$.

$\lg\omega$	$f(\omega)$
1	$3.2\cdot 10^{19}$
2	$1.4\cdot 10^{15}$
3	$1.5\cdot 10^{15}$
4	$1.6\cdot 10^{7}$
5	$2.0\cdot 10^{6}$
6	$3.5\cdot 10^{3}$
7	$1.4\cdot 10^{2}$
8	0.95

Приведем таблицу значений функции

$$f(\omega) = \frac{4\pi^2 c^5}{q^2 v^4}\frac{dw_\omega}{d\Omega}$$

для $n = 0$, $m = 0$, $\Theta = \pi/4$, $\tau_0 = R_0$ для $\omega = 10, 10^2, \dots, 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$.

В заключение отметим, что внимание автора на приложение полученных результатов к астрофизическим задачам обратил Я.Н. Истомин, за что автор выражает ему благодарность.

Список литературы

[1] *Гинзбург В.Л., Франк И.М.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. вып. 1. С. 15–28.
[2] *Варданян Л.А., Мелкумова И.Г.* / Под ред. Г.М. Гарибяна. Библиография работ по переходному излучению заряженных частиц (1945–1982). Ереван: Ереванский физический институт, 1983.
[3] *Барсуков К.А., Нарышкина Л.Г.* // Радиофизика. 1965. Т. 8. № 5. С. 936–941.
[4] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 9. С. 20–26.
[5] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 10. С. 131–142.
[6] *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М.. Л.: Гостехиздат, 1949. 432 с.
[7] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1097 с.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.